文章编号:1000-2367(2016)02-0015-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.02.003

双相滞热传导方程的一个非协调混合有限元方法

刘 倩,石东洋

(郑州大学 数学与统计学院,郑州 450001)

摘 要:针对拟线性双相滞热传导方程,利用非协调 EQ_1^{rot} 元与零阶 Raviart-Thomas(即 $Q_{10}\times Q_{01}$)元,建立了最低阶混合有限元逼近格式. 基于 EQ_1^{rot} 元的两个特殊性质:1)相容误差比插值误差高一阶;2)Ritz 投影算子与插值算子等价,以及零阶 Raviart-Thomas 元的高精度估计结果,利用导数转移和插值后处理技巧,在半离散格式下,分别导出了原始变量 u 在 H^1 模及中间变量 $\vec{p}=\nabla u$ 在 L^2 模意义下的 $O(h^2)$ 阶超逼近与整体超收敛结果. 其中,h 为剖分参数. 同时对其全离散格式,得到了 $O(h^2+\tau^2)$ 阶超逼近结果.

关键词:双相滞热传导方程;非协调有限元;混合有限元格式;超逼近;超收敛

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A

双相滞热传导方程在物理上有着非常广泛的应用,它可以预测和描述多孔介质的非齐次绝缘响应第一系列现象,其解的研究也备受关注. 例如:文献[1]讨论了其 Galerkin 有限元与交替方向有限元方法,并得出了解的收敛性和误差估计;文献[2-3]分别借助非协调 EQ_1^{rot} 元与类 wilson 元,构造了半离散与全离散的有限元格式,并得到了解决超逼近与超收敛性质,其中,文献[2]还给出了相应的外推结果.

利用 Galerkin 非协调有限元方法对发展型方程进行高精度分析已经有了很多成果. 例如文献[4-5]分别在正则与各向异性网格下对 EQ_1^{rot} 非协调元展开了研究,证明了该元具有本文摘要中提到的两个特殊性质;与此同时,EQ_1^{rot} 元也被广泛地应用于 Sobolev 方程[6],Stokes 方程[7]等发展型方程的研究中;文献[8]则对一般二阶椭圆方程利用 EQ_1^{rot} 元进行了超收敛分析;文献[9]对抛物方程采用非协调类 Wilson 元,不仅得到了超收敛性质,而且给出了其外推结果;文献[10-12]则借助类 Wilson 分别对非线性抛物积分微分方程,非线性 Sobolev 方程以及非线性双曲方程给出了半离散格式下解的超收敛性质,并针对全离散格式给出了超逼近结果;文献[13]则借助带约束的旋转 Q^1 非协调元构造了拟线性黏弹性方程的非协调有限元格式,得到了半离散及全离散格式下解的超逼近性质.

众所周知,与标准 Galerkin 有限元方法相比,混合有限元方法有着对空间光滑度要求低且能够同时得到原始变量与中间变量的误差估计的优势. 然而其有限元空间需要满足 Brezzi-Babuška(简记为 B-B)条件,而这里空间的匹配往往比较难以实现. 文献[14-15]给出了二阶椭圆问题的一种新的混合有限元逼近格式,这种格式具有自由度少且能够自然满足 B-B 条件的特点,而降低了使用混合有限元方法的难度;随后,文献[16]对线性 Sobolev 方程,建立了这种新的非协调混合元格式,证明了半离散格式下解的超收敛性及向后欧拉全离散格式下的超逼近性质;文献[17]又将这种格式应用到了抛物方程,针对半离散与全离散格式,得到了解的超逼近与超收敛性质,并且构造了外推格式,得到了外推结果;文献[18]对二阶 Poisson 方程分别构造了半离散的协调与非协调混合元格式,并在各向异性网格下,得到了有关变量的超逼近与超收敛性质;文献[19]则对本文考虑的方程利用双线性元及零阶 Nédéleés 元构造了一个混合元格式,并在半离散格式下,得到了相关变量的 $O(h^2)$ 阶超逼近和整体超收敛结果.

本文的主要目的是通过引入变量 $\vec{p}=\nabla u$,基于非协调 EQ_1^{rot} 元的两个特殊性质,以及零阶 Raviart-

收稿日期:2015-06-22;**修回日期**:2016-01-13.

基金项目:国家自然科学基金(10971203;11271340)

作者简介(通信作者):石东洋(1961-),男,河南鲁山人,河南省特聘教授,博士生导师,主要从事有限元方法及其应用研究,E-mail: shi_dy@zzu.edu.cn.

Thomas元的高精度估计,利用导数转移和插值后处理技巧,分别导出在半离散格式下原始变量u在H^1模及中间变量$\vec{p} = \nabla u$在L^2模意义下的$O(h^2)$阶超逼近与整体超收敛结果.同时对其全离散格式,得到了$O(h^2+\tau^2)$阶超逼近结果.值得指出的是,本文的结果对于采用Q_{11}与$Q_{01}\times Q_{10}$单元对及Q_1^{rot}与$Q_{10}\times Q_{01}$单元对时同样成立.

