文章编号:1000－2367(2016)06－0009－06　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.06.002

线性增长条件下的倒向重随机微分方程

陈　敏,申晓慧,江　龙

(中国矿业大学 理学院,江苏 徐州 221116)

摘　要:研究倒向重随机微分方程,在生成元 f 关于 (y,z) 连续且线性增长、生成元 g 关于 (y,z) 满足 Mao 的非 Lipschitz 条件下,得到了其最小解存在定理.推广了倒向重随机微分方程在随机控制和数理金融等方面的应用.

关键词:倒向重随机微分方程;线性增长;非 Lipschitz 条件;最小解

中图分类号:O211　　**文献标志码**:A

考虑如下倒向重随机微分方程(BDSDE)

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s,y_s,z_s)\mathrm{d}s + \int_t^T g(s,y_s,z_s)\mathrm{d}B_s - \int_t^T z_s \mathrm{d}W_s, t \in [0,T], \tag{1}$$

其中终端时间 $T>0$ 为正实数;$(B_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(W_t)_{t\in[0,T]}$ 分别是 l 维和 d 维两个相互独立的标准 Brown 运动,关于 $(B_t)_{t\in[0,T]}$ 的积分是倒向 Itô 积分,关于 $(W_t)_{t\in[0,T]}$ 的积分是正向 Itô 积分;生成元 f,g 有如下定义:

$$f:\Omega\times[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R},\quad g:\Omega\times[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^l,$$

且对任意的 $(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$,$f(\cdot,y,z)$,$g(\cdot,y,z)$ 均为联合可测函数.(f,g,T,ξ) 称为 BDSDE 的参数,将(1)式简单记为 BDSDE(f,g,T,ξ).

当生成元 g 恒为 0 时,BDSDE(f,g,T,ξ) 就是众所周知的倒向随机微分方程(简称 BSDE).1990 年,文献[1]提出 BSDE 并在生成元 f 关于 (y,z) 的一致 Lipschitz 条件下建立了 BSDE 解的存在唯一性结果.从那时起,一些学者们开始专注于这一领域的研究,他们在弱化生成元 f 关于 (y,z) 的一致 Lipschitz 条件方面做了大量的研究[2-5].

1994 年,文献[6]第一次提出 BDSDE,并证明了生成元 f,g 关于 (y,z) 满足一致 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在唯一性.由此出发,一些学者对生成元 f,g 关于 (y,z) 满足一致 Lipschitz 条件进行弱化,并证明了 BDSDE 解的存在唯一性.例如:文献[7]证明了生成元 f,g 关于 (y,z) 在 Mao 的非 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在唯一性;文献[8]在生成元 f,g 关于 (y,z) 满足 Mao 的非 Lipschitz 条件下获得了 BDSDE 解的比较定理;文献[9]得到在生成元 f 关于 (y,z) 连续且线性增长,同时生成元 g 关于 (y,z) 一致 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在性定理;文献[10]在文献[9]的基础上将生成元 f 的连续系数条件弱化为不连续系数条件,即生成元 f 关于 y 满足左 Lipschitz 条件,关于 z 满足 Lipschitz 条件,并在该条件下获得了 BDSDE 解的存在性;文献[11]得到在生成元 f 关于 y 左连续和左 Lipschitz 且关于 z 满足 Lipschitz 条件下 BDSDE 解的存在性定理;文献[12]在生成元 f 关于 y 满足 Osgood 条件,且生成元 g 关于 y 满足一类新的非 Lipschitz 条件下建立了 BDSDE 解的存在唯一性定理.

受上述文章的启发,本文进一步弱化生成元 f,g 关于 (y,z) 的条件,在生成元 f 关于 (y,z) 连续且线性增长,同时生成元 g 关于 (y,z) 满足 Mao 的非 Lipschitz 条件下,获得了 BDSDE 解的存在性定理.

收稿日期:2015-12-15;**修回日期**:2016-06-27.

基金项目:国家自然科学基金(11371362)

第 1 作者简介:陈　敏(1990－),女,江苏宿迁人,中国矿业大学硕士研究生,研究方向为概率论与数理统计.

通信作者:江　龙(1964－),男,中国矿业大学教授,博士,研究方向为随机分析与金融数学,E-mail:jianglong365@hotmail.com.

