

# 一类媒体报道下具有非线性隔离率的 SEIQR 传染病模型

侯雯珊,张太雷,方舒

(长安大学 理学院,西安 710064)

**摘要:**建立了一类媒体报道下具有非线性隔离率的 SEIQR 传染病模型.给出了模型的基本再生数,证明了无病平衡点和地方病平衡点的存在性和稳定性.最后,对模型进行数值模拟,模拟结果表明:媒体报道下隔离率的增大会使得感染者的数量减少,媒体报道有利于控制传染病的暴发,减轻疫情.

**关键词:**媒体报道;非线性隔离率;SEIQR 传染病模;稳定性

**中图分类号:**O175

**文献标志码:**A

2002 年 11 月中旬 SARS 在广东顺德暴发,相关部门因为对 SARS 病毒缺乏了解,所以未能及时公开疾病信息,导致疫情快速发展,累计病例数随时间呈现“S”型增长趋势.2003 年 4 月中旬,在政府及相关部门的引导下,媒体开始对疾病信息进行真实、广泛的报道,政府对疫情区的隔离管控力度也随之不断加大,开始全民公开防治,直到 7 月初全球疫情基本结束.在当今的信息化时代,媒体对各类传染病信息的报道越来越及时、准确、广泛,政府及相关部门了解到此类传染病信息后会不断加大检测力度,并及时对感染者进行隔离治疗,得知此类传染病信息的人们也会减少与他人的接触,因此媒体报道下人们行为的改变极大控制了传染病的扩散,而如何将媒体报道的影响更加真实准确地反映到传染病模型中去就成为许多专家学者所讨论的问题.

隔离是传染病防控的重要措施之一,文献[1-3]研究了带有隔离项的传染病模型的动力学行为,其研究结果也都验证了这一结论.如今,媒体报道显然也成了一种非常可行的传染病防控措施.2007 年,文献[4]建立了一类具有媒体报道和心理反应影响的 EHI 模型,研究结果表明媒体对住院人数的报道对疾病的传播规模有很大的影响,但媒体报道并不是决定疾病是否暴发的内在因素.2008 年,文献[5]在文献[4]的基础上提出了媒体报道下具有 Logistic 增长的传染病模型,用  $\beta(I) = \mu e^{-mI}$  作为有效接触率, $m$  为媒体报道对有效接触率的影响参数.研究结果表明  $m$  的值越大,疾病传播过程中感染者的数量越少.此后,很多专家学者也都意识到媒体报道会对传染病的防控产生积极作用.文献[6]研究了媒体报道影响下的传染病模型,模型采用  $\beta_i(I) = a_i - b_i m_i(I)$  作为有效接触率.研究结果表明媒体报道下人类行为的改变,可减轻疫情、降低疾病传播

速度.文献[7]用非光滑函数  $f(I) = \begin{cases} e^{-mI}, & 0 < I \leq I_c \\ e^{-mI_c}, & I > I_c \end{cases}$  来描述媒体影响因子  $m$  的饱和性,反映媒体报道对有效

接触率的影响,其研究结果显示媒体影响的饱和效应是不可忽视的,否则媒体对有效接触率的影响会被过高估计.文献[8]将媒体报道的传染病信息量用  $M$  表示,考虑了用  $\beta e^{-\alpha M}$  ( $\alpha$  决定疾病相关信息对有效接触率的影响程度)作为有效接触率的 SEIS 传染病模型,研究结果表明媒体报道是控制传染病发生和传播的重要举措.文献[9]同样建立了一类媒体报道下用  $M$  表示传染病信息量的传染病模型,模型的有效接触率为  $f(I, M, \alpha_1, \alpha_2)\beta$ ,其中  $f(I, M, \alpha_1, \alpha_2)$  是关于感染者数量和媒体报道量单调递减的饱和和非线性函数, $I$  为感

收稿日期:2020-01-20;修回日期:2020-06-15.

基金项目:国家自然科学基金(11701041);陕西省自然科学基金(2018JM1011).

作者简介:侯雯珊(1995-),女,陕西西安人,长安大学硕士研究生,研究方向为常微分方程理论及其应用,E-mail:hwenshan0319@126.com.

通信作者:张太雷(1980-),男,长安大学教授,博士,研究方向为常微分方程理论及其应用,E-mail:t.l.zhang@126.com.

染者的数量,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别是媒体报道的影响力受感染者数量和媒体报道量影响的权重, 研究结果表明媒体报道下感染者的数量会减少, 但如果在疾病流行的早期阶段迅速提高媒体报道强度, 并保持最大水平直到感染者数量明显减少, 然后逐渐减弱媒体报道强度, 感染者的数量会进一步减少. 文献[10]提出了一类媒体报道下的非光滑传染病模型, 其研究结果表明媒体报道无法消除疾病, 但会延迟疾病的暴发并减少暴发时期感染者的数量. 由此可见虽然媒体报道的影响有限, 但其在传染病的防控中起着至关重要的作用.

本文在以上模型的基础上考虑媒体报道对传染病隔离率的影响, 结合媒体信息难以量化等特点和媒体报道相对真实的特性, 在文献[11]的基础上, 采用了一般光滑函数  $\beta(I) = \beta - \beta_1 f(I)$  作为有效接触率,  $\epsilon(I) = \epsilon + \epsilon_1 g(I)$  作为隔离率, 建立一类媒体报道下具有非线性隔离率的 SEIQR 传染病模型.

