文章编号:1000-2367(2021)04-0018-06　　**DOI:**10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.04.003

一类广义双积及其相关的 Yetter-Drinfeld 范畴

马天水,杨海燕

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:首先给出了广义 smash 积 monoidal BiHom-代数 $(B\#_n^m H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ 和广义 smash 余积 monoidal BiHom- 余代数 $(B\times_q^p H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$,进而得到了由 $(B\#_n^m H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ 和 $(B\times_q^p H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ 构成 monoidal BiHom- 双代数 $(B_{\times n,q}^{\#m;p} H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ 的充分必要条件.最后构造了一类与 $(B_{\times n,q}^{\#m;p} H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ 相关的张量范畴.

关键词: Radford 双积;BiHom-代数;Yetter-Drinfeld 范畴

中图分类号:O153.3　　**文献标志码:**A

Radford 双积是由 D.E.Radford 在 1985 年通过 smash 积和 smash 余积构造的一类 Hopf 代数(见文献[1]),其等价于构造了一个 Yetter-Drinfeld 范畴中的 Hopf 代数,这使得该结构在有限维有点 Hopf 代数的分类中起到了关键作用.对 Radford 双积的其他研究可见文献[2−6].Hom 型代数源于对 Witt 代数和 Virasoro 代数的 q-形变的研究,近年来在 Lie 代数、Hopf 代数等相关领域得到了迅速发展,受到许多研究者的关注,见文献[4−17].特别地,文献[8]利用范畴思想给出了 Hom-型代数的推广,得到了 monoidal BiHom 型代数,这是本文研究的主要对象.文献[6]给出了 Radford 双积的一类 monoidal BiHom 型.文献[4]引入了 monoidal Hom-smash 积代数的对偶概念 monoidal Hom-smash 余积余代数,并给出了 monoidal Hom-smash 积代数和 monoidal Hom-smash 余积余代数构成 monoidal Hom-双代数的充分必要条件,并给出了相应的 Yetter-Drinfeld 模范畴,进而证明了该范畴是辫子 monoidal 范畴.文献[5]除了推广文献[4]的工作外还给出了文献[4]中 monoidal Hom-双代数的映射刻画.本文主要把文献[5]的思想利用到 monoidal BiHom 型代数中来,所得结果囊括了文献[4−6]中的主要结果.

文中所有代数系统都是定义在域 K 上的.若 C 是余代数,则用 Sweedler 记号(文献[2])表示余乘:$\Delta(c)=c_1\otimes c_2, \forall c\in C$.“Monoidal BiHom”简记为“MBH”.

1　基本定义

本节回顾文献[8]中的一些基本概念.

定义 1　MBH 代数是一个五元组 $(A,\mu,1_A,\alpha,\beta)$(简记为 (A,α,β)),其中 A 是一个线性空间,$\mu: A\otimes A\to A$ 是一个线性映射(记 $\mu(a\otimes a')=aa'$),$1_A\in A$,α,β 是 A 上的自同态,并且对任意的 $a,a',a''\in A$,下面条件成立:

(A1)$\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$,(A2)$\alpha(aa')=\alpha(a)\alpha(a')$,$\alpha(1_A)=1_A$,(A3)$\beta(aa')=\beta(a)\beta(a')$,$\beta(1_A)=1_A$,(A4)$\alpha(a)(a'a'')=(aa')\beta(a'')$,(A5)$a1_A=\alpha(a)$,$1_Aa=\beta(a)$.

注记 1　当 $\alpha=\beta$ 时,MBH 代数是 monoidal Hom-代数.

收稿日期:2020-06-26;**修回日期:**2020-09-29.

基金项目:国家自然科学基金(11801150);河南省自然科学基金(212300410365);河南师范大学研究生科研创新资助项目(YL202019).

作者简介(通信作者):马天水(1977−),男,河南唐河人,河南师范大学副教授,博士,研究方向为 Hopf 代数及其应用,E-mail:matianshui@yahoo.com.

定义 2　MBH 余代数是一个五元组 $(C,\Delta,\varepsilon,\psi,\omega)$(简记为$(C,\psi,\omega)$)，其中 C 是一个线性空间，$\Delta:C\to C\otimes C$ 是一个线性映射(记 $\Delta(c)=c_1\otimes c_2$)，$\varepsilon:C\to K$，ψ,ω 是C 上的自同态，并且对任意的 $c\in C$ 下面条件成立：

$$(C1)\psi\circ\omega=\omega\circ\psi,$$
$$(C2)\psi(c)_1\otimes\psi(c)_2=\psi(c_1)\otimes\psi(c_2),\varepsilon\circ\psi=\varepsilon,$$
$$(C3)\omega(c)_1\otimes\omega(c)_2=\omega(c_1)\otimes\omega(c_2),\varepsilon\circ\omega=\varepsilon,$$
$$(C4)\omega(c_1)\otimes c_{21}\otimes c_{22}=c_{11}\otimes c_{12}\otimes\psi(c_2),$$
$$(C5)\varepsilon(c_1)c_2=\psi(c),c_1\varepsilon(c_2)=\omega(c).$$

注记 2　当 $\psi=\omega$ 时，MBH 余代数是 monoidal Hom-余代数.

