文章编号:1000-2367(2023)01-0039-08　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.01.005

广义 Camassa-Holm 方程的解在加权空间中的持续性

李用声[1],郭慧静[1],赵永叶[2],杨美玲[3]

(1.华南理工大学 数学学院,广州 510640;2.广州航海学院 基础教学部,广州 510725;
3.东莞理工学院 计算机科学与技术学院,广东 东莞 523808)

摘　要:主要研究了具有 $k+1$ 阶非线性项的广义 Camassa-Holm 方程的解的性质.一方面,通过运用合适的容许权函数,证明了该方程的解在加权空间 L^p 中的持续性.另一方面,也研究了当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时解的渐近性质.

关键词:广义 Camassa-Holm 方程;持续性;加权空间

中图分类号:O175.29　　**文献标志码:**A

本文研究下面广义 Camassa-Holm 方程在加权 L^p 空间中的持续性.

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + (k+2)u^k u_x = (k+1)u^{k-1}u_x u_{xx} + u^k u_{xxx}, x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0, x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $k \geq 1, k \in \mathbf{N}$.

当 $k=1$ 时,(1)式化为著名的 Camassa-Holm 方程

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{2}$$

1981 年,FUCHSSTEINER 等[1]在研究具有双 Hamilton 结构的广义 KdV 方程的完全可积性时,Camassa-Holm 方程首次被推导出来.后来,该方程被 CAMASSA 等[2]作为在平坦底部水波的单向运动模型而提出.他们发现(2)有许多特性,例如完全可积性,双 Hamilton 结构,尖峰孤立波解,拥有无穷多的守恒律,等等.因此,(2)引起了许多数学家及物理学家的兴趣,得到了巨大的发展.CONSTANTIN[3]研究了周期 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题.文献[4-6]研究了初值 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})(s > \frac{3}{2})$ 的局部适定性. BYERS[7]证明了 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R})(s < \frac{3}{2})$ 是不适定的. 这就说明 $s=\frac{3}{2}$ 是 Camassa-Holm 方程局部适定性的临界指标.WU 等[8]研究了弱耗散周期 Camassa-Holm 方程解的局部适定性,爆破和衰减.他们在文献[9]中得到了弱耗散 Camassa-Holm 方程 Cauchy 问题的全局解和爆破现象. BRANDOLESE[10]研究了解 $u \in C([0,T], H^s(\mathbf{R}))$ 在加权空间中的持续性和非持续性.

关于广义 Camassa-Holm 方程,WU 等[11]研究了具有周期边界条件的广义 Camassa-Holm 方程.他们得到了爆破准则,并且在适当的假设下得到了强解和弱解的整体存在性.ZHAO 等[12-13]证明了局部适定性定理和爆破准则,以及在具有指数权重的 L^∞ 空间中强解的持续性.

受文献[10,14]的启发,本文将应用一大类适中的权函数,在加权的 L^p 空间中,研究问题(1)强解的持续性和渐近行为.更确切地说,对于 $T>0$,将找到一大类适中的权函数 ϕ,使得

$$\sup_{t\in[0,T]} (\| u(t)\phi \|_{L^p} + \| (\partial_x u(t))\phi \|_{L^p}) < \infty,$$

收稿日期:2022-03-29;**修回日期:**2022-06-23.

基金项目:国家自然科学基金重点项目(11831003);国家自然科学基金(11971356);中央高校基本科研业务费专项基金面上项目(2019MS110;2019MS112);广州市基础与应用基础研究项目(202102020283).

作者简介(通信作者):李用声(1965-),男,湖北襄阳人,华南理工大学教授,博士生导师,主要从事非线性发展方程与无穷维动力系统的研究,E-mail: yshli@scut.edu.cn.

其中$\|\cdot\|_{L^p}$代表通常的L^p范数.本文的结果对具有高阶非线性 Camassa-Holm 型方程持续性的有关结论进行了推广.

本文的主要结论陈述如下：

定理 1 设$T>0, s>\frac{3}{2}$且$2\leq p\leq\infty$.令$u\in C([0,T],H^s(\mathbf{R}))$是问题(1)如下初值对应的强解

$$u_0\phi\in L^p(\mathbf{R})\text{ 且}(\partial_x u_0)\phi\in L^p(\mathbf{R}),\tag{3}$$

其中,ϕ是容许权函数,则对于任意的$t\in[0,T]$,有

$$\|u(t)\phi\|_{L^p}+\|(\partial_x u(t))\phi\|_{L^p}\leq(\|u_0\phi\|_{L^p}+\|(\partial_x u_0)\phi\|_{L^p})\mathrm{e}^{CM^k t},$$

其中,常数$C>0$仅依赖于$A, C_0, \alpha=\inf\limits_{\mathbf{R}} v>0, \int_{\mathbf{R}}\frac{v(x)}{\mathrm{e}^{|x|}}\mathrm{d}x<\infty$(见定义 1)和$M$,其中

$$M\equiv\sup_{t\in[0,T]}(\|u(t)\|_{L^\infty}+\|\partial_x u(t)\|_{L^\infty})<\infty.\tag{4}$$

定理 1 中权函数ϕ的例子可以选取如下：

$$\phi(x)=\phi_{a,b,c,d}(x)=\mathrm{e}^{a|x|^b}(1+|x|)^c(\ln(\mathrm{e}+|x|))^d,$$

其中$a\geq 0, c, d\in\mathbf{R}, 0\leq b\leq 1, ab<1$.