## 1 模型建立

将某一区域内  $t$  时刻的总人口数  $N(t)$  分成易感者  $S(t)$ 、潜伏者  $E(t)$ 、感染者  $I(t)$ 、隔离者  $Q(t)$  和恢复者  $R(t)$ , 即  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ . 取  $\beta(I) = \beta - \beta_1 f(I)$  表示媒体报道下易感者与感染者的有效接触率, 由于潜伏者在潜伏期没有明显的病症, 所以其有效接触率不受媒体报道影响. 用  $\epsilon(I) = \epsilon + \epsilon_1 g(I)$  表示媒体报道下的隔离率, 建立如下传染病模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - [\beta - \beta_1 f(I)]SI - \beta_2 SE - \eta S, \\ \frac{dE}{dt} = [\beta - \beta_1 f(I)]SI + \beta_2 SE - \alpha E - \eta E, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - [\epsilon + \epsilon_1 g(I)]I - r_1 I - \mu_1 I - \eta I, \\ \frac{dQ}{dt} = [\epsilon + \epsilon_1 g(I)]I - r_2 Q - \mu_2 Q - \eta Q, \\ \frac{dR}{dt} = r_1 I + r_2 Q - \eta R. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Lambda$  表示人口的常数输入率,  $\eta$  表示自然死亡率,  $\alpha$  表示潜伏者转化为感染者的比率;  $\beta$  表示易感者与感染者的最大有效接触率,  $\beta_1$  表示媒体报道对疾病传播的最大削减作用, 媒体报道的作用有限性蕴含  $\beta > \beta_1$ ,  $\beta_2$  表示易感者与潜伏者的有效接触率;  $\epsilon$  表示基本的隔离率,  $\epsilon_1$  表示媒体影响下隔离强度的最大增强作用;  $r_1$  和  $r_2$  分别表示感染者和隔离者的恢复率;  $\mu_1$  和  $\mu_2$  分别表示感染者和隔离者的因病死亡率. 函数  $f(I)$  和  $g(I)$  分别为媒体报道下影响传染率和隔离率的饱和函数. 假设媒体报道对疫情的控制具有正面影响, 当没有感染者出现时, 媒体报道基本不影响人们的行为, 故  $f(0) = 0, g(0) = 0$ . 当感染者出现时, 媒体报道的感染者数量越多, 人们的危机意识越强, 易感者与感染者接触的机会越少, 感染者被隔离的可能性越大, 因此  $f'(I) \geq 0, g'(I) \geq 0$ . 因为媒体报道的影响能力有限, 故用  $\lim_{I \rightarrow \infty} f(I) = 1, \lim_{I \rightarrow \infty} g(I) = 1$  表示. 疾病的发病率是

关于  $I$  的严格单调递增函数, 故  $\frac{\partial \{[\beta - \beta_1 f(I)]SI\}}{\partial I} > 0$ . 所以  $f(I)$  和  $g(I)$  满足条件:

$$1) f(0) = 0, g(0) = 0;$$

$$2) f'(I) \geq 0, g'(I) \geq 0;$$

$$3) \lim_{I \rightarrow \infty} f(I) = 1, \lim_{I \rightarrow \infty} g(I) = 1;$$

$$4) [\beta - \beta_1 f(I)]SI \text{ 为模型(1)的发病率, } \frac{\partial \{[\beta - \beta_1 f(I)]SI\}}{\partial I} > 0.$$

将模型(1)的 5 个方程相加得  $\frac{dN}{dt} = \Lambda - \eta N - \mu_1 I - \mu_2 Q \leq \Lambda - \eta N$ , 则模型(1)的最大不变集  $\Omega$  为

$$\Omega = \{(S, E, I, Q, R) \in \mathbf{R}_+^5, | S + E + I + Q + R \leq \frac{\Lambda}{\eta}\}. \text{ 接下来将在 } \Omega \text{ 中讨论模型(1)的解的性态.}$$

## 2 平衡点的存在性

模型(1)存在疾病消亡的无病平衡点  $P^0(S^0, 0, 0, 0, 0)$ , 其中  $S^0 = \frac{\Lambda}{\eta}$ . 根据文献[12]中再生矩阵方法, 得

模型(1)的基本再生数  $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\Lambda\alpha + \beta_2\Lambda(\epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta)}{\eta(\alpha + \eta)(\epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta)}$ . 关于模型平衡点的存在性, 有如下结论.

**定理 1** 当  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  时, 模型(1)仅存在无病平衡点  $P^0 = \left(\frac{\Lambda}{\eta}, 0, 0, 0, 0\right)$ ; 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 模型(1)除无病平衡点  $P^0$  外, 还存在唯一的地方病平衡点  $P^* = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ .

**证明** 显然模型(1)总存在疾病消亡的无病平衡点  $P^0$ . 下证当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 模型(1)还存在唯一的地方病平衡点  $P^*$ . 令模型(1)的右端等于 0, 地方病平衡点  $P^*$  若存在, 则满足代数方程组

$$\begin{cases} \Lambda - [\beta - \beta_1 f(I)]SI - \beta_2 SE - \eta S = 0, \\ [\beta - \beta_1 f(I)]SI + \beta_2 SE - \alpha E - \eta E = 0, \\ \alpha E - [\epsilon + \epsilon_1 g(I)]I - r_1 I - \mu_1 I - \eta I = 0, \\ [\epsilon + \epsilon_1 g(I)]I - r_2 Q - \mu_2 Q - \eta Q = 0, \\ r_1 I + r_2 Q - \eta R = 0. \end{cases} \quad (2)$$

方程组(2)的前两个方程相加可得

$$S = \frac{\Lambda}{\eta} - \frac{(\alpha + \eta)E}{\eta}. \quad (3)$$

由方程组(2)的第 2 个方程得

$$S = \frac{(\alpha + \eta)E}{[\beta - \beta_1 f(I)]I + \beta_2 E}. \quad (4)$$

再由方程组(2)的第 3 个方程得

$$E = \frac{[\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]I}{\alpha}. \quad (5)$$