1 单元的构造与逼近格式

考虑如下的拟线性双相滞热传导方程[1]

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}u_t + u_{tt} - \alpha\Delta u - \beta\Delta u_t = f(u),(X,t)\times\Omega\times(0,T],\\ u(X,t) = 0,(X,t)\in\partial\Omega\times(0,T],\\ u(X,0) = u_0(X),u_t(X,0) = u_1(X),X\in\Omega.\end{cases}\tag{1}$$

其中,u代表温度或者热通量方向的分量,常数α,β, $T>0,\Omega\subset\mathbf{R}^2$是边界为$\partial\Omega$的有界凸区域,$\nabla$与$\nabla\cdot$表示梯度与散度算子,$f$是关于$u$满足 Lipschitz 连续条件的已知函数.

设Ω的边分别平行于x轴与y轴,T_h是一族正则的矩形剖分单元.设$K\in T_h$,其4个顶点为a_1,a_2,a_3,a_4,4条边为$l_i = \overline{a_ia_i+1}$, $i = 1,2,3,4(\mathrm{mod}\ 4)$.其中,$l_1,l_3$和$l_2,l_4$分别平行于$x$轴和$y$轴.记$h_K = \mathrm{diam}(K),h = \max\{h_K\}$.

EQ_1^{rot}元定义为:

$$\sum\nolimits_K^1 = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},P_K^1 = \mathrm{span}\{1,x,y,x^2,y^2\},$$

$$v_i = \frac{1}{|l_i|}\int_{l_i} v\mathrm{d}s,i = 1,2,3,4,\ v_5 = \frac{1}{|K|}\int_K v\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

零阶 Raviart-Thomas 元定义为:

$$\sum\nolimits_K^2 = \{p_1,p_2\},\sum\nolimits_K^3 = \{q_1,q_2\},P_K^2 = \mathrm{span}\{1,x\},\ P_K^3 = \mathrm{span}\{1,y\},$$

$$p_i = \frac{1}{|l_i|}\int_{li} p\mathrm{d}s,i = 2,4,\ q_i = \frac{1}{|l_i|}\int_{li} q\mathrm{d}s,i = 1,3.$$

相应的有限元空间为:

$$V^h = \{v^h:v^h|_K\in P_K^1,\int_F[v^h]\mathrm{d}s = 0,F\subset\partial,\forall K\in T_h\},$$

$$\vec{W}^h = \{\vec{w}^h:\vec{W}^h|_K = (w_1{}^h|_K,w_2{}^h|_K)\in P_K^2\times P_K^3\}.$$

其中$[\varphi]$表示φ跨越边界F产生的跳跃值,当$F\subset\partial\Omega$时,$[\varphi] = \varphi$.

设$I_h:H^1(\Omega)\to V^h$和$\Pi_h:(H^1(\Omega))^2\to\vec{W}^h$为相应的插值算子,分别满足

$$I_h|_K = I_K,\int_{l_i}(I_Ku-u)\mathrm{d}s = 0,i = 1,2,3,4,\int_K(I_Ku-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

$$\Pi_h|_K = \Pi_K,\int_{\partial}K(\vec{q}-\Pi_K\vec{q})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = 0.$$

由文献[4-5]知,对$u\in H^1(\Omega),v^h\in V^h,\vec{w}^h\in\vec{W}^h,\vec{p}(H^2(\Omega))^2$,下列结论成立:

$$(\nabla_h(u-I_hu),\nabla_hv^h) = 0,\tag{2}$$

$$(\nabla_h(u-I_hu),\vec{w}^h) = 0,\tag{3}$$

$$(\vec{p}-\Pi_h\vec{p},\vec{w}^h) = O(h^2)|\vec{p}|_2\|\vec{w}\|^h\|_0,\tag{4}$$

$$\sum\nolimits_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot v^h\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\le Ch^2|\vec{p}|_2\|v^h\|_h,\tag{5}$$

其中$\|\cdot\|_h = (\sum_K|\cdot|_{1,K}^2)^{1/2}$,$\vec{n}$为对应边的单位法向量.