注意到定理 1 并没有包含$\phi=\phi_{1,1,c,d}, c<0, d\in\mathbf{R}, \frac{1}{|c|}<p\leq\infty$的极限情形.对于更一般的快速增长的权函数$(1+|\cdot|)^c(\ln(\mathrm{e}+|\cdot|))^d\in L^p(\mathbf{R})$,有下面定理 2 的持续性结果.

定理 2 设$2\leq p\leq\infty$且ϕ是容许权函数,并将条件$\int_{\mathbf{R}}\frac{v(x)}{\mathrm{e}^{|x|}}\mathrm{d}x<\infty$换成$v\mathrm{e}^{-|\cdot|}\in L^p(\mathbf{R})$.若初值$u_0$满足

$$\begin{cases}u_0\phi\in L^p(\mathbf{R}),\\ u_0\phi^{\frac{1}{k+1}}\in L^{k+1}(\mathbf{R}),\end{cases}\text{和}\begin{cases}(\partial_x u_0)\phi\in L^p(\mathbf{R}),\\ (\partial_x u_0)\phi^{\frac{1}{k+1}}\in L^{k+1}(\mathbf{R}),\end{cases}$$

且$u\in C([0,T],H^s(\mathbf{R}))(s>\frac{3}{2})$是问题(1)对应于初值$u_0$的强解,则有

$$\sup_{t\in[0,T]}(\|u(t)\phi\|_{L^p}+\|(\partial_x u(t))\phi\|_{L^p})<\infty,$$

$$\sup_{t\in[0,T]}(\|u(t)\phi^{\frac{1}{k+1}}\|_{L^p}+\|(\partial_x u(t))\phi^{\frac{1}{k+1}}\|_{L^p})<\infty.$$

下面给出问题(1)的强解关于空间变量的渐近性质.

定理 3 设权函数$\phi(x)=\phi_{a,b,c,d}(x)=\mathrm{e}^{a|x|^b}(1+|x|)^c(\ln(\mathrm{e}+|x|))^d$,其中$a\geq 0, 0\leq b\leq 1, ab<1$, $c, d\in\mathbf{R}$.令$s>\frac{3}{2}$且$u_0\in H^s, u_0\not\equiv 0$满足$u_0\phi, (\partial_x u_0)\phi\in L^\infty(\mathbf{R}), u\in C([0,T],H^s(\mathbf{R}))$是问题(1)的强解,则

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\phi(x)(|u(x,t)|+|\partial_x u(x,t)|)<\infty.\tag{5}$$

另外,下面的渐近性质成立

$$\begin{cases}u(x,t)=u_0(x)+\mathrm{e}^{-x}t[\Phi^+(t)+\alpha_1(x,t)]-\mathrm{e}^{-x}t[\Psi^+(t)+\alpha_2(x,t)],\\ u(x,t)=u_0(x)-\mathrm{e}^{x}t[\Phi^-(t)+\beta_1(x,t)]-\mathrm{e}^{x}t[\Psi^-(t)+\beta_2(x,t)],\end{cases}\tag{6}$$

其中,$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_{1,2}(x,t)=0, \lim\limits_{x\to-\infty}\beta_{1,2}(x,t)=0$,且$\Phi^\pm, \Psi^\pm(t)$是$[0,T]$上的连续函数.

1 预备知识

首先,给出一些标准定义.通常来说,权函数是$\mathbf{R}$上的简单非负函数.如果权函数v满足

$$v(x+y)\leq v(x)v(y), \forall x, y\in\mathbf{R},$$

则称v具有次可乘性.另外,对于给定的具有次可乘性的权函数v,如果正函数ϕ满足

$$\exists C_0>0, s.t.\ \phi(x+y)\leq C_0 v(x)\phi(y), \forall x, y\in\mathbf{R},$$

则称 ϕ 是 v-适中的.对于具有次可乘性的函数 v，如果 ϕ 是 v-适中的，就说 ϕ 是适中的.