将(5)式分别代入(3)式和(4)式得

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Lambda}{\eta} - \frac{(\alpha + \eta)[\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]}{\eta\alpha} I \triangleq \psi(I), \\ S &= \frac{(\alpha + \eta)[\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]}{\alpha[\beta - \beta_1 f(I)] + \beta_2[\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]} \triangleq \varphi(I). \end{aligned}$$

令  $G(I) = \psi(I) - \varphi(I)$ , 显然  $\psi(I)$  为严格单调递减函数. 令  $\varphi(I) = \frac{\alpha + \eta}{h(I)}$ , 其中  $h(I) =$

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha[\beta - \beta_1 f(I)]}{\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta} + \beta_2, \text{ 对 } h(I) \text{ 求导可得} \\ h'(I) &= \frac{-\alpha\beta_1 f'(I)[\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta] - \epsilon_1 g'(I)\alpha[\beta - \beta_1 f(I)]}{[\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]^2} \leq 0, \end{aligned}$$

所以  $\varphi(I)$  为单调递增函数, 从而  $G(I)$  为严格单调递减函数.

$$\text{当 } \mathcal{R}_0 > 1 \text{ 时, } G(0) = \psi(0) - \varphi(0) = \frac{\Lambda}{\eta} - \frac{(\alpha + \eta)(\epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta)}{\alpha\beta + \beta_2(\epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta)} > 0,$$

且  $\psi\left(\frac{\Lambda}{\eta}\right) = \frac{\Lambda}{\eta} \left(1 - \frac{\eta\alpha + \alpha[\epsilon_1 g\left(\frac{\Lambda}{\eta}\right) + \epsilon + r_1 + \mu_1] + \eta[\epsilon_1 g\left(\frac{\Lambda}{\eta}\right) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]}{\eta\alpha}\right) < 0, \varphi\left(\frac{\Lambda}{\eta}\right) > 0$ , 于

是  $G\left(\frac{\Lambda}{\eta}\right) = \psi\left(\frac{\Lambda}{\eta}\right) - \varphi\left(\frac{\Lambda}{\eta}\right) < 0$ . 显然, 存在唯一的  $I^* \in \left(0, \frac{\Lambda}{\eta}\right)$  使得  $G(I^*) = 0$  将  $I^*$  带入到方程组(2)解得

$$S^* = \frac{\alpha\Lambda}{\alpha[\beta - \beta_1 f(I^*)]I^* + \beta_2[\varepsilon_1 g(I^*) + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]I^* + \alpha\eta}, E^* = \frac{[\varepsilon_1 g(I^*) + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]I^*}{\alpha},$$

$$Q^* = \frac{[\varepsilon + \varepsilon_1 g(I^*)]I^*}{r_2 + \mu_2 + \eta}, R^* = \frac{r_1}{\eta}I^* + \frac{r_2[\varepsilon + \varepsilon_1 g(I^*)]I^*}{\eta(r_2 + \mu_2 + \eta)}.$$

因此当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时,模型(1)除无病平衡点  $P^0$  外,还存在唯一的地方病平衡点  $P^* = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ .从而,模型(1)无病平衡点和地方性平衡点的存在性得证.

### 3 无病平衡点的稳定性和吸引性

本节将讨论无病平衡点的稳定性和吸引性.

**定理 2** 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,无病平衡点  $P^0$  局部渐近稳定;当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, $P^0$  不稳定.

**证明** 模型(1)在  $P^0 = \left(\frac{\Lambda}{\eta}, 0, 0, 0, 0\right)$  处的雅可比矩阵为

$$J_{P^0} = \begin{bmatrix} -\eta & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\eta} & -\beta \frac{\Lambda}{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \frac{\Lambda}{\eta} - (\alpha + \eta) & \beta \frac{\Lambda}{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -(\varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(r_2 + \mu_2 + \eta) & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & r_2 & -\eta \end{bmatrix},$$

$J_{P^0}$  有 5 个特征根,  $\lambda_1 = -\eta, \lambda_2 = -\eta, \lambda_3 = -(r_2 + \mu_2 + \eta)$ , 且  $\lambda_4$  和  $\lambda_5$  满足方程:  $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ , 其中:

$$b_1 = \alpha + \eta + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta - \beta_2 \frac{\Lambda}{\eta},$$

$$b_2 = \left(\alpha + \eta - \beta_2 \frac{\Lambda}{\eta}\right)(\varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta) - \frac{\beta\Lambda\alpha}{\eta}.$$

当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,  $\lambda_4 + \lambda_5 = \beta_2 \frac{\Lambda}{\eta} - (\alpha + \eta + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta) < 0, \lambda_4 \cdot \lambda_5 = \left(\alpha + \eta - \beta_2 \frac{\Lambda}{\eta}\right)(\varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta) - \frac{\beta\Lambda\alpha}{\eta} > 0$ . 由此可得当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,  $J_{P^0}$  的 5 个特征根均具有负实部, 则  $P^0$  局部渐近稳定. 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时,  $\lambda_4 \cdot \lambda_5 < 0, \lambda_4$  和  $\lambda_5$  中有一个为正根, 则  $P^0$  不稳定.