1 预备知识

在陈述主要结果之前,先介绍本文所使用的一些记号. 用 $|\cdot|$ 表示 Euclid 空间 $\mathbf{R}$ 中 Euclidean 范数. 对于 $z \in \mathbf{R}^{k\times d}$, $|z| := \sqrt{\mathrm{Tr}(zz^*)}$,其中 z^* 是 z 的转置. 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间,$(B_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(W_t)_{t\in[0,T]}$ 是定义在该空间上分别取 $\mathbf{R}^l$ 值和 $\mathbf{R}^d$ 值的两个相互独立的 Brown 运动,$\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的全体 P- 零测度集构成的集合. 对每一个 $t \in [0,T]$,定义

$$\mathscr{F}_t := \mathscr{F}_{0,t}^W \vee \mathscr{F}_{t,T}^B,$$

对任意随机过程 $\{\eta_t\}$, $\mathscr{F}_{0,t}^\eta := \sigma\{\eta_r - \eta_s, s \le r \le t\} \vee \mathscr{N}$.

记 $L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P;\mathbf{R})$ 表示所有 $\mathbf{R}$ 值,$\mathscr{F}_T$ 可测且满足 $E[|\xi|^2] < +\infty$ 的随机变量 ξ 构成的空间. $S^2(0,T;\mathbf{R})$ 表示所有 $\mathbf{R}$ 值,$(\mathscr{F}_t)$- 适应且满足 $E[\sup t \in [0,T] \mid Y_t|^2] < +\infty$ 的连续过程 $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ 构成的空间. $M^2(0,T;\mathbf{R}^l)$ 表示所有 $\mathbf{R}^l$ 值,$(\mathscr{F}_t)$- 循序可测且满足 $E\left[\int_0^T |z_t|^2 \mathrm{d}t\right] < +\infty$ 的连续过程 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ 构成的空间. S 表示所有从 $\mathbf{R}_+ := [0,+\infty]$ 映射到 $\mathbf{R}_+$ 且仅在 0 点取值为 0 的非减连续函数全体.

本文考虑的 BDSDE(f,g,T,ξ) 的解是指存在一对随机过程 $(y_t,z_t)_{t\in[0,T]} \in S^2(0,T;\mathbf{R}) \times M^2(0,T;\mathbf{R}^l)$ 满足 BDSDE(f,g,T,ξ).

下面介绍本文后面要用到的对生成元 f,g,假设

(H1) $g(t,0,0) \in M^2(0,T;\mathbf{R}^l)$;

(H2) f 关于 (y,z) 连续且线性增长,即存在常数 $0 < K < +\infty$,使得 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t -$ a. e. ,对任意的 $(y,z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$,有

$$|f(t,y,z)| \le K(1 + |y| + |z|);$$

(H3) 设凹函数 $\rho(\cdot) \in S$ 满足 $\int_{0^+} \frac{\mathrm{d}u}{\rho(u)} = +\infty$,使得 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t -$ a. e. ,对任意 $(y_1,z_1),(y_2,z_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$,有 $|g(t,y_1,z_1) - g(t,y_2,z_2)|^2 \le \rho(|y_1 - y_2|^2) + \alpha |z_1 - z_2|^2$. 其中 $0 < \alpha < 1$ 是常数.

(H'_2) 设凹函数 $\rho(\cdot) \in S$ 满足 $\int_{0^+} \frac{\mathrm{d}u}{\rho(u)} = +\infty$,使得 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t -$ a. e. ,对任意 $(y_1,z_1),(y_2,z_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$,有 $|f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2)|^2 \le \rho(|y_1 - y_2|^2) + C|z_1 - z_2|^2$. 其中 $C > 0$ 是常数.

注 1 $\rho(\cdot)$ 是至多线性增长函数. 因为 $\rho(\cdot)$ 是非减凹函数且 $\rho(0) = 0$,所以存在常数 A,使得对任意的 $x \in \mathbf{R}^+$, $0 \le \rho(x) \le A(1 + x)$.

为了介绍与证明本文的主要结果,介绍几个引理. 下面的引理 1 与引理 2 分别取自于文献[7] 中的定理 1.1 与文献[8] 中的定理 2.

引理 1 设生成元 g 满足假设(H1) 及(H3),生成元 f 满足假设 $(f(t,0,0))_{t\in[0,T]} \in M^2(0,T;\mathbf{R})$ 和 (H'_2),则对任意的 $\xi \in L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P;\mathbf{R})$,BDSDE$(f,g,T,\xi)$ 存在唯一解 $(y_t,z_t)_{t\in[0,T]}$.