BRANDOLESE 在文献[10]中给出了一个权函数的例子：

$$\phi(x)=\phi_{a,b,c,d}(x)=\mathrm{e}^{a|x|^b}(1+|x|)^c(\ln(\mathrm{e}+|x|))^d, \tag{7}$$

(i)对于 $a,c,d\geq 0$ 和 $0\leq b\leq 1$，$\phi_{a,b,c,d}$ 是次可乘的.

(ii)如果 $a,c,d\in\mathbf{R}$ 且 $0\leq b\leq 1$，那么 ϕ 是适中的.更准确来说，对于 $|a|\leq\alpha$，$b\leq\beta$，$|c|\leq\gamma$ 和 $|d|\leq\sigma$，存在正数 $\alpha,\beta,\gamma,\sigma$ 使得 $\phi_{a,b,c,d}$ 是 $\phi_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}$-适中的.

下面给出 Camassa-Holm 型方程容许权函数的定义.

定义 1　ϕ 称为 Camassa-Holm 型方程的容许权函数，如果 ϕ 是 $\mathbf{R}$ 上的局部绝对连续函数，且满足

(i)对某些 $A>0$，$|\phi'(x)|\leq A|\phi(x)|$，a.e. $x\in\mathbf{R}$；

(ii)ϕ 是 v-适中的，其中权函数 v 是次可乘的，满足 $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} v(x)>0$ 和 $\int_{\mathbf{R}}\frac{v(x)}{\mathrm{e}^{|x|}}\mathrm{d}x<\infty$.

权函数适中性的重要性，可以由以下加权 Young 不等式体现.

命题 1[10]　设 $1\leq p\leq\infty$ 且 v 是 $\mathbf{R}^n$ 上次可乘的权函数，则以下两个条件是等价的：

(i)ϕ 是对应常数 $C_0>0$ 的 v-适中的权函数.

(ii)对所有的可测函数 f_1 和 f_2，下面的加权 Young 不等式成立：

$$\|(f_1*f_2)\phi\|_{L^p}\leq C_0\|f_1v\|_{L^1}\|f_2\phi\|_{L^p}.$$

2　定理 1 的证明

令 $G(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.则 $G(x)$ 是 $u-u_{xx}=\delta$ 的基本解，其中 δ 是 Dirac 广义函数，对任意的 $f\in L^p(\mathbf{R})$，$1\leq p\leq\infty$，有 $(1-\partial_{xx})^{-1}f=G(x)*f$. 因此(1)式可以改写为

$$\begin{cases}u_t+u^ku_x+G*(F_1(u))_x+G*F_2(u)=0,\\ u(x,0)=u_0(x),\end{cases} \tag{8}$$

其中，

$$F_1(u)=\frac{2k-1}{2}u^{k-1}u_x^2+u^{k+1},F_2(u)=\frac{k-1}{2}u^{k-2}u_x^3. \tag{9}$$

ZHAO 等[12]证明了(8)的局部适定性.

定理 4　设 $1\leq p,r\leq\infty$ 且 $s>\max\{\frac{3}{2},1+\frac{1}{p}\}$.令 $u_0\in B^s_{p,r}$，则存在 $T>0$ 使得问题(8)在空间 $E^s_{p,r}(T)$ 中有唯一解 u.解算子 $S(t):u_0\mapsto u=S(t)u_0$ 是从 $B^s_{p,r}$ 到 $E^{s'}_{p,r}(T)(s'<s)$ 上的局部 Hölder 连续映射，即：对两个初值函数 $u_0,v_0\in B^s_{p,r}$，与其对应的解 $u(t)=S(t)u_0$，$v(t)=S(t)v_0$ 满足

$$\|u(t)-v(t)\|_{B^{s'}_{p,r}}\leq C\|u_0-v_0\|^{\theta}_{B^{s'}_{p,r}},$$

其中，若 $s'\leq s-1$，则 $\theta=1$；若 $s-1<s'<s$，则 $\theta=s-s'$.

为了证明解在加权空间中的持续性，给出非线性项的估计.

引理 1　设 $1\leq p\leq\infty$，$s>\frac{3}{2}$，$u\in C([0,T],H^s(\mathbf{R}))$ 是问题(8)的解，那么对于任意适中的权函数 f，下列估计式成立

$$\|F_1(u)f\|_{L^p}+\|F_2(u)f\|_{L^p}\leq CM^k(\|uf\|_{L^p}+\|u_xf\|_{L^p}),$$

其中，$F_1(u)$ 和 $F_2(u)$ 由(9)式定义，C 依赖于 k 和 M(见(4)式).

证明　由 $F_1(u)$ 的表达式和 Hölder 不等式，可以得到

$$\|F_1(u)f\|_{L^p}\leq\left\|\frac{2k-1}{2}u^{k-1}u_x^2f\right\|_{L^p}+\|u^{k+1}f\|_{L^p}\leq c'(\|uf\|_{L^p}\|u\|^{k-2}_{L^\infty}\|u_x\|^2_{L^\infty}+\\ \|uf\|_{L^p}\|u\|^k_{L^\infty})\leq c'M^k\|uf\|_{L^p},$$

其中 c' 依赖于 k.