**定理 3** 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,  $P^0$  全局渐近稳定; 当  $\mathcal{R}_0 = 1$  时,  $P^0$  全局吸引.

**证明** 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 定义 Liapunov 函数  $V(t) = \frac{\alpha + \eta}{\alpha}I(t) + E(t)$ , 求  $V(t)$  关于  $t$  的导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= [\beta - \beta_1 f(I)]SI + \beta_2 SE - \frac{\alpha + \eta}{\alpha}[\varepsilon_1 g(I) + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]I = \\ &I \left\{ [\beta - \beta_1 f(I)]S + \beta_2 S \frac{\varepsilon_1 g(I) + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta}{\alpha} - \frac{\alpha + \eta}{\alpha}[\varepsilon_1 g(I) + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta] \right\} \leq \\ &I \left\{ \frac{\beta\Lambda}{\eta} + \frac{\beta_2\Lambda[\varepsilon_1 g(I) + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]}{\eta\alpha} - \frac{(\alpha + \eta)[\varepsilon_1 g(I) + \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta]}{\alpha} \right\} \leq \\ &\frac{I}{\eta\alpha} \left\{ [\eta(\alpha + \eta)(\varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta) + \varepsilon_1 g(I)\eta(\alpha + \eta)](R_0 - 1) - \varepsilon_1 g(I) \frac{\beta\Lambda\alpha}{\varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta} \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

令  $M = \left\{ (S, E, I, Q, R) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \left\{ (S, E, I, Q, R) \mid I = 0 \right\}$ , 在  $M$  内当  $t \rightarrow \infty$  时,  $S \rightarrow \frac{\Lambda}{\eta}, E \rightarrow 0, Q \rightarrow 0, R \rightarrow 0$ , 所以  $\{P^0\}$  是  $M$  的最大  $\omega^-$  不变集. 由 LaSalle 不变集原理知,  $\Omega$  内的任何轨线都趋于  $P^0$ , 因此无病平

衡点  $P^0$  全局渐近稳定.

当  $\mathcal{R}_0=1$  时,有

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= [\beta - \beta_1 f(I)](S - S^0)I + \beta_2(S - S^0) \frac{\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta}{\alpha} I + [\beta - \beta_1 f(I)]S^0 I + \\ &\quad \beta_2 S^0 \frac{\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta}{\alpha} I - \frac{\alpha + \eta}{\alpha} [\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta] I \leq (S - S^0) \{ [\beta - \\ &\quad \beta_1 f(I)]I + \beta_2 \frac{\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta}{\alpha} I \} + \beta S^0 I + \beta_2 S^0 \frac{\epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta}{\alpha} I - \frac{\alpha + \eta}{\alpha} (\epsilon + r_1 + \\ &\quad \mu_1 + \eta) I + \frac{\beta_2 S^0 - (\alpha + \eta)}{\alpha} \epsilon_1 g(I) I \leq (S - S^0) \{ [\beta - \beta_1 f(I)]I + \beta_2 \frac{\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta}{\alpha} I \} + \\ &\quad \frac{(\alpha + \eta)(\epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta)}{\alpha} I (\mathcal{R}_0 - 1) = (S - S^0) I \left\{ [\beta - \beta_1 f(I)] + \beta_2 \frac{\epsilon_1 g(I) + \epsilon + r_1 + \mu_1 + \eta}{\alpha} \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

令  $M' = \left\{ (S, E, I, Q, R) \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \left\{ (S, E, I, Q, R) \mid S = S^0 \text{ 或 } I = 0 \right\}$ , 所以  $\{P^0\}$  是  $M'$  的最大  $\omega^-$  不变集, 由 LaSalle 不变集原理知, 无病平衡点  $P^0$  全局吸引.

根据定理 2 和定理 3 得, 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 无病平衡点  $P^0$  全局渐近稳定, 即随着时间的推移, 感染者的数量将趋于零, 疾病消亡; 当  $\mathcal{R}_0 = 1$  时, 无病平衡点  $P^0$  全局吸引; 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 无病平衡点  $P^0$  不稳定, 疾病将流行. 从而无病平衡点的稳定性和吸引性得证.

### 4 地方病平衡点的稳定性

接下来讨论地方病平衡点的全局稳定性, 由于模型(1)的前 3 个方程不含  $Q, R$ , 我们考虑如下子模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - [\beta - \beta_1 f(I)]SI - \beta_2 SE - \eta S, \\ \frac{dE}{dt} = [\beta - \beta_1 f(I)]SI + \beta_2 SE - \alpha E - \eta E, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - [\epsilon + \epsilon_1 g(I)]I - r_1 I - \mu_1 I - \eta I. \end{cases} \quad (6)$$

集合  $\Gamma = \left\{ (S, E, I) \in \mathbf{R}_+^3 \mid S + E + I \leq \frac{\Lambda}{\eta} \right\}$  是模型(6)的正向不变集, 易得模型(6)的无病平衡点为  $T^0 = \left( \frac{\Lambda}{\eta}, 0, 0 \right)$ . 由定理 2 的证明可知, 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 无病平衡点  $T^0$  全局渐近稳定, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时  $T^0$  不稳定. 由定理 1 的证明可知, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时模型(6)有唯一的地方病平衡点  $T^* = (S^*, E^*, I^*)$ .

为证明地方病平衡点  $T^*$  的全局稳定性引入以下引理.