2 半离散格式及超逼近分析

令$\vec{p} = \nabla u$,则方程(1)等价于

$$\begin{cases}\frac{1}{\sigma}u_t+u_{tt}-\alpha\nabla\cdot\vec{p}-\beta\nabla\cdot\vec{p}_t=f(u),(X,t)\times\Omega(0,T],\\ \vec{p}=\nabla u,(X,t)\in\Omega\times(0,T],\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X),X\in\Omega\times(0,T].\end{cases}\tag{6}$$

令 $V=H_0^1(\Omega)$，$W=(L^2(\Omega))^2$，则其相应的变分问题为：求 $\{u,\vec{p}\}:[0,T]\to V\times W$，使得

$$\begin{cases}(\frac{1}{\sigma}u_t,v)+(u_{tt},v)+\alpha(\vec{p},\nabla_v)+\beta(\vec{p}_t,\nabla_v)=(f(u),v),\forall v\in V,\\ (\vec{p},\vec{w})=(\nabla u,\vec{w}),\forall\vec{w}\in\vec{W},\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X).\end{cases}\tag{7}$$

考虑(7) 的半离散逼近格式：求 $\{u^h,\vec{p}^h\}:[0,T]\to V^h\times\vec{W}^h$，使得

$$\begin{cases}(\frac{1}{\sigma}u_t^h,v^h)+(u_{tt}^h,v^h)+\alpha(\vec{p}^h,\Delta_h v^h)_h+\beta(\vec{p}_t^h,\nabla_h v^h)_h=(f(u^h),v^h),\forall v^h\in V^h,\\ (\vec{p}^h,\vec{w}^h)=(\nabla_h u^h,\vec{w}^h)_h,\forall\vec{w}^h\in W^h,\\ u^h(X,0)=I_hu_0(X),u_t^h(X,0)=I_hu_1(X).\end{cases}\tag{8}$$

其中，$(\cdot,\cdot)_h=\sum_K(\cdot,\cdot)_K$，$\nabla_h$ 表示分片求导. 由文献[13－15]知，空间对 V 和 W 以及 V^h 和 W^h 分别满足连续和离散的 BB 条件，故由微分方程理论可知(7) 与(8) 均存在唯一解.

定理 1　设 $\{u,\vec{p}\}$，$\{u^h,p^h\}$ 分别为(7) 与(8) 的解，假定 $u,u_t,u_{tt}\in H^2(\Omega)$，$\vec{p},\vec{p}_t\in(H^2(\Omega))^2$，则有

$$\|u^h-I_hu\|_h+\|\vec{p}^h-\Pi_h\vec{p}\|_0\le Ch^2\{\|\vec{p}\|_2^2+\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}s\}^{1/2}.\tag{9}$$

本文中出现的 C 表示与 h 无关的正常数，且不同地方可以取值不同.

证明　为了方便起见，记

$$u-u^h=(u-I_hu)+(I_hu-u^h)\triangleq\eta+\xi,\vec{p}-\vec{p}^h=(\vec{p}-\Pi_h\vec{p})+(\Pi_h\vec{p}-\vec{p}^h)\triangleq\vec{\rho}+\vec{\theta}.$$

$\forall v^h\in V^h,\vec{w}^h\in W^h$，由(7) 和(8) 可以得到如下的误差方程：

$$\begin{cases}(\frac{1}{\sigma}\xi_t,v^h)+(\xi_{tt},v^h)+\alpha(\theta,\nabla_hv^h)+\beta(\theta_t,\nabla_hv^h)_h=-(\frac{1}{\sigma}\eta t,v^h)-(\eta_{tt},v^h)-\alpha(\rho,\nabla_hv^h)_h-\\ \beta(\rho_t,\nabla_hv^h)_h+f((u)-f(u^h),v^h)+\alpha\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot v^h\cdot n\mathrm{d}s+\beta\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}.\ v^h\cdot n\mathrm{d}s,\\ (\vec{\theta},\vec{w}^h)=-(\vec{\rho},\vec{w}^h)+(\nabla_h\xi,\vec{w}^h)_h+(\nabla_h\eta,\vec{w}^h)_h.\end{cases}\tag{10}$$

在(10) 式中令 $v^h=\xi_t,\vec{w}^h=\nabla_h\xi$，得到

$$(\frac{1}{\sigma}\xi_t,\xi_t)+(\xi_{tt},\xi_t)+\beta(\nabla_h\xi_t,\nabla_h\xi_t)_h+\alpha(\nabla_h\xi,\nabla_h\xi_t)_h=-(-\frac{1}{\sigma}\eta_t,\xi_t)-(\eta_{tt},\xi_t)+\beta(\nabla_h\eta_t,\nabla_t\xi_t)_h+$$

$$(f(u)-f(u^h),\xi_t)+\alpha\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\xi_t\cdot n\mathrm{d}s+\beta\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}_t\cdot\xi_t\cdot n\mathrm{d}s-\alpha(\nabla_h\eta,\nabla_h\xi_t)h\triangleq\sum_i^7B_i.\tag{11}$$

下面，对上式右端的各项逐一进行估计. 首先，由插值定理以及 Young 不等式可得

$$B_1+B_2\le Ch^2\|u_t\|_2\|\xi_t\|_0+Ch^2\|u_{tt}\|^2\|\xi_t\|_0\|\le Ch^4(\|u_t\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2)+\frac{1}{2\sigma}\|\xi_t\|_0^2.\tag{12}$$