同样的,可以得到

$$\|[\frac{k-1}{2}u^{k-2}u_x^3]f\|_{L^p}\leq c''\|u_xf\|_{L^p}\|u\|_{L^\infty}^{k-2}\|u_x\|_{L^\infty}^2\leq c''M^k\|u_xf\|_{L^p}.$$

由此就证得上述估计式成立.

定理 1 的证明 对于任意的正整数 N,考虑 ϕ 的 N-截断

$$f(x)=f_N(x)=\min\{\phi,N\}.$$

那么,$f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ 是局部绝对连续函数,满足 $\|f\|_{L^\infty}\leq N$, $|f'(x)|\leq A|f(x)|$ a.e. $x\in\mathbf{R}$.

另外,令 $\alpha=\inf\limits_{x\in\mathbf{R}}v(x)>0$.由次可乘性的定义,有 $f(x+y)\leq C_1v(x)f(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$,其中 $C_1=\max\{C_0,\alpha^{-1}\}$. 也就是说,$f$ 是 v-适中的权函数(对应常数 $C_1>0$).另外,常数 C_1 不依赖于 N. 这就是说,f 是关于 N 一致的 v-适中的加权函数.

首先考虑 $p\neq\infty$ 的情形.(8) 式乘以 $|uf|^{p-2}(uf)f$,在 $\mathbf{R}$ 上积分,可以得到

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|uf\|_{L^p}^p+\int_{\mathbf{R}}u^ku_xf|uf|^{p-1}\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}(f\partial_xG*F_1(u))|uf|^{p-2}(uf)\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\mathbf{R}}(fG*F_2(u))|uf|^{p-2}(uf)\mathrm{d}x=0. \tag{10}$$

注意到 f 是 v-适中的加权函数(对应常数 C_1),由 Hölder 不等式和命题 1,有

$$\int_{\mathbf{R}}(f\partial_xG*F_1(u))|uf|^{p-2}(uf)\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}(fG*F_2(u))|uf|^{p-2}(uf)\mathrm{d}x\leq$$
$$\|uf\|_{L^p}^{p-1}(\|f(\partial_xG*F_1(u))\|_{L^p}+\|f(G*F_2(u))\|_{L^p})\leq$$
$$C_2\|uf\|_{L^p}^{p-1}(\|(\partial_xG)v\|_{L^1}\|F_1(u)f\|_{L^p}+\|Gv\|_{L^1}\|F_2(u)f\|_{L^p})\leq$$
$$C_3\|uf\|_{L^p}^{p-1}(\|F_1(u)f\|_{L^p}+\|F_2(u)f\|_{L^p}). \tag{11}$$

在最后一个不等式中,应用了 $|\partial_xG(x)|\leq\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ 和$\int_{\mathbf{R}}\frac{v(x)}{\mathrm{e}^{|x|}}\mathrm{d}x<\infty$. 另外,

$$\int_{\mathbf{R}}u^ku_xf|uf|^{p-1}\mathrm{d}x\leq\|uf\|_{L^p}^{p-1}\|u^ku_xf\|_{L^p}\leq\|uf\|_{L^p}^{p-1}\|u_xf\|_{L^p}\|u\|_{L^\infty}^k\leq$$
$$M^k\|uf\|_{L^p}^{p-1}\|u_xf\|_{L^p}. \tag{12}$$

因此,由(10)~(12)式和引理 1,可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|uf\|_{L^p}\leq C_3(\|F_1(u)f\|_{L^p}+\|F_2(u)f\|_{L^p})+M^k\|u_xf\|_{L^p}\leq$$
$$C_4M^k(\|uf\|_{L^p}+\|u_xf\|_{L^p}), \tag{13}$$

其中 C_4 依赖于 k,v 和 ϕ,但是不依赖于 p.

接下来,估计 u_xf.(8) 式关于 x 求导,并且由等式 $-\partial_{xx}G*f=f-G*f$,可得:

$$\partial_t(u_x)+ku^{k-1}u_x^2+u^ku_{xx}-F_1(u)+G*F_1(u)+\partial_xG*F_2(u)=0. \tag{14}$$

(14)式乘以 $|u_xf|^{p-2}(u_xf)f$,关于 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分,可得:

$$\int_{\mathbf{R}}\partial_t(u_x)|u_xf|^{p-2}(u_xf)f\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}ku^{k-1}u_x^2|u_xf|^{p-2}(u_xf)f\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}u^ku_{xx}|u_xf|^{p-2}(u_xf)f\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\mathbf{R}}F_1(u)|u_xf|^{p-2}(u_xf)f\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}(G*F_1(u))|u_xf|^{p-2}(u_xf)f\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\mathbf{R}}(\partial_xG*F_2(u))|u_xf|^{p-2}(u_xf)f\mathrm{d}x=0. \tag{15}$$