**引理 1**<sup>[13]</sup> (Bendixson 判据) 设  $x \rightarrow P(x)$  是一个  $\left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right)$  矩阵函数, 且对  $x \in \Gamma$  是  $C^1$  的. 假设

$P^{-1}(x)$  存在且在  $x \in K$  上是连续的,  $K$  是一个紧的吸引集, 定义  $q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B(x(\nu, x_0))) d\nu$ ,

这里  $B = P_f P^{-1} + P \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} P^{-1}$ ,  $P_f$  是把矩阵  $P$  的每一个元素  $P_{ij}$ , 用  $P_{ij}$  沿  $f$  的方向导数  $\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial x} f = \frac{dP_{ij}}{dt} \Big|_{(6)}$  替

代得到的矩阵,  $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$  是  $f$  的雅可比矩阵  $\frac{\partial f}{\partial x}$  的第二加性复合矩阵,  $\mu(B)$  是矩阵  $B$  的 Lozinskil 测度

$$\mu(B) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hB\| - 1}{h}.$$

由文献[13], 当  $\Gamma$  是单连通时, 若  $q < 0$  则能排除系统(6)出现的任何闭轨, 包括周期轨道、同宿轨道和

异宿轨道.

**引理 2**<sup>[14]</sup> 若  $\Gamma$  是单连通区域且满足  $(H_1)$  存在一个紧吸引子集  $K \subset \Gamma$ ;  $(H_2)$  系统(6)有唯一的平衡点  $\bar{x} \subset \Gamma$ ; 则当  $q < 0$  时, 系统(6)的唯一平衡点  $\bar{x}$  在  $\Gamma$  内是全局渐近稳定的.

**定理 4** 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  且  $\frac{2\beta_2\Lambda}{\eta(\eta+\alpha)} < 1$  时, 地方病平衡点  $T^*$  在  $\Gamma$  内全局渐近稳定.

**证明** 根据文献[14]中的命题 3.3 可知模型(6)的一致持续性等价于无病平衡点  $T^0$  的不稳定性, 所以当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 模型(6)是一致持续的. 因此集合  $\Gamma$  内存在一个吸引子集  $K \subset \Gamma$ , 且  $T^* = (S^*, E^*, I^*)$  是  $\Gamma$  内唯一的地方病平衡点, 引理 2 中的条件  $(H_1)$  和  $(H_2)$  成立, 根据引理 1 和引理 2 知, 现只需证明  $q < 0$ .

计算模型(6)的雅可比矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -[\beta - \beta_1 f(I)]I - \beta_2 E - \eta & -\beta_2 S & \beta_1 f'(I)SI - [\beta - \beta_1 f(I)]S \\ [\beta - \beta_1 f(I)]I + \beta_2 E & \beta_2 - \alpha - \eta & -\beta_1 f'(I)SI + [\beta - \beta_1 f(I)]S \\ 0 & \alpha & -[\varepsilon_1 g'(I)I + \varepsilon_1 g(I) + \tau] \end{bmatrix},$$

其中  $\tau = \varepsilon + r_1 + \mu_1 + \eta$ ,  $\mathbf{J}$  的第二加性复合矩阵为

$$\mathbf{J}^{[2]} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & -\beta_1 f'(I)SI + [\beta - \beta_1 f(I)]S & -\beta_1 f'(I)SI + [\beta - \beta_1 f(I)]S \\ \alpha & \mathbf{Q}_2 & -\beta_2 S \\ 0 & [\beta - \beta_1 f(I)]I + \beta_2 E & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix},$$

其中:  $\mathbf{Q}_1 = -[\beta - \beta_1 f(I)]I - \beta_2 E - \eta + \beta_2 S - \alpha - \eta$ ,

$\mathbf{Q}_2 = -[\beta - \beta_1 f(I)]I - \beta_2 E - \eta - [\varepsilon_1 g'(I)I + \varepsilon_1 g(I) + \tau]$ ,

$\mathbf{Q}_3 = \beta_2 S - \alpha - \eta - [\varepsilon_1 g'(I)I + \varepsilon_1 g(I) + \tau]$ .

选取  $\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}(S, E, I) = \text{diag}\left(1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right)$ , 则  $\mathbf{P}_f \mathbf{P}^{-1} = \text{diag}\left(0, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right)$ .

矩阵  $\mathbf{B} = \mathbf{P}_f \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P} \mathbf{J}^{[2]} \mathbf{P}^{-1}$ , 矩阵  $\mathbf{B}$  可写成分块矩阵的形式  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ , 其中:

$$B_{11} = \mathbf{Q}_1,$$

$$B_{12} = \left[ \frac{I}{E} \{-\beta_1 f'(I)SI + [\beta - \beta_1 f(I)]S\} \quad \frac{I}{E} \{-\beta_1 f'(I)SI + [\beta - \beta_1 f(I)]S\} \right],$$

$$B_{21} = \left[ \alpha \frac{E}{I} \quad 0 \right]^T,$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + \mathbf{Q}_2 & -\beta_2 S \\ [\beta - \beta_1 f(I)]I + \beta_2 E & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} + \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix}.$$

令  $(x, y, z)$  代表  $\mathbf{R}^3$  中的向量, 定义其范数  $\|\cdot\|$  为  $\|(x, y, z)\| = \max\{|x|, |y| + |z|\}$ , 相应于范数  $\|\cdot\|$  的 Lozinskil 测度是  $\mu(\mathbf{B})$ , 且  $\mu(\mathbf{B}) < \sup\{g_1, g_2\}$ , 其中  $g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|$ ,  $g_2 = \mu_1(B_{22}) + |B_{21}|$ .