显然，由 (2) 式知

$$B_3=B_7=0.\tag{13}$$

利用函数 $f(\cdot)$ 的 Lipschitz 连续性质，可得

$$B_4\le C\|u-u^h\|_0\|\xi_t\|_0\le C(\|\xi\|_0^2+\|\eta\|_0^2)+\frac{1}{2\sigma}\|\xi_t\|_0^2\le$$

$$Ch^4\|u\|_2^2+C\|\xi\|_0^2+\frac{1}{2\sigma}\|\xi_t\|_0^2.\tag{14}$$

由(5) 式可得

$$B_6=\beta\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}_t\cdot\xi_t\cdot n\mathrm{d}s\le Ch^2|\vec{p}_t|_2\|\xi_t\|_h\le Ch^4|\vec{p}_t|_2^2+\frac{\beta}{2}\|\xi_t\|_h^2.\tag{15}$$

其次,利用导数转移技巧,可以得到

$$B_5=\alpha\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\xi_t\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\xi\cdot\vec{n}\mathrm{d}s-\alpha\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}_t\cdot\xi\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\le$$
$$Ch^4\mid\vec{p}_t\mid_2^2+\frac{\beta}{2}\|\xi_t\|_h^2+\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\xi\cdot\vec{n}\mathrm{d}s. \tag{16}$$

将(12)～(16)式的结果代入到(11)式中可得

$$(\frac{1}{\sigma}\xi_t,\xi_t)+(\xi_{tt},\xi_t)+\beta(\nabla_h\xi_t,\nabla_h\xi_t)_h+\alpha(\nabla_h\xi,\nabla_h\xi_t)_h=\frac{1}{\sigma}\|\xi_t\|_0^2+\frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{d}t}\|\xi_t\|_0^2+\beta\|\xi_t\|_h^2+$$
$$\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla_h\xi\|_0^2\le Ch^4(\mid\vec{p}_t\mid_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|u\|_2^2)+\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_K\int_{\partial K}\vec{p}\cdot$$
$$\xi\cdot n\mathrm{d}s+C(\|\xi_t\|_0^2+\|\nabla_h\xi\|_0^2)+\frac{1}{\sigma}\|\xi_t\|_0^2+\beta\|\xi_t\|_h^2. \tag{17}$$

由于 $\|\xi\|_0{}^2\le C\|\xi\|_h{}^2$,对上式两端分别从 $0-t$ 积分,并注意到 $\xi(0)=\xi_t(0)=0$,则有

$$\|\xi_t\|_0^2+\|\nabla_h\xi\|_0^2\le Ch^4\int_0^t(\mid\vec{p}_t\mid_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|u\|_2^2)\mathrm{d}s+$$
$$Ch^4\mid\vec{p}\mid_2^2+\varepsilon\int_0^t(\|\nabla_h\xi\|_0^2+\|\xi_t\|_0^2), \tag{18}$$

故由 Gronwall 引理可得

$$\|\nabla_h\xi\|_0^2\le Ch^4(\int_0^t(\|p_t\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u_{tt}\|_2^2+\|u\|_2^2)\mathrm{d}s+\mid\vec{p}\mid_2^2). \tag{19}$$

另一方面,在(10)式的第2式中取 $\vec{w}^h=\vec{\theta}$,则由(4)式及(19)式可知

$$\|\vec{\theta}\|_0{}^2=(\vec{\rho},\vec{\theta})+(\nabla\xi,\vec{\theta})+(\nabla\eta,\vec{\theta})\le Ch^2\mid\vec{p}\mid_2\|\vec{\theta}\|_0+C\|\nabla_h\xi\|_0\|\vec{\theta}\|_0\le$$
$$Ch^4\{\|\vec{p}\|_2^2+\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}s\}+\frac{1}{2}\|\vec{\theta}\|_0^2, \tag{20}$$

故

$$\|\vec{\theta}\|_0\le Ch^2\{\|\vec{p}\|_2^2+\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}s\}^{1/2}. \tag{21}$$

定理证毕.