注意到

$$\int_{\mathbf{R}}u^ku_{xx}f|u_xf|^{p-2}(u_xf)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}u^k(\partial_x(u_xf)-u_xf_x)|u_xf|^{p-2}(u_xf)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\mathbf{R}}u^k\partial_x(\frac{|u_xf|^p}{p})\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}}u^k|u_xf|^{p-2}(u_xf)u_xf_x\mathrm{d}x, \tag{16}$$

又由 $f'(x)\leq A|f(x)|$, 可知

$$\int_{\mathbf{R}} u^k u_{xx} f \mid u_x f \mid^{p-2}(u_x f)\mathrm{d}x \leq C_5 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + AM^k \| u_x f \|_{L^p}^p \leq C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p. \tag{17}$$

将(17)式代入(15)式，由命题 1，有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x f \|_{L^p}^p \leq -\int_{\mathbf{R}} ku^{k-1}u_x^2 \mid u_x f \mid^{p-2}(u_x f) f\mathrm{d}x + C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + \int_{\mathbf{R}} F_1(u) \mid u_x f \mid^{p-2}(u_x f) f\mathrm{d}x -$$

$$\int_{\mathbf{R}}(fG * F_1(u)) \mid u_x f \mid^{p-2} u_x f\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}}(f\partial_x G * F_2(u)) \mid u_x f \mid^{p-2} u_x f \mathrm{d}x \leq k \| u \|_{L^\infty}^{k-1} \| u_x \|_{L^\infty} \| u_x f \|_{L^p}^p +$$

$$C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + \| F_1(u) f \|_{L^p} \| u_x f \|_{L^p}^{p-1} + \| u_x f \|_{L^p}^{p-1}(\| F_1(u) f \|_{L^p} + \| F_2(u) f \|_{L^p}) \leq$$

$$kM^k \| u_x f \|_{L^p}^p + C_6 M^k \| u_x f \|_{L^p}^p + C_7 M^k \| u_x f \|_{L^p}^{p-1}(\| uf \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}).$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x f \|_{L^p} \leq C_8 M^k(\| uf \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}). \tag{18}$$

由(13)和(18)式，可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| uf \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}) \leq CM^k(\| uf \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}),$$

其中，C 和 M 不依赖于 p.由 Gronwall 不等式可知，对任意的 $t \in [0, T]$，有

$$\| uf \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p} \leq (\| u_0 f \|_{L^p} + \| (\partial_x u_0) f \|_{L^p})\mathrm{e}^{CM^k t},$$

其中，$C > 0$ 依赖于 k，v 和 ϕ.注意到对于 a.e. $x \in \mathbf{R}$，当 $N \to \infty$ 时，$f(x) = f_N(x) \to \phi(x)$. 由(3)式可得

$$\| u\phi \|_{L^p} + \| u_x \phi \|_{L^p} \leq (\| u_0 \phi \|_{L^p} + \| (\partial_x u_0)\phi \|_{L^p})\mathrm{e}^{CM^k t}. \tag{19}$$

下面证明 $p = \infty$的情形.注意到 $u_0, \partial_x u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ 且 $f = f_N \in L^\infty(\mathbf{R})$.所以，对于任意的 $2 \leq q < \infty$，有

$$\| uf \|_{L^q} + \| u_x f \|_{L^q} \leq (\| u_0 f \|_{L^q} + \| (\partial_x u_0) f \|_{L^q})\mathrm{e}^{CM^k t},$$

其中，C 和 M 不依赖于 q.令 $q \to \infty$，有

$$\| uf \|_{L^\infty} + \| u_x f \|_{L^\infty} \leq (\| u_0 f \|_{L^\infty} + \| (\partial_x u_0) f \|_{L^\infty})\mathrm{e}^{CM^k t}.$$

令 $N \to \infty$，则 $p = \infty$时，估计式(19)成立.这就完成了定理 1 的证明.