$|B_{12}|$ ,  $|B_{21}|$  相应于  $l_1$  向量范数的矩阵范数,  $\mu_1$  是相应于  $l_1$  范数的 Lozinskil 测度, 则

$$\mu_1(B_{11}) = -[\beta - \beta_1 f(I)]I - \beta_2 E - \eta + \beta_2 S - \alpha - \eta,$$

$$|B_{12}| = \frac{1}{E} \max\{|-\beta_1 f'(I)SI + [\beta - \beta_1 f(I)]S|, |-\beta_1 f'(I)SI + [\beta - \beta_1 f(I)]S|\},$$

$$\mu_1(B_{22}) = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \eta - [\varepsilon_1 g'(I)I + \varepsilon_1 g(I) + \tau] + \max\{0, 2\beta_2 S - \alpha\}, \quad |B_{21}| = \alpha \frac{E}{I}.$$

因为  $\frac{E'}{E} = [\beta - \beta_1 f(I)]S \frac{1}{E} + \beta_2 S - \alpha - \eta$ ,  $\frac{I'}{I} = \alpha \frac{E}{I} - \varepsilon_1 g(I) - \tau$ , 所以  $g_1 = \frac{E'}{E} - \eta - [\beta - \beta_1 f(I)]I - \beta_2 E - \frac{1}{E} \beta_1 f'(I)SI$ ,  $g_2 = \frac{E'}{E} + \max\{-\eta - \varepsilon_1 g'(I)I, -\eta - \varepsilon_1 g'(I)I + 2\beta_2 S - \alpha\}$ .

已知  $\mu(\mathbf{B}) \leq \sup\{g_1, g_2\}$ , 可得

$$\mu(\mathbf{B}) \leq \frac{E'}{E} + \max\left\{-\eta - [\beta - \beta_1 f(I)]i - \beta_2 E - \frac{1}{E}\beta_1 f'(I)SI, -\eta - \epsilon_1 g'(I)I, -\eta - \epsilon_1 g'(I)I + 2\beta_2 S - \alpha\right\} \leq \frac{E'}{E} + \max\left\{-\eta, -(\eta + \alpha - 2\beta_2 \frac{\Lambda}{\eta})\right\}.$$

令  $\xi = \max\left\{-\eta, -(\eta + \alpha - 2\beta_2 \frac{\Lambda}{\eta})\right\}$ ,  $\mu(\mathbf{B}) \leq \frac{E'}{E} + \xi$ . 故  $\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) dv = \frac{1}{t} \int_0^{t_1} \mu(B) dv + \frac{1}{t} \int_{t_1}^t \mu(B) dv \leq \frac{1}{t} \int_0^{t_1} \mu(B) dv + \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(t_1)} + \xi \frac{t - t_1}{t}$  即  $q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{K}} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) dv \leq \frac{\xi}{2} < 0$ .

因此, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  且  $\frac{2\beta_2 \Lambda}{\eta(\eta + \alpha)} < 1$  时, 模型(6) 的地方病平衡点  $T^*$  在  $\Gamma$  内全局渐近稳定.

**定理 5** 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  且  $\frac{2\beta_2 \Lambda}{\eta(\eta + \alpha)} < 1$  时, 模型(1) 的地方病平衡点  $P^*$  在  $\Omega$  内全局渐近稳定.

**证明** 由定理 4 可知当  $t \rightarrow \infty$  时,  $(S, E, I) \rightarrow (S^*, E^*, I^*)$ , 则模型(1) 的极限系统为

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = [\epsilon + \epsilon_1 g(I)]I^* - r_2 Q - \mu_2 Q - \eta Q, \\ \frac{dR}{dt} = r_1 I^* + r_2 Q - \eta R. \end{cases} \tag{9}$$

可求得

$$Q = e^{-(r_2 + \mu_2 + \eta)t} \left\{ [\epsilon + \epsilon_1 g(I^*)]I^* \int_0^t e^{(r_2 + \mu_2 + \eta)w} dw + Q(0) \right\},$$

$$R = e^{-\eta t} \left\{ (r_1 I^* + r_2 Q) \int_0^t e^{\eta w} dw + R(0) \right\}.$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$Q \rightarrow Q^* = \frac{[\epsilon + \epsilon_1 g(I^*)]I^*}{r_2 + \mu_2 + \eta},$$

$$R \rightarrow R^* = \frac{r_1 I^*}{\eta} + \frac{r_2 [\epsilon + \epsilon_1 g(I^*)]I^*}{\eta(r_2 + \mu_2 + \eta)}.$$

证得模型(1) 的地方病平衡点在所给条件下全局渐近稳定.

综上所述, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  且  $\frac{2\beta_2 \Lambda}{\eta(\eta + \alpha)} < 1$  时, 模型(1) 的地方病平衡点  $P^*$  在  $\Omega$  内全局渐近稳定, 即随着时间的推移, 疾病流行且病人会趋于  $I^*$ , 最终会成为一种地方病.

## 5 数值模拟

本节对模型(1) 进行数值模拟, 取函数  $f(I) = \frac{I}{k_1 + I}$ ,  $g(I) = \frac{I}{k_2 + I}$  ( $k_1$  为媒体报道下易感者对疾病信息认识的偏差程度,  $k_2$  为媒体报道下采取隔离措施的相关部门对疾病信息认识的偏差程度), 取初始值  $(S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0)) = (103, 67, 26, 3, 4)$ , 参数取值为  $\Lambda = 2, \beta = 0.001, \beta_1 = 0.0006, \beta_2 = 0.0001, \eta = 0.03, \alpha = 0.2, \epsilon = 0.05, \epsilon_1 = 0.8, r_1 = 0.02, \mu_1 = 0.0001, r_2 = 0.05, \mu_2 = 0.00001, k_1 = 0.1, k_2 = 0.2$ . 计算得  $\mathcal{R}_0 = 0.6081$ , 无病平衡点  $P^0 = (66.67, 0, 0, 0, 0)$ , 模型(1) 在点  $P^0$  处的全局渐近稳定性如图 1 所示.