基于上述估计,可按类似于文献[20]中的方法,构造满足相应条件的插值后处理算子 Π_{2h}^1 及 Π_{2h}^2,并得到如下的整体超收敛结果:

定理 2 设 $\{u,\vec{p}\}$ 与 $\{u^h,\vec{p}^h\}$ 分别为(7)与(8)式的解,$u\in H^3(\Omega)$,$u_t,u_{tt}\in H^2(\Omega)$,$\vec{p},\vec{p}_t\in(H^2(\Omega))^2$,则有

$$\|u-\Pi_{2h}^1u\|_h\le Ch^2\{\|u\|_3+(\|\vec{p}\|_2^2+\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}s)^{1/2}\},$$
$$\|\vec{p}-\Pi_{2h}^2\vec{p}\|_0\le Ch^2\{\|\vec{p}\|_2+(\|\vec{p}\|_2^2+\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}s)^{1/2}\}.$$

3 全离散格式及超逼近分析

设 $0=t_0<t_1<t_2\cdots<t_N-1<t_N=T$ 是时间$[0,T]$区间上的等步长剖分,步长为 $\tau=T/N$,其中 N 为正常数. U^n 代表 $t=t_n=n\tau$ 时,$u(t_n)=u^n$ 在 V_0^h 中的逼近. 给定$[0,T]$上的光滑函数 φ,设

$$\varphi^n=\varphi(t_n),\varphi^{n+1/2}=\frac{1}{2}(\varphi^{n+1}+\varphi^n),\partial_t\varphi^{n+1/2}=\frac{\varphi^{n+1}+\varphi^n}{\tau},$$
$$\varphi^{n,1/4}=\frac{\varphi^{n+1}+2\varphi^n+\varphi^{n-1}}{4}=\frac{\varphi^{n+1/2}+\varphi^{n-1/2}}{2},$$
$$\partial_t\varphi^n=\partial_t\frac{\varphi^{n+1/2}+\partial_t\varphi^{n-1/2}}{2},\partial_{tt}\varphi^n=\partial_t\frac{\varphi^{n+1/2}-\partial_t\varphi^{n-1/2}}{\tau}.$$

考虑(7)的全离散格式:求$(U^n,\vec{P}^n)\in V^h\times\vec{W}^h$,使得 $\forall\ v^h\in V^h,\vec{w}^h\in\vec{W}^h$,满足

$$\begin{cases}(\frac{1}{\sigma}\partial_t U^n, v^h) + (\partial_{tt} U^n, v^h) + \alpha(\vec{P}^{n,1/4}, \nabla v^h) + \beta(\partial_t \vec{P}^n, \nabla v^h) = (f^{n,1/4}(U), v^h), \\ (\vec{P}^n, \vec{w}^h) = (\nabla U^n, \vec{w}^h), U^0 = I_h u_0(X), \\ U^1 = I_h(u_0 + u_1\tau + \frac{1}{2}u_{tt}(0)\tau^2).\end{cases} \tag{22}$$

定理 3 设$(u^n,\vec{p}^n)$，$(U^n,\vec{P}^n)$分别为(7)与(22)式的解，则在定理 1 的假设下，有下面的超逼近结果：

$$\| U^n - I_h u^n \|_h = O(h^2 + \tau^2), \| \vec{P}^n - \Pi_h \vec{p}^n \|_0 = O(h^2 + \tau^2).$$

证明 为了方便误差的估计，记

$u^n - U^n = (u^n - I_h u^n) + (I_h u^n - U^n) \triangleq \eta^h + \xi^h$，$\vec{p}^n - \vec{P}^n = (\vec{p}^n - \Pi_h \vec{p}^n) + (\Pi_h \vec{p}^n - \vec{P}^n) \triangleq \vec{\rho}^n + \vec{\theta}^n$.

$\forall v^h \in V^n, \vec{w}^h \in W^h$，由(7)式和(22)式可以得到如下的误差方程：

$$\begin{cases}6(\frac{1}{\sigma}\partial_t \xi^n, v^h) + (\partial_{tt}\xi^n, v^h) + \alpha()\theta^{n,1/4}, \nabla_h v^h)_h + \beta(\partial_t, \theta^n, \nabla_h v^h)_h = \\ -(\frac{1}{\sigma}\partial_t \eta^n, v^h) - (\partial_{tt}\eta^n, v^h) - \alpha(\rho^{n,1/4}, \nabla_h v^h)_h - \beta(\partial_t \rho^n, \nabla_h v^h)_h + \\ (f^{n,1/4}(u) - f^{n,1/4}(U), v^h) + \frac{1}{\sigma}(R_1^n, v^h) + (R_2^n, v^h) + \beta(R_3^n, \nabla_h v^h)_h + \\ \partial \sum_K \int_{\partial K} \vec{P}^{n,\frac{1}{4}} \cdot v^h \cdot \vec{n} \mathrm{d}s + \beta \sum_K \partial t \vec{P}^n \cdot v^h \cdot \vec{n} \mathrm{d}s, \\ (\vec{\theta}^n, \vec{w}^h) = -(\vec{\rho}^n, \vec{w}^h) + (\nabla_h \eta^n, \vec{w}^h)_h + (\nabla_h \xi^n, \vec{w}^h)_h.\end{cases} \tag{23}$$