3　定理 2 的证明

$\phi^{\frac{1}{k+1}}$ 是 $v^{\frac{1}{k+1}}$- 适中的权函数，满足 $\mid (\phi^{\frac{1}{k+1}})' \mid \leq \frac{A}{k+1}\phi^{\frac{1}{k+1}}$.此外，$\inf\limits_{\mathbf{R}} v^{\frac{1}{k+1}} > 0$.由条件 $v\mathrm{e}^{-|x|} \in L^p(\mathbf{R})$，$v^{\frac{1}{k+1}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{k+1}} \in L^{(k+1)p}(\mathbf{R})$ 和 Hölder 不等式，可知 $v^{\frac{1}{k+1}}\mathrm{e}^{-|x|} \in L^1(\mathbf{R})$，那么该权函数满足定理 1 中的条件.关于权函数 $\phi^{\frac{1}{k+1}}$，在定理 1 中令 $p = k+1$，可以得到

$$\| u\phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}} + \| u_x \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}} \leq (\| u_0 \phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}} + \| (\partial_x u_0)\phi^{\frac{1}{k+1}} \|_{L^{k+1}})\mathrm{e}^{CM^k t}.$$

当 $p < \infty$时，在证明定理 1 的过程中，有下面的不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| uf \|_{L^p} \leq M^k \| uf \|_{L^p} + \| f(\partial_x G * F_1(u)) \|_{L^p} + \| f(G * F_2(u)) \|_{L^p}, \tag{20}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x f \|_{L^p} \leq C_9 M^k(\| uf \|_{L^p} + \| u_x f \|_{L^p}) + \| f(\partial_x G * F_2(u)) \|_{L^p} + \| f(G * F_1(u)) \|_{L^p}. \tag{21}$$

由命题 1 和条件 $v\mathrm{e}^{-|x|} \in L^p(\mathbf{R})$，可得

$$\| f(\partial_x G * F_1(u)) \|_{L^p} \leq C_{10} \| \mathrm{e}^{-|x|} v \|_{L^p} \| f(\frac{2k-1}{2}u^{k-1}u_x^2 + u^{k+1}) \|_{L^1} \leq C_{11}(\| fu^{k-1}u_x^2 \|_{L^1} +$$

$$\| f^{\frac{1}{k+1}} u \|_{L^{k+1}}^{k+1}) \leq C_{11}(\| f^{\frac{k-1}{k+1}} u^{k-1} \|_{L^{\frac{k+1}{k-1}}} \| f^{\frac{2}{k+1}} u_x^2 \|_{L^{\frac{k+1}{2}}} + \| f^{\frac{1}{k+1}} u \|_{L^{k+1}}^{k+1}) \leq$$

$$C_{11}(\| f^{\frac{1}{k+1}}u\|_{L^{k+1}}^{k-1}\| f^{\frac{1}{k+1}}u_x\|_{L^{k+1}}^{2}+\| f^{\frac{1}{k+1}}u\|_{L^{k+1}}^{k+1})\leq C_{12}\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t},\tag{22}$$

其中 C_{12} 不依赖于 $p<\infty$ 和 N.

类似地,可以得到如下估计:

$$\| f(G*F_2(u))\|_{L^p}\leq C_{13}\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t},\tag{23}$$

$$\| f(G*F_1(u))\|_{L^p}\leq C_{14}\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t},\tag{24}$$

$$\| f(\partial_x G*F_2(u))\|_{L^p}\leq C_{15}\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t}.\tag{25}$$

由(20)、(22)和(23)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| uf\|_{L^p}\leq M^k\| uf\|_{L^p}+C_{16}\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t}.\tag{26}$$

将(24)、(25)式代入(21)式,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_x f\|_{L^p}\leq C_9 M^k(\| uf\|_{L^p}+\| u_x f\|_{L^p})+C_{17}\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t}.\tag{27}$$

最后,由(26)和(27)式,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| uf\|_{L^p}+\| u_x f\|_{L^p})\leq C_{18}M^k(\| uf\|_{L^p}+\| u_x f\|_{L^p})+C_{19}\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t}.$$

应用 Gronwall 不等式,得到

$$\| uf\|_{L^p}+\| u_x f\|_{L^p}\leq \mathrm{e}^{C_{18}M^k t}[(\| u_0 f\|_{L^p}+\|(\partial_x u_0)f\|_{L^p})+C_{19}t\,\mathrm{e}^{(k+1)CM^k t}],$$

其中,C_{18} 和 C_{19} 不依赖于 $p<\infty$ 和 N.

令 $N\to\infty$,可以得到 $2\leq p<\infty$ 时的结果.与定理 1 的讨论一样,令 $q\to\infty$,$N\to\infty$,可以得到 $p=\infty$ 时的结果. 由此就完成了定理 2 的证明.