引理 2 对任意的 $\xi^1,\xi^2 \in L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P;\mathbf{R})$. 假设 BDSDE$(f^1,g,T,\xi^1)$ 和 BDSDE(f^2,g,T,ξ^2) 满足引理 1 的假设条件,则 BDSDE(f^1,g,T,ξ^1) 和 BDSDE(f^2,g,T,ξ^2) 分别有解 $(y_t^1,z_t^1)_{t\in[0,T]}$ 和 $(y_t^2,z_t^2)_{t\in[0,T]}$. 若 $\mathrm{d}P -$ a. s. , $\xi^1 \ge \xi^2$,且满足 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t -$ a. e. , $f^1(t,y_t^1,z_t^1) \ge f^2(t,y_t^1,z_t^1)$,则对任意的 $t \in [0,T]$,有

$$\mathrm{d}P - \text{a. s. }, y_t^1 \ge y_t^2.$$

使用文献[2] 中引理 1 的证明方法,可以获得如下引理 3.

引理 3 假设生成元 f 满足条件(H2) 时,定义如下 $f_n(t,y,z)$:

$$f_n(t,y,z) = \inf_{u,v\in Q}\{f(t,u,v) + n|y - u| + n|z - v|\}. \tag{2}$$

则对每一个 $n \ge 1$,函数 $f_n(t,y,z)$ 是 (F_t) 的循序可测函数并满足 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t -$ a. e. ,

(i) 线性增长:任意的 y,z, $|f_n(t,y,z)| \le K(1 + |y| + |z|)$, $0 < K < +\infty$;

(ii) 关于 n 单调:任意的 y,z, $f_n(t,y,z)$ 关于 n 递增;

(iii) Lipschitz 条件:

任意的 y_1,y_2,z_1,z_2, $|f_n(t,y_1,z_1) - f_n(t,y_2,z_2)| \le n|y_1 - y_2| + n|z_1 - z_2|$;

(iv) 收敛：若 $(y_n, z_n) \to (y, z)$，则 $f_n(t, y_n, z_n) \to f(t, y, z)$.

2　主要结果及其证明

下面的定理 1 是本文的主要结果.

定理 1　设生成元 f, g 满足假设(H1)－(H3)，则对任意 $\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P; \mathbf{R})$，BDSDE$(f, g, T, \xi)$ 的解存在，并存在唯一的最小解 $(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$，即若 $(\hat{y}_t, \hat{z}_t)_{t\in[0,T]}$ 是 BDSDE(f, g, T, ξ) 的一个解，则对每一个 $t \in [0, T]$，必有 $y_t \leq \hat{y}_t$.

证明　设生成元 f, g 满足假设(H1)－(H3)，按(2) 式定义 f_n，则由引理 3(iii) 可以知道：

$$| f_n(t, y_1, z_1) - f_n(t, y_2, z_2) |^2 \leq 2n^2 | y_1 - y_2 |^2 + 2n^2 | z_1 - z_2 |^2.$$

令 $\kappa(x) = \rho(x) + 2n^2 x$，则有

$$| f_n(t, y_1, z_1) - f_n(t, y_2, z_2) |^2 \leq \kappa(| y_1 - y_2 |^2) + 2n^2 | z_1 - z_2 |^2;$$

$$| g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2) |^2 \leq \kappa(| y_1 - y_2 |^2) + \alpha | z_1 - z_2 |^2.$$

对于函数 $\kappa(x)$，可以证明 $\kappa(x) \in S$ 且满足 $\int_{0^+} \frac{\mathrm{d}u}{\kappa(u)} = +\infty$，所以生成元 $g(t, y, z)$ 满足假设(H1) 和(H3)，根据引理 3 的(i) 可以知道：对任意的 $n \geq 1$，生成元 $f_n(t, y, z)$ 满足假设 $f(t, 0, 0) \in M^2(0, T; \mathbf{R})$ 和(H2). 所以根据引理 1 得：对任意 $n \geq 1$，$\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P; \mathbf{R})$，BDSDE$(f_n, g, T, \xi)$ 和 BDSDE(h, g, T, ξ) 分别有唯一的解 $(y_t^n, z_t^n)_{t\in[0,T]}$ 和 $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$，其中 $h(t, y, z) := K(1 + | y | + | z |)$，$0 < K < +\infty$.