保持初始值不变, 取参数为:  $\Lambda = 2, \beta = 0.0036, \beta_1 = 0.0006, \beta_2 = 0.0016, \eta = 0.03, \alpha = 0.2, \epsilon = 0.05,$

$\epsilon_1 = 0.8, r_1 = 0.02, \mu_1 = 0.001, r_2 = 0.05, \mu_2 = 0.0001, k_1 = 100, k_2 = 60$ . 计算得  $\mathcal{R}_0 = 2.5301, \frac{2\beta_2 \Lambda}{\eta(\eta + \alpha)} = 0.9275$ , 地方病平衡点  $P^* = (37.81, 3.76, 4.72, 6.39, 13.8)$ , 模型(1) 在点  $P^*$  处的全局渐近稳定性如图 2 所示.

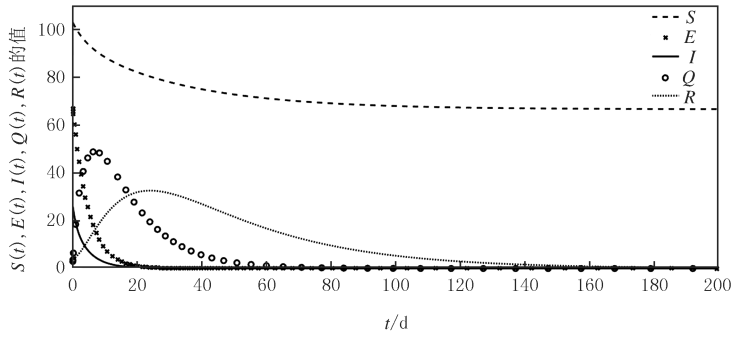


图1 无病平衡点 $P^0$ 的全局渐近稳定性

Fig.1 The disease-free equilibrium  $P^0$  is globally asymptotically stable

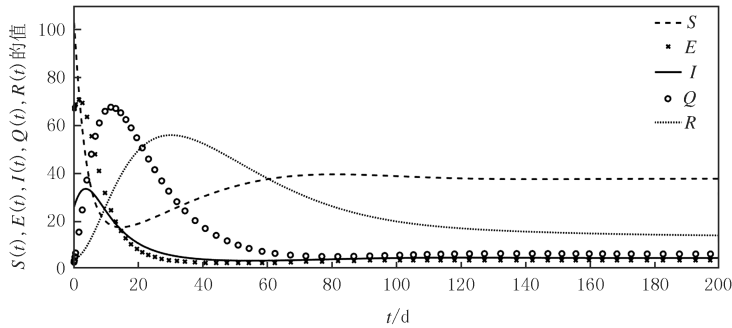


图2 地方病平衡点 $P^*$ 的全局渐近稳定性

Fig.2 The endemic equilibrium  $P^*$  is globally asymptotically stable

在上述其他参数不变的情况下,重新给出  $\beta_2 = 0.002$ , 计算得  $R_0 = 2.646 0$ ,  $\frac{2\beta_2 \Lambda}{\eta(\eta + \alpha)} = 1.159 4 > 1$ , 新的地方病平衡点  $P^{**} = (39.41, 3.55, 4.53, 5.99, 13.01)$ , 对模型(1)的数值模拟结果如图 3 所示.

结果表明地方病平衡点  $P^{**}$  全局渐近稳定, 所以  $\frac{2\beta_2 \Lambda}{\eta(\eta + \alpha)} < 1$  不是地方病平衡点全局渐近稳定的充要条件.

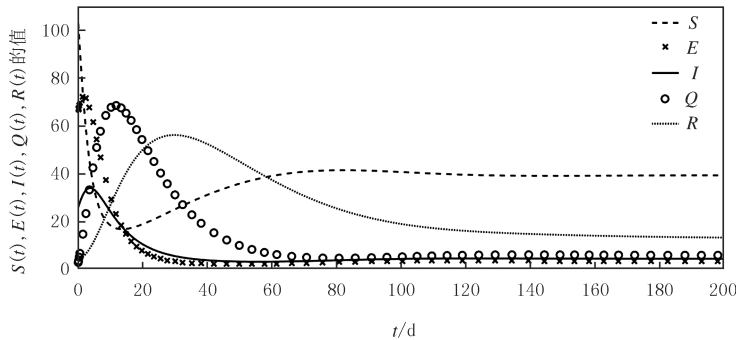


图3 新地方病平衡点 $P^{**}$ 的全局渐近稳定性

Fig.3 The new endemic equilibrium  $P^{**}$  is globally asymptotically stable

初始值不变,取参数  $\Lambda = 2, \beta = 0.003 6, \beta_1 = 0.000 6, \beta_2 = 0.001 6, \eta = 0.03, \alpha = 0.2, \varepsilon = 0.05, \varepsilon_1 = 0.8, r_1 = 0.02, \mu_1 = 0.001, r_2 = 0.05, \mu_2 = 0.000 1, k_1 = 100$ , 在这些参数不变的情况下,对参数  $k_2$  取不同的值.先取  $k_{21} = 0.001$ , 此时可认为有广泛的媒体报道, 采取隔离措施的相关部门对疾病信息十分了解.再取  $k_{22} = 60$ , 认为有少量媒体报道, 相关部门对疾病信息有了初步了解.最后取  $k_{23} = 9 000$ , 认为没有媒体报道, 相关部门对疾病信息完全不了解.不同取值下的值的变化如图 4 所示.

在图 4 中, 没有媒体报道影响隔离率时,  $I(t)$  值会在短时间内呈上升趋势, 即传染病在初期会有一定程



度的暴发,且地方病平衡点  $I^*$  的值较大.有媒体报道影响隔离率时, $I(t)$  值的上升趋势明显变弱, $I^*$  的值也相对较小,当媒体报道对隔离率的影响达到最大时,疾病几乎消亡.