4 定理 3 的证明

在定理 3 的假设条件下,不等式(5)是成立的.事实上,因为 $u_0\phi$,$(\partial_x u_0)\phi\in L^\infty(\mathbf{R})$,并且 ϕ 是容许权函数,所以定理 1 成立,当 $p=\infty$ 时,有

$$\| u(t)\phi\|_{L^\infty}+\|(\partial_x u(t))\phi\|_{L^\infty}<\infty,\forall t\in[0,T].$$

因此,对于 $t\in[0,T]$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\phi(x)(|u(x,t)|+|\partial_x u(x,t)|)<\infty\tag{28}$$

是一致成立的.对(8)的第一个式子进行积分,可得

$$u(x,t)=u_0(x)-\int_0^t u^k u_x(x,s)\mathrm{d}s-\int_0^t\partial_x G*F_1(u)(x,s)\mathrm{d}s-\int_0^t G*F_2(u)(x,s)\mathrm{d}s.\tag{29}$$

在(28)式中,取 $\phi(x)=\mathrm{e}^{\frac{|x|}{k+1}}$,可得 $|u(x,t)|+|\partial_x u(x,t)|\leq C_{20}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{k+1}}$. 除此以外,可得

$$\left|\int_0^t u^k u_x\mathrm{d}s\right|\leq C_{20}^{k+1}\mathrm{e}^{-|x|}t\to 0,\ |x|\to+\infty.\tag{30}$$

在 $0<t\leq T$ 上,令

$$\Phi^{\pm}(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\pm y}h_1(y,t)\mathrm{d}y,h_1(y,t)=\frac{1}{t}\int_0^t F_1(u)(y,s)\mathrm{d}s,$$

和

$$\Psi^{\pm}(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\pm y}h_2(y,t)\mathrm{d}y,h_2(y,t)=\frac{1}{t}\int_0^t F_2(u)(y,s)\mathrm{d}s.$$

由 $F_1(u)=\dfrac{2k-1}{2}u^{k-1}u_x^2+u^{k+1}$ 和(28)式,可以得到

$$\mathrm{e}^{|y|}|F_1(u)|\leq k[\mathrm{e}^{\frac{|y|}{k+1}}(|u|+|u_x|)]^{k+1}=k[\mathrm{e}^{\frac{|y|}{k+1}}(1+|y|)(\ln(\mathrm{e}+|y|))^d(|u|+|u_x|)]^{k+1}(1+|y|)^{-(k+1)}(\ln(\mathrm{e}+|y|))^{-(k+1)d}\leq B(1+|y|)^{-(k+1)}(\ln(\mathrm{e}+|y|))^{-(k+1)d},$$

其中，

$$B=k\left[\sup_{y\in\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\frac{|y|}{k+1}}(1+|y|)(\ln(\mathrm{e}+|y|))^{d}(|u|+|u_x|)\right]^{k+1}<\infty.$$

因此，对于任意的 $t\in[0,T]$，有

$$\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{|y|}\,|F_1(u)|\,\mathrm{d}y<\infty. \tag{31}$$

类似地，对于任意的 $t\in[0,T]$，有

$$\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{|y|}\,|F_2(u)|\,\mathrm{d}y<\infty. \tag{32}$$

所以 $\Phi^{\pm}(t)$ 和 $\Psi^{\pm}(t)$ 的定义是合理的.另外，由解的连续性可知，当 $t\to 0^+$ 时，有 $h_1(t)\to F_1(u_0)$，$h_2(t)\to F_2(u_0)$.所以可以扩充 $\Phi^{\pm}(t)$ 和 $\Psi^{\pm}(t)$ 在 $t=0$ 处的定义，令 $\Phi^{\pm}(0)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\pm y}F_1(u_0)\mathrm{d}y$，$\Psi^{\pm}(0)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\pm y}F_2(u_0)\mathrm{d}y$.

由 $G(x-y)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-y|}$ 和 $\partial_x G(x-y)=-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x-y)\mathrm{e}^{-|x-y|}$，可得

$$\begin{aligned}
-\int_0^t\partial_x G*F_1(u)(x,s)\mathrm{d}s&=\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}s\int_{\mathbf{R}}\mathrm{sgn}(x-y)\mathrm{e}^{-|x-y|}F_1(u)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-x+y}F_1(u)\mathrm{d}y-\\
&\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}s\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{x-y}F_1(u)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}s\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-x+y}F_1(u)\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}s\int_x^{+\infty}(\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^{-x+y})F_1(u)\mathrm{d}y=\\
&\mathrm{e}^{-x}t\left[\Phi^{+}(t)-\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{2x-y})h_1(y,t)\mathrm{d}y\right].
\end{aligned} \tag{33}$$

由(31)式可知，当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_x^{+\infty}(\mathrm{e}^{y}+e^{2x-y})h_1(y,t)\mathrm{d}y\right|\leq 2\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{y}\,|h_1(y,t)|\,\mathrm{d}y=2\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{y}\left|\frac{1}{t}\int_0^t F_1(u)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}y\leq\\
&\frac{2}{t}\int_0^t\mathrm{d}s\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{y}\,|F_1(u)|\,\mathrm{d}y\to 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

另一方面，

$$-\int_0^t G*F_2(u)(x,s)\mathrm{d}s=-\mathrm{e}^{-x}t\left[\Psi^{+}(t)-\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{2x-y})h_2(y,t)\mathrm{d}y\right], \tag{35}$$

由(32)式可知，当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\left|\int_x^{+\infty}(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{2x-y})h_2(y,t)\mathrm{d}y\right|\leq\frac{2}{t}\int_0^t\mathrm{d}s\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{y}\,|F_2(u)|\,\mathrm{d}y\to 0. \tag{36}$$

结合(29)、(30)和(33)～(36)式，证明了(6)式中的第一个渐近性质.