在(23)式中令 $v^h = \partial_t \xi^n, \vec{w}^h = \nabla_h \partial_t \xi^n$，并整理得

$$(\frac{1}{\sigma}\partial_t \xi^n, \partial_t \xi^n) + (\partial_{tt}\xi^n, \partial_t \xi^n) + \beta(\nabla_h \partial_t \xi^n, \nabla_h \partial_t \xi^n)_h + \alpha(\nabla_h \xi^{n,1/4}, \nabla_h \partial_t \xi^n)_h =$$

$$-(\frac{1}{\sigma}\partial_t \eta^n, \partial_t \xi^n) - (\partial_{tt}\eta^n, \partial_t \xi^n) - \beta(\nabla_h \partial_t \rho^n, \nabla_h \partial_t \xi^n)_h - \alpha(\nabla_h \eta^{n,1/4}, \nabla_h \partial_t \xi^n)_h +$$

$$(f^{n,1/4}(u) - f^{n,1/4}(U), \partial_t \xi^n) + \alpha \sum_K \int_{\partial K} \vec{p}^{n,1/4}, \partial_t \xi^n \cdot \vec{n} \mathrm{d}s + \beta \sum_K \int_{\partial K} \partial_t \vec{p}^n \cdot \partial_t \xi^n \cdot$$

$$\vec{n} \mathrm{d}s + \frac{1}{\sigma}(R_1^n, \partial_t \xi^n) + (R_2^n, \partial_t \xi^n) + \beta(R_3^n, \nabla_h \partial_t \xi^n)_h \triangleq \sum_0^{10} G_i. \tag{24}$$

接下来对上式右端各项逐一进行估计，由插值定理及 Young 不等式可得：

$$G_1 + G_2 \le C(\| \partial_{tt}\eta^n \|_0^2 + \| \partial_t \eta^n \|_0^2) + \frac{1}{2\sigma} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \le C\tau^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (\| \eta_{tt} \|_0^2 +$$

$$\| \eta_t \|_0^2) \mathrm{d}s + \frac{1}{2\sigma} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \le Ch^4 \tau^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (\| u_{tt} \|_0^2 + \| u_t \|_0^2) \mathrm{d}s + \frac{1}{2\sigma} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \le$$

$$Ch^4(\| u_{tt} \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \| u_t \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2) + \frac{1}{2\sigma} \| \partial_t \xi^n \|_0^2. \tag{25}$$

类似于 B_3，B_7 及 B_4 的证明可得

$$G_3 = G_4 = 0. \tag{26}$$

$$G_5 = \frac{1}{4}(f(u^{n+1}) - f(U^{n+1}) + 2(f(u^n) - f(U^n)) + f(u^{n-1}) - f(U^{n-1})) + \frac{1}{2\sigma} \| \partial_{\xi}{}^n \|_0^2 \le$$

$$C(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2 + \| \eta^{n+1} \|_0^2 + \| \eta^n \|_0^2 + \| \eta^{n-1} \|_0^2) + \frac{1}{2\sigma} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 \le$$

$$Ch^4 \| u \|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2\sigma} \| \partial_t \xi^n \|_0^2 + C(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2). \tag{27}$$

由(5)式及 Young 不等式得

$$G_6 + G_7 = \alpha \sum_K \int_{\partial K} \vec{p}^{n,1/4} \cdot \partial_t \xi^n \cdot \vec{n} \mathrm{d}s + \beta \sum_K \int_{\partial K} \partial_t \vec{p}^n \cdot \partial_t \xi^n \cdot \vec{n} \mathrm{d}s \le \tag{28}$$

$$Ch^4 \| \vec{p}^{n,1/4} \|_2^2 + Ch^4 \| \partial_t \vec{p}^n \|_2^2 + \frac{\beta}{2} \| \partial_t \xi^n \|_h^2 \le \tag{29}$$

$$Ch^4(\| \vec{p} \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2} + \| \vec{p}_t \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2}) + \frac{\beta}{2} \| \partial_t \xi^n \|^2_h. \tag{30}$$

$$G_8 + G_9 + G_10 \le C(\| R_1^n \|_0^2 + \| R_2^n \|_0^2 + \| R_3^n \|_0^2) + C \| \partial_t \xi^n \|_0^2 + \frac{\beta}{2} \| \partial_t \xi^n \|_h^2 =$$

$$C\tau^4 + C \| \partial_t \xi^n \|_0^2 + \frac{\beta}{2} \| \partial_t \xi^n \|_h^2. \tag{31}$$

由于

$$(\partial_{tt} \xi^n, \partial_t \xi^n) = \frac{1}{2\tau}(\| \partial_t \xi^{n+1/2} \|_0^2 - \| \partial_t \xi^{n-1/2} \|_0^2),$$

$$\alpha(\nabla_h \nabla^{n,1/4}, \nabla_h \partial_t \xi^n) = \frac{\alpha}{2\tau}(\| \nabla_h \xi^{n+1/2} \|_0^2 - \| \nabla_h \xi^{n-1/2} \|_0^2). \tag{32}$$