以下分 3 个步骤完成定理 1 的证明.

第 1 步：证明存在常数 C_1, C_2，对任意的 $n \geq 1$，有

$$E[\sup_{t\in[0,T]} | y_t^n |^2] \leq C_1, E[\int_0^T | z_s^n |^2 \mathrm{d}s] \leq C_2. \tag{3}$$

考虑引理 2，并结合引理 3(i) 得到，对任意的 $n \geq 1$，有

$$y_t^1 \leq y_t^n \leq y_t^n + 1 \leq Y_t, \mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - \text{a. e.}.$$

由单调有界定理可知，存在一个 $(\mathscr{F}_t)$- 循序可测的过程 $(y_t)_{t\in[0,T]}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} y_t^n = y_t, \mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - \text{a. e.}. \tag{4}$$

也可以得到，$\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t$ − a. e.，对任意的 $n \geq 1$，有

$$E[\sup_{t\in[0,T]} | y_t^n |^2] \leq E[G^2] < +\infty. \tag{5}$$

其中 $G := \sup_n \sup_{t\in[0,T]} | y_t^n |$.

故存在独立于 n 的常数 C_1，使得 $E[\sup_{t\in[0,T]} | y_t^n |^2] \leq C_1$.

下面对 $| y_t^n |^2$ 作 Itô 公式得，对任意的 $n \geq 1$，有

$$E[| y_t^n |^2] + E\left[\int_t^T | z_s^n |^2 \mathrm{d}s\right] = E[| \xi |^2] + 2E\left[\int_t^T y_s^n f_n(s, y_s^n, z_s^n) \mathrm{d}s\right] + E\left[\int_t^T | g(s, y_s^n, z_s^n) |^2 \mathrm{d}s\right].$$

结合(H3)，注 1 以及不等式 $2ab \leq (\mu - 1)a^2 + (\mu - 1)^{-1} b^2 (\mu > 1)$，对任意的 $n \geq 1$，有

$$\begin{aligned} | g(s, y_s^n, z_s^n) |^2 &\leq | g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, 0, 0) + g(s, 0, 0) |^2 \leq \\ &\mu | g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, 0, 0) |^2 + (1 + \frac{1}{\mu - 1}) | g(s, 0, 0) |^2 \leq \\ &\mu[A(1 + | y_s^n |^2) + \alpha | z_s^n |^2] + (1 + \frac{1}{\mu - 1}) | g(s, 0, 0) |^2. \end{aligned}$$

再考虑假设(H2)，不等式 $2ab \leq \lambda a^2 + \lambda^{-1} b^2 (\lambda > 0)$ 和(5) 式得，对任意的 $n \geq 1$，有

$$\begin{aligned} E\left[\int_t^T | z_s^n |^2 \mathrm{d}s\right] &\leq E[| \xi |^2] + 2KE\left[\int_t^T y_s^n (1 + | y_s^n | + | z_s^n |) \mathrm{d}s\right] + \\ &2E\left[\int_t^T \mu[A(1 + | y_s^n |^2) + \alpha | z_s^n |^2] + (1 + \frac{1}{\mu - 1}) | g(s, 0, 0) |^2 \mathrm{d}s\right] \leq \\ &E[| \xi |^2] + KT^2 + \mu AT + (K + 2KT + \lambda KT + \mu AT) E[G^2] + \\ &(1 + \frac{1}{\mu - 1}) E\left[\int_t^T | g(s, 0, 0) |^2 \mathrm{d}s\right] + (K/\lambda + \mu\alpha) E\left[\int_t^T | z_s^n |^2 \mathrm{d}s\right]. \end{aligned}$$

取 $\mu=\dfrac{1+\alpha}{2\alpha},\lambda=\dfrac{2K}{1-\mu\alpha}$. 由于 $0<\alpha<1$，故知道 $1<\mu<1/\alpha,\lambda>0$ 且 $K/\lambda+\mu\alpha=(3+\alpha)/4<1$，所以有 $E\left[\int_t^T|z_s^n|^2\mathrm{d}s\right]\leq\dfrac{4}{1-\alpha}C_2'$，其中 C_2' 是取决于 ξ,K,T,A,μ,λ,G 且独立于 n 的常数.