用同样的方法，可以得到

$$-\int_0^t\partial_x G*F_1(u)(x,s)\mathrm{d}s=-\mathrm{e}^{x}t\left[\Phi^{-}(t)-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}(\mathrm{e}^{-2x+y}+\mathrm{e}^{-y})h_1(y,t)\mathrm{d}y\right],$$

$$-\int_0^t G*F_2(u)(x,s)\mathrm{d}s=-\mathrm{e}^{x}t\left[\Psi^{-}(t)-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-2x+y})h_2(y,t)\mathrm{d}y\right],$$

并且当 $x\to-\infty$ 时，

$$\left|\int_{-\infty}^{x}(\mathrm{e}^{-2x+y}+\mathrm{e}^{-y})h_1(y,t)\mathrm{d}y\right|\leq\frac{2}{t}\int_0^t\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-y}\,|F_1(u)|\,\mathrm{d}y\to 0,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{x}(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-2x+y})h_2(y,t)\mathrm{d}y\right|\leq\frac{2}{t}\int_0^t\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-y}\,|F_2(u)|\,\mathrm{d}y\to 0.$$

这就完成了(6)式中的第二个渐近性质.由此就完成了定理 3 的证明.

参 考 文 献

[1] FUCHESSTEINER B，FOKAS A S.Sympletic structures，their Bäcklund transformations and herechitary symmetries[J].Physica D，

1981,4(1):47-66.

[2] CAMASSA R,HOLM D D.An integrable shallow water equation with peaked solitons[J].Phys Rev Lett,1993,71(11):1661-1664.

[3] CONSTANTIN A.On the Cauchy problem for the periodic Camassa-Holm equation[J].J Diff Eqns,1997,141(2):218-235.

[4] CONSTANTIN A,ESCHER J.Global existence and blow-up for a shallow water equation[J].Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci,1998,26(4):303-328.

[5] CONSTANTIN A,ESCHER J.Well-posedness,global existence,and blow-up phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation[J].Commun Pure Appl Math,1998,51(5):475-504.

[6] LI Y A,OLVER P J.Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation[J].J Diff Eqns,2000,162(1):27-63.

[7] BYERS P.Existence time for the Camassa-Holm equation and the critical Sobolev index[J].Indiana Univ Math J,2006:941-954.

[8] WU S Y,YIN Z Y.Blow up,blow up rate and decay of the solution of the weakly dissipative Camassa-Holm equation[J].J Math Phys,2006,47(1):013504.

[9] WU S Y,YIN Z Y.Global existence and blow up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation[J].J Diff Eqns,2009,246(11):4309-4321.

[10] BRANDOLESE L.Breakdown for the Camassa-Holm equation using decay criteria and persistence in weighted spaces[J].Int Math Res Notices,2012,2012(22):5161-5181.

[11] WU Y,ZHAO P.A Note on the generalized Camassa-Holm equation[J].J Funct Space,2014,2014:1-12.

[12] ZHAO Y Y,LI Y S,YAN W.Local well-posedness and persistence properties for the generalized Novikov equation[J].Discr Contin Dyn Syst Ser A,2014,34(2):803-820.

[13] ZHAO Y Y,LI Y S,YAN W.The global weak solutions to the Cauchy problem of the generalized Novikov equation[J].Appl Anal,2015,94(7):1334-1354.

[14] WEI L,ZENG Q.Persistent Decay of Solutions to the k-abc Equation in Weighted L^p Spaces[J].J Dyn Diff Eqns, 2020,32(1):219-232.

Persistence properties for a generalized Camassa-Holm equation in weighted spaces

Li Yongsheng[1], Guo Huijing[1], Zhao Yongye[2], Yang Meiling[3]

(1. School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2. Department of Basic Courses, Guangzhou Maritime University, Guangzhou 510725, China; 3. School of Computer Science and Technology, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China)

Abstract: In this paper, we study the generalized Camassa-Holm equation with $(k+1)$-degree nonlinearities. By use of moderate weight functions, we prove some persistence results for the solution to the equation in weighted L^p spaces. We also establish the asymptotic profiles of the solution as $x\to+\infty$ and $x\to-\infty$.

Keywords: generalized Camassa-Holm equations; persistence properties; weighted spaces

[责任编校　陈留院　赵晓华]