故由以上各式可得

$$\frac{1}{2\tau}(\| \partial_t \xi^{n+1/2} \|_0^2 - \| \partial_t \xi^{n-1/2} \|_0^2) + \frac{\alpha}{2\tau}(\| \nabla_h \xi^{n+1/2} \|_0^2 - \| \nabla_h \nabla^{n-1/2} \|_0^2) \le$$

$$C(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2) + C\tau^4 + Ch^4(\| u_{tt} \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} +$$

$$\| u_t \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} + \| u \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} + \| \vec{p}_t \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2} + \| \vec{p} \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2}).$$

下面对上式两端同时乘以 2τ,并且从 1 到 $n-1$ 求和,则有

$$\| \partial_t \xi^{n-1/2} \|_0^2 + \alpha \| \nabla_h \xi^{n-1/2} \|_h^0 \le C\sum_{i=1}^{n-1} \tau^5 + C\tau \sum_{i=1}^{n-1}(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 +$$

$$\| \xi^{n-1} \|_0^2) + \| \partial_t \xi^{1/2} \|_0^2 + \alpha \| \xi^{1/2} \|_h^2 + Ch^4 \sum_i^{n-1} \tau(\| u_{tt} \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} +$$

$$\| u_t \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} + \| u \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} + \| \vec{p}_t \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2} + \| \vec{p} \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2}).$$

由于 $\xi^1 = U^1 - I_h u^1 = O(\tau^3)$ 以及 $\xi^0 = 0$,得

$$\| \partial_t \xi^{1/2} \|_0^2 + \alpha \| \nabla_h \xi^{1/2} \|_0^2 = \frac{1}{\tau^2} \| \xi^1 - \xi^0 \|_0^2 + \frac{\alpha}{4} \| \xi^1 + \xi^0 \|_h^2 = O(\tau^4), \tag{35}$$

由 $(N-1)\tau \le N\tau = T$,可知

$$Ch^4 \sum_{i=1}^{n-1} \tau(\| u_{tt} \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} + \| u_t \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} + \| u \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega)} + \| \vec{p}_t \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2} +$$

$$\| \vec{p} \|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))^2}) + C\sum_{i=1}^{n-1} \tau^5 = O(h^4 + \tau^4). \tag{36}$$

将上述两式的结果带入 (34) 式得

$$\| \partial_t \xi^{n-1/2} \|_0^2 + \alpha \| \nabla_h \xi^{n-1/2} \|_0^2 \le C(h^4 + \tau^4) + C\tau \sum_{i=1}^{n-1}(\| \xi^{n+1} \|_0^2 + \| \xi^n \|_0^2 + \| \xi^{n-1} \|_0^2). \tag{37}$$

注意到

$$\| \nabla_h \xi^{n-1/2} \|_0^2 = \frac{1}{4}(\| \nabla_h \xi^{n-1} \|_0^2 + \| \nabla_h \xi^n \|_0^2) + \frac{1}{2}(\nabla_h \xi^n, \nabla_h \xi^{n-1})_h,$$

$$(\nabla_h \xi^n, \nabla_h \xi^{n-1})_h \le \frac{1}{2}(\| \nabla_h \xi^n \|_0^2 + \| \nabla_h \xi^{n-1} \|_0^2). \tag{38}$$

则有

$$\| \partial_t \xi^{n-1/2} \|_0^2 + (1 - c\tau) \| \nabla_h \xi^n \|_0^2 \le C(h^4 + \tau^4) + C\tau \sum_{i=1}^{n-2} \| \nabla_h \xi^i \|_0^2 + (c\tau + 2) \| \nabla_h \xi^{n-1} \|_0^2. \tag{39}$$

当 τ 足够小时,有 $1 - c\tau > 0$,根据离散的 Gronwall 引理可得

$$\| \xi^n \|_h \le C(h^2 + \tau^2), \tag{40}$$

即

$$\| U^n - I_h u^n \|_h = O(h^2 + \tau^2). \tag{41}$$

另一方面,在(27) 式 2 式中令 $\vec{w}^h = \vec{\theta}^n$,则不难得到

$\| \vec{P}^n - \Pi_h \vec{p}^n \|_0 = O(h^2 + \tau^2)$. 定理证毕.

注 对于方程(1)来说，利用 Q_{11} 及 $Q_{01} \times Q_{10}$ 元，并借助文献[20]已有的高精度结果，定理1及定理3同样成立. 另一方面，采用 Q_1^{rot} 及 $Q_{10} \times Q_{01}$ 单元对时，由于在正方形网格剖分下，Q_1^{rot}[21] 元具有 EQ_1^{rot} 元的一切性质，故本文的结论对该单元同样成立.