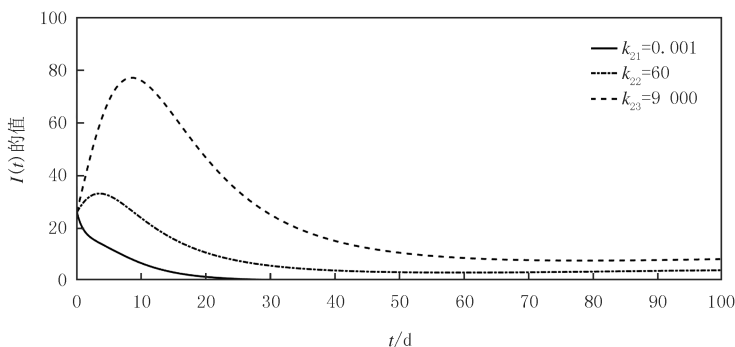


图4 不同程度媒体报道下 $I(t)$ 的值

Fig.4 The value of  $I(t)$  in different media coverage

## 6 结 论

隔离是控制传染病蔓延的有效措施,由于隔离率受媒体报道的影响无法忽视,本文用  $\epsilon(I) = \epsilon + \epsilon_1 g(I)$  作为隔离率,研究了一类媒体报道下具有非线性隔离率的传染病模型.通过研究模型各平衡点的存在性和稳定性,得到如下结论:当模型的基本再生数小于等于 1 时,疾病灭绝,当模型的基本再生数大于 1 时,疾病持续存在,地方病平衡点存在,在一定条件下,该地方病平衡点是全局渐近稳定的.同时,模型的数值模拟结果表明:1)当模型的基本再生数大于 1 时,使得地方病平衡点全局渐近稳定的条件并非充要条件;2)媒体报道对隔离率的影响增加时对疾病的传播所产生的控制作用增强.研究模型只在基本再生数大于 1 的情况下的动力学行为,以及媒体报道对传染病传播所产生的其他影响,这些都是以后要开展的工作.

## 参 考 文 献

- [1] 徐文雄,张太雷.具有隔离仓室流行病传播数学模型的全局稳定性[J].西安交通大学学报,2005,39(2):210-213.  
XU W X,ZHANG T L.Global stability for the model with quarantine in epidemiology[J].Journal of Xi'an Jiaotong University,2005,39(2):210-213.
- [2] 芦雪娟,张敬,董晓红.具有非线性传染率的 SEIQR 流行病模型的全局稳定性[J].生物数学学报,2012,27(1):136-144.  
LU X J,ZHANG J,DONG X H.Global stability for a non-linear incidence rate SEIQR model in epidemiology[J].Journal of Biomathematics,2012,27(1):136-144.
- [3] 陈中祥.一类潜伏期与传染期均传染的 SEIQR 传染病模型[J].数学理论与应用,2010,30(2):23-29.  
CHEN Z X.A kind of epidemical model with infectious force in the latent period and infected period[J].Mathematical Theory and Applications,2010,30(2):23-29.
- [4] LIU R,WU J,ZHU H.Media/Psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious diseases[J].Computational and Mathematical Methods in Medicine,2007,8(6):153-164.
- [5] CUI J,SUN Y,ZHU H.The impact of media on the control of infectious diseases[J].Journal of Dynamics and Differential Equations,2008,20:31-53.
- [6] WANG X,GAO D,WANG J.Influence of human behavior on cholera dynamics[J].Mathematical Biosciences,2015,267:41-52.
- [7] 刘玉英,肖燕妮.一类受媒体影响的传染病模型的研究[J].应用数学和力学,2013,34(4):399-407.  
LIU Y Y,XIAO Y N.An epidemic model with saturated media/psychological impact[J].Applied Mathematics and Mechanics,2013,34(4):399-407.
- [8] HUO H F,YANG P,XIANG H.Stability and bifurcation for an SEIS epidemic model with the impact of media[J].Physica A:Statistical Mechanics and its Applications,2018,490:702-720.
- [9] ZHOU W K,XIAO Y N.Optimal media reporting intensity on mitigating spread of an emerging infectious disease[J].PloS one,2019,DOI:10.1371/journal.pone.0213898.
- [10] WANG A,XIAO Y,SMITH R.Dynamics of a non-smooth epidemic model with three thresholds[J].Theory in Biosciences,2020,139:

47-65.

- [11] 王俊荣, 窦彩虹, 孙梦皎. 受媒体报道影响的具有 Logistic 人口变化的 SIRS 传染病模型分析[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2018, 46(6): 52-59.  
WANG J R, DOU J H, SUN M J. Analysis of an SIRS epidemic model with media coverage and Logistic variable population[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition), 2018, 46(6): 52-59.
- [12] DREESSCHE P, JAMES W. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1/2): 29-48.
- [13] LI M Y, GRAEF J R, WANG L, et al. Global dynamics of a SEIR model with varying total population size[J]. Mathematical Biosciences, 1999, 160(2): 191-213.
- [14] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

## A class of SEIQR epidemic model with nonlinear isolation rate influenced by media

Hou Wenshan, Zhang Tailei, Fang Shu

(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** In this paper, a class of SEIQR epidemic model with nonlinear isolation rate influenced by media is investigated. The basic reproduction number of the model is calculated to prove the existence and the stability of the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium. The numerical simulations of the model are carried out to verify that the increase of isolation rate influenced by media will decline the number of infectious, thereby media is beneficial to control the outbreak of infectious diseases and reduce the epidemic prevalence.

**Keywords:** media reports; nonlinear isolation rate; SEIQR epidemic model; stability

[责任编辑 陈留院 赵晓华]