于是存在仅取决于 $\alpha,\xi,K,T,A,\mu,\lambda,G$ 且独立于 n 的常数 C_2，使得

$$E\left[\int_t^T|z_s^n|^2\mathrm{d}s\right]\leq C_2.$$

第 2 步：证明 $(y_t^n,z_t^n)_{t\in[0,T]}$ 是 $S^2(0,T;\mathbf{R})\times M^2(0,T;\mathbf{R}^L)$ 中的柯西列.

对 $|y_t^n-y_t^m|^2$ 作 Itô 公式得，对任意的 $n,m\geq1$，有

$$E[|y_0^n-y_0^m|^2]+E\left[\int_0^T|z_s^n-z_s^m|^2\mathrm{d}s\right]=2E\left[\int_0^T(y_s^n-y_s^m)(f_n(s,y_s^n,z_s^n)-f_m(s,y_s^m,z_s^m))\mathrm{d}s\right]+$$
$$E\left[\int_0^T|g(s,y_s^n,z_s^n)-g(s,y_s^m,z_s^m)|^2\mathrm{d}s\right]\leq2\left(E\left[\int_0^T|y_s^n-y_s^m|^2\mathrm{d}s\right]\right)^{\frac12}\left(E\left[\int_0^T|f_n(s,y_s^n,z_s^n)-\right.\right.$$
$$\left.\left.f_m(s,y_s^m,z_s^m)|^2\mathrm{d}s\right]\right)^{\frac12}+E\left[\int_0^T|g(s,y_s^n,z_s^n)-g(s,y_s^m,z_s^m)|^2\mathrm{d}s\right].$$

根据(3)式及假设(H2)有

$$E\left[\int_0^T|f_n(s,y_s^n,z_s^n)-f_m(s,y_s^m,z_s^m)|^2\mathrm{d}s\right]\leq2E\left[\int_0^T|f_n(s,y_s^n,z_s^n)|^2+|f_m(s,y_s^m,z_s^m)|^2\mathrm{d}s\right]\leq$$
$$4K^2E\left[\int_0^T(2+|y_s^n|^2+|y_s^m|^2+|z_s^n|^2+|z_s^m|^2)\right]\leq8K^2(T+C_1T+C_2),$$

其中，C_1,C_2 是独立于 m,n 的常数.

从而存在仅取决于 K,T,C_1,C_2 且独立于 m,n 的常数 $\overline{K}$，使得

$$\left(E\left[\int_0^T|f_n(s,y_s^n,z_s^n)-f_m(s,y_s^m,z_s^m)|^2\mathrm{d}s\right]\right)^{\frac12}\leq\overline{K}.$$

另一方面，由文献[5]知，对任意的 $q\geq1,x\in\mathbf{R}^+$，有

$$\rho(x)\leq(q+2A)x+\rho\left(\frac{2A}{q+2A}\right).\tag{6}$$

于是根据(6)式及假设(H3)有

$$E[|y_0^n-y_0^m|^2]+E\left[\int_0^T|z_s^n-z_s^m|^2\mathrm{d}s\right]\leq2\overline{K},\left(E\left[\int_0^T|y_s^n-y_s^m|^2\mathrm{d}s\right]\right)^{\frac12}+$$
$$(q+2A)E\left[\int_0^T|y_s^n-y_s^m|^2\mathrm{d}s\right]+\alpha E\left[\int_0^T|z_s^n-z_s^m|^2\mathrm{d}s\right]+\rho(2A/q+2A),$$

即

$$E\left[\int_0^T|z_s^n-z_s^m|^2\mathrm{d}s\right]\leq\frac{1}{1-\alpha}\left[2\overline{K}\left(E\left[\int_0^T|y_s^n-y_s^m|^2\mathrm{d}s\right]\right)^{\frac12}+\right.$$
$$\left.(q+2A)E\left[\int_0^T|y_s^n-y_s^m|^2\mathrm{d}s\right]+\rho\left(\frac{2A}{q+2A}\right)\right].$$

而由(5)式知，对任意的 $n,m\geq1,s\in[0,T]$，有 $\mathrm{d}P-$a. s.，$|y_s^n-y_s^m|\leq2G$. 再结合(4)式，这样由 Lebesgue 控制收敛定理可知，当 $n,m\to+\infty$ 时，有

$$E\left[\int_t^T|y_s^n-y_s^m|^2\mathrm{d}s\right]\to0.\tag{7}$$

于是在上面不等式中，先令 $n,m\to+\infty$，再令 $q\to+\infty$，可以得到

$$E\left[\int_0^T|z_s^n-z_s^m|^2\mathrm{d}s\right]\to0.$$

于是 $(z_t^n)_{t\in[0,T]}$ 是 $M^2(0,T;\mathbf{R}^d)$ 中的一个柯西列，其极限必在该空间中，不妨设其极限为 $(z_t)_{t\in[0,T]}$，即