参 考 文 献

[1] 江成顺，姚 俐，刘蕴贤. 双相滞热传导方程的有限元分析[J]. 计算数学，2005，27(1)：31-44.

[2] Zhao Yanmin, Wang Fenling, Shi Dongyang. Nonconforming finite element method for nonlinear dual phase lagging heat conduction equation[J]. Acta Math Appl Sin, 2013, 29(1): 201-214.

[3] Shi Dongyang, Zhao Yanmin, Wang Fenling. Quasi-wilson nonconforming element approxiation for nonlinear dual phase lagging heat conduction equations[J]. Appl Math Comput, 2014, 243(15): 454-464.

[4] Lin Qun, Tobiska L, Zhou Aihui. Super-convergence and extrapolation of nonconforming low order finite elements applied to the Poisson equation[J]. IMA J Numer Anal, 2005, 25(1): 160-181.

[5] Shi Dongyang, Mao Shipeng, Chen Shaochun. An anisotropic nonconforming finite element with some super-convergence results[J]. Comput, Math, 2005, 23(3): 261-274.

[6] 石东洋，谢萍丽. Sobolev 方程的一类各向异性非协调有限元逼近[J]. 系统科学与数学，2006，29(1)：116-128.

[7] 石东洋，毛士鹏. 三维 Stokes 问题各向异性混合元分析[J]. 应用数学学报，2006，29(3)：502-517.

[8] 石东洋，王芬玲，史艳华. 各向异性 EQ_1^{rot} 非协调元高精度分析的一般格式[J]. 计算数学，2013，35(3)：239-252.

[9] 马国锋，石东洋. 抛物方程的非协调类 Wilson 元超收敛分析和外推[J]. 高校应用数学学报，2012，27(3)：293-302.

[10] 王芬玲，石东洋，陈金环. 非线性抛物积分微分方程的类 Wilson 非协调元分析[J]. 应用数学，2012，25(4)：923-935.

[11] Shi Dongyang, Wang Fenling, Zhao Yanmin. Super-convergence analysis and extrapolation of quasi-Wilson nonconforming finite element method for nonlinear Sobolev equations[J]. Acta Math Appl Sin, 2013, 29(2): 403-414.

[12] 王芬玲，李新祥，樊明智，等. 非线性双曲方程的类 Wilson 元超收敛分析[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2013，41(5)：29-33.

[13] 樊明智，王芬玲，石东洋. 拟线性粘弹性方程的非协调有限元分析[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2012，40(2)：26-30.

[14] 陈绍春，陈红如. 二阶椭圆问题的新混合元格式[J]. 计算数学，2010，32(2)：213-218.

[15] 史 峰，于佳平，李开泰. 椭圆型方程的一种新型混合有限元格式[J]. 工程数学学报，2011，28(2)：231-236.

[16] Shi Dongyang, Zhang Yadong. High accuracy analysis of a new nonconforming mixed finite element scheme for Sobolev equation[J]. Appl Math Comput, 2011, 218(7): 3176-3186.

[17] 石东洋，张亚东. 抛物型方程一个新的非协调混合元超收敛性分析及外推[J]. 计算数学，2013，35(4)：337-352.

[18] 石东洋，李明浩. 二阶椭圆问题一种新格式的高精度分析[J]. 应用数学，2014，37(1)：45-58.

[19] 赵艳敏，石东伟，王芬玲. 非线性双相滞热传导方程的新混合元超收敛分析[J]. 数学的实践与认识，2014，44(5)：269-274.

[20] 林 群，严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定：河北大学出版社，1996.

[21] Lin Qun, Lin Jiafu. Finite element methods: accuracy and improvement[M]. Beijing: Science press, 2006.

A Nonconforming Mixed Finite Element Method for Dual Phase Lagging Heat Conduction Equations

LIU Qian, SHI Dongyang

(College of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: With help of nonconforming EQ_1^{rot} and zero order Raviart-Thomas (that is, $Q_{10} \times Q_{01}$) elements, the lowest order mixed finite elements approximation scheme for quasi-conforming dual-phase-lagging heat conduction equations is proposed. With two special properties of EQ_1^{rot} element: 1) the consistency error is one order higher than its interpolation error; 2) the Ritz-projection operator is equivalent to its interpolation operator and the high accuracy estimating results of zero order $Q_{10} \times Q_{01}$ element, the $O(h^2)$ order super-close and super-convergence results of original variable u in H^1 norm and flux variable $\vec{p} = \nabla u$ in L^2 norm are deduced respectively for semi-discrete scheme through derivative transfer and interpolation post-processing skills. Here, h is the mesh parameter. At the same time, the super-close results of order $O(h^2 + \tau^2)$ are obtained for the fully-discrete scheme.

Keywords: dual-phase-lagging heat conduction equations; nonconforming finite element; mixed finite element scheme; super-close; super-convergence