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\int_0^T|z_s^n-z_s|^2\mathrm{d}s\right]=0.\tag{8}$$

于是，可以选取序列 $\{n\}$ 的一个子列 $\{n_k\}$（不妨仍记为 $\{n\}$），使得

$$E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s|^2 \mathrm{d}s\right] \leq 1/2^n.$$

因此

$$E\left[\int_0^T \sup_n |z_s^n - z_s|^2 \mathrm{d}s\right] \leq E\left[\int_0^T \sum_{n=1}^{+\infty} |z_s^n - z_s|^2 \mathrm{d}s\right] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

故有

$$E\left[\int_0^T \sup_n |z_s^n|^2 \mathrm{d}s\right] \leq 2E\left[\int_0^T \sup_n |z_s^n - z_s|^2 \mathrm{d}s\right] + 2E\left[\int_0^T |z_s|^2 \mathrm{d}s\right] < +\infty. \tag{9}$$

考虑引理 3 的(iv)，(4) 式和(8) 式，当 $n \to +\infty$，有

$$f_n(s, y_s^n, z_s^n) \to f(s, y_s, z_s), \mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - \text{a. e.} \tag{10}$$

对每一个 $s \in [0, T]$，令

$$H_s = K(1 + G + \sup_n |z_s^n|).$$

从假设(H2) 和引理 3 的(i) 可知，对任意的 $n \geq 1, \mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - \text{a. e.}$，

$$|f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f(s, y_s, z_s)| \leq 2H_s. \tag{11}$$

再结合(5) 式和(9) 式，由不等式$(a+b+c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$ 和 Hölder 不等式得

$$E\left[\left(\int_0^T |H_s| \mathrm{d}s\right)^2\right] \leq 4K^2 E\left[T^2 + \left(\int_0^T G \mathrm{d}s\right)^2 + \left(\int_0^T \sup_n |z_s^n| \mathrm{d}s\right)^2\right] \leq$$

$$4K^2\left(T^2 + T^2 E[G^2] + T\int_0^T \sup_n |z_s^n|^2 \mathrm{d}s\right) < +\infty.$$

考虑到(10) 式、(11) 式及上述不等式，利用 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f(s, y_s, z_s)| \mathrm{d}s\right)^2\right] = 0. \tag{12}$$

另一方面，考虑假设(H3)、(6) 式和 BDG 不等式，得到

$$E\left[\left|\int_0^T (g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s, z_s)) \mathrm{d}B_s\right|^2\right] \leq 8E\left[\int_0^T |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s, z_s)|^2 \mathrm{d}s\right] \leq$$

$$8(q + 2A)E\left[\int_0^T |y_s^n - y_s|^2 \mathrm{d}s\right] + 8\alpha E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s|^2 \mathrm{d}s\right] + 8\rho\left(\frac{2A}{q + 2A}\right).$$

结合(4) 式及(8) 式，当 $q \to +\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|\int_0^T (g(t, y_s^n, z_s^n) - g(t, y_s, z_s)) \mathrm{d}B_s\right|^2\right] = 0. \tag{13}$$

同时，有 $\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - \text{a. e.}$，对每一个 $n, m \geq 1, t \in [0, T]$，

$$|y_t^n - y_t^m| \leq \int_t^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)| \mathrm{d}s + \left|\int_t^T (g(s, y_s^n, z_s^n) -\right.$$

$$\left. g(s, y_s^m, z_s^m)) \mathrm{d}B_s\right| + \left|\int_t^T (z_s^n - z_s^m) \mathrm{d}W_s\right|,$$

$$E[\sup_{t\in[0,T]}[|y_t^n - y_t^m|^2]] \leq 2E\left[\left(\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)| \mathrm{d}s\right)^2\right] +$$

$$2E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T (g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s^m, z_s^m)) dB_s\right|^2\right] + 2E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T (z_s^n -\right.\right.$$

$$\left.\left. z_s^m) \mathrm{d}W_s\right|^2\right] \leq 2E\left[\left(\int_0^T |f_n(s, y_s^n, z_s^n) - f_m(s, y_s^m, z_s^m)| \mathrm{d}s\right)^2\right] +$$

$$16E\left[\int_0^T |g(s, y_s^n, z_s^n) - g(s, y_s^m, z_s^m)|^2 \mathrm{d}s\right] + 16E\left[\int_0^T |z_s^n - z_s^m|^2 \mathrm{d}s\right].$$

在上述不等式中先令 $m \to +\infty$，再考虑(8) 式，(12) 式以及(13) 式，得到

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{t\in[0,T]}[|y_t^n - y_t|^2]] = 0. \tag{14}$$

因而$(y_t)_{t\in[0,T]}$ 是连续过程，并且 $E[\sup_{t\in[0,T]}[|y_t|^2]] < +\infty$. 所以$(y_t)_{t\in[0,T]} \in S^2(0, T; \mathbf{R})$.

第 3 步：证明$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$ 是 BDSDE(f, g, T, ξ) 的最小解.

考虑到(8) 式，(12) 式，(13) 式及(14) 式，在 BDSDE(f, g, T, ξ) 中两边取极限得到

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s) \mathrm{d}s + \int_t^T g(s, y_s, z_s) \mathrm{d}B_S - \int_t^T z_s W_S, t \in [0, T].$$

故$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$ 是 BDSDE(f, g, T, ξ) 的一个解. 设$(\hat{y}_t, \hat{z}_t)_{t\in[0,T]}$ 是 BDSDE(f, g, T, ξ) 的任意一个解,考虑引理 3 的(ii) 和(iv),由引理 2 可知,对任意的 $t \in [0, T]$ 和 $n \geq 1$, $\mathrm{d}P-$a. s. , $y_t^n \leq \hat{y}_t$,从而有 $y_t = \lim\limits_{n\to\infty} y_t^n \leq \hat{y}_t$. 这就说明$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$ 是 BDSDE(f, g, T, ξ) 最小解.

注 2 当定理 1 中取 $\rho(x) = Kx (K \geq 0)$ 时,可以得到文献[9] 的结果.

参考文献

[1] Pardoux E, Peng S G. Adapted solution of a backward stochastic differentialequation[J]. Systems Control Letters, 1990, 14: 55-61.

[2] Lepeltier J P, SanMartin J. Backward stochastic differential equations with continuous coefficient[J]. Statistics Probability Letters, 1997, 32(4): 425-430.

[3] Mao X R. Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1995, 58: 281-292.

[4] Kobylanski M. Backward stochastic differential equations and partial equations with quadratic growth[J]. The Annals of Probability, 2000, 28(2): 558-602.

[5] Fan S J, Jiang L, Davison M. Uniqueness of solutions for multidimensional BSDEs with uniformly continuous generators[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2010, 348(11): 683-686.

[6] Pardoux E, Peng S G. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs[J]. Probability Theory Related Fields, 1994, 98(2): 209-227.

[7] 周少甫,曹小勇,郭 潇. 倒向双重随机微分方程[J]. 应用数学, 2004, 17(1): 95-103.

[8] 韩宝艳,邢培旭. 非 Lipschitz 条件下的倒向重随机微分方程[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2007, 35(4): 26-29.

[9] Shi Y F, Gu Y L, Liu K. Comparison theorems of backward doubly stochastic differential equations and applications[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2005, 23: 97-110.

[10] Zhu Q F, Shi Y F. A class of backward doubly stochastic differential equations with discontinuous coefficients[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2014, 30(4): 965-976.

[11] Lin Q. A generalized existence theorem of backward doubly stochastic differential equations[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2010, 26(8): 1525-1534.

[12] 王先飞,江 龙,马娇娇. 具有 Osgood 型生成元的多维倒向重随机微分方程[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(08): 24-33.

Backward Doubly Stochastic Differential Equations under Linear Growth Condition

CHEN Min, SHEN Xiaohui, JIANG Long

(College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: This paper aims to investigate the uniqueness of minimal solution of Backward Doubly Stochastic Differential Equations, where the generator f is continuous and has a linear growth in (y, z), and the generator g satisfies Mao's non-Lipschitz condition in (y, z). The research results can be applied in stochastic controls and mathematical finance.

Keywords: Backward Doubly Stochastic Differential Equations; linear growth; non-Lipschitz condition; minimal solution