定义 3　MBH 双代数是一个 7 元组 $(H,\mu,1_H,\Delta,\varepsilon,\alpha,\beta)$(简记为$(H,\alpha,\beta)$)，其中$(H,\mu,1_H,\alpha,\beta)$是一个 MBH 代数，$(H,\Delta,\varepsilon,\alpha,\beta)$ 是一个 MBH 余代数且满足下面条件：

$$(D1)\Delta(hh')=\Delta(h)\Delta(h'),$$
$$(D2)\Delta(1_H)=1_H\otimes 1_H,$$
$$(D3)\varepsilon(hh')=\varepsilon(h)\varepsilon(h'),$$
$$(D4)\varepsilon(1_H)=1_H.$$

此外，如果存在线性映射 $S:H\to H$ 使得

$$(D5)S(h_1)h_2=h_1S(h_2)=\varepsilon(h)1_H,$$
$$(D6)S\circ\alpha=\alpha\circ S,S\circ\beta=\beta\circ S,$$

则称 $(H,\mu,1_H,\Delta,\varepsilon,\alpha,\beta,S)$(简记为$(H,\alpha,\beta,S)$)MBH-Hopf 代数.

定义 4　设 (A,α_A,β_A) 是 MBH 代数.一个左 A- 模是一个四元组$(M,\triangleright,\alpha_M,\beta_M)$，其中 M 是一个线性空间，$\triangleright:A\otimes M\to M$ 是一个线性映射，并且 α_M,β_M 是M 的自同态，并且对任意的 $a,a'\in A$ 和$m\in M$ 下面条件成立：

$$(M1)\alpha_M\circ\beta_M=\beta_M\circ\alpha_M,$$
$$(M2)\alpha_M(a\triangleright m)=\alpha_A(a)\triangleright\alpha_M(m),$$
$$(M3)\beta_M(a\triangleright m)=\beta_A(a)\triangleright\beta_M(m),$$
$$(M4)\alpha_A(a)\triangleright(a'\triangleright m)=(aa')\triangleright\beta_M(m),1_A\triangleright m=\beta_M(m).$$

注记 3　显然 (A,μ,α_A,β_A) 是左(A,α_A,β_A)- 模.

定义 5　设 (C,ψ_C,ω_C) 是 MBH 余代数.一个左C- 余模是一个四元组(M,ρ,ψ_M,ω_M)，其中M是一个线性空间，$\rho:M\to C\otimes M$(写作 $\rho(m)=m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$)是一个线性映射，并且 ψ_M,ω_M 是M 的自同态，并且对任意的 $m\in M$ 下面条件成立：

$$(CM1)\ \psi_M\circ\omega_M=\omega_M\circ\psi_M,$$
$$(CM2)\ \psi_M(m)_{(-1)}\otimes\psi_M(m)_{(0)}=\psi_C(m_{(-1)})\otimes\psi_M(m_{(0)}),$$
$$(CM3)\ \omega_M(m)_{(-1)}\otimes\omega_M(m)_{(0)}=\omega_C(m_{(-1)})\otimes\omega_M(m_{(0)}),$$
$$(CM4)\ \omega_C(m_{(-1)})\otimes m_{(0)(-1)}\otimes m_{(0)(0)}=m_{(-1)1}\otimes m_{(-1)2}\otimes\psi_M(m_{(0)}),\varepsilon_C(m_{(-1)})m_{(0)}=\psi_M(m).$$

注记 4　显然 $(C,\Delta,\psi_C,\omega_C)$ 是左(C,ψ_C,ω_C)- 余模.

定义 6　设 (H,α_H,β_H) 是 MBH 双代数.一个 MBH 代数(B,α_B,β_B) 称为左 H- 模 MBH 代数，如果(B,α_B,β_B) 是一个带有 $\triangleright$ 作用的左 H- 模，并且对任意的 $a,b\in B,h\in H$ 下面条件成立：

$$(E1)h\triangleright(ab)=(h_1\triangleright a)(h_2\triangleright b),$$
$$(E2)h\triangleright 1_B=\varepsilon(h)1_B.$$

定义 7　设 (H,α_H,β_H) 是 MBH 双代数.一个 MBH 余代数(B,α_B,β_B) 称为左 H- 余模 MBH 余代数，如果(B,α_B,β_B) 是一个左 H- 余模(余作用为 $\rho(b)=b_{(-1)}\otimes b_{(0)}$)并且对任意的 $b\in B$，下面条件成立：

$$(F1)b_{(-1)}\otimes\Delta_B(b_{(0)})=b_{1(-1)}b_{2(-1)}\otimes b_{1(0)}\otimes b_{2(0)},$$
$$(F2)b_{(-1)}\varepsilon(b_{(0)})=\varepsilon(b)1_H.$$

定义 8　设 (H,α_H,β_H) 是 MBH 双代数.一个 MBH 代数(B,α_B,β_B) 称为左 H- 余模 MBH 代数，如果

(B,α_B,β_B) 是一个左 H- 余模(余作用为 ρ),并且对任意的 $a,b\in B$,下面条件成立:

$$(\mathrm{G1})\rho(ab)=a_{(-1)}b_{(-1)}\otimes a_{(0)}b_{(0)},$$

$$(\mathrm{G2})\rho(1_B)=1_H\otimes 1_B.$$

定义 9 设 (H,α_H,β_H) 是 MBH 双代数.一个 MBH 余代数 (B,α_B,β_B) 称为左 H- 模 MBH 余代数,如果 (B,α_B,β_B) 是一个带有 $\triangleright$ 作用的左 H- 模,并且对任意的 $b\in B,h\in H$ 下面条件成立:

$$(\mathrm{H1})\Delta(h\triangleright b)=h_1\triangleright b_1\otimes h_2\triangleright b_2,$$

$$(\mathrm{H2})\varepsilon_B(h\triangleright b)=\varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b).$$

2 广义双积结构

本节引入广义 smash 积 MBH 代数和广义 smash 余积 MBH 余代数,进而给出两者成为 MBH 双代数的充要条件.这里还给出此双代数的对极.从现在开始,假设所有代数结构的结构映射可逆,比如在 MBH 代数 (H,α_H,β_H) 中要求 α_H,β_H 可逆.

命题 1 设 (H,α_H,β_H) 是 MBH 双代数,(B,α_B,β_B) 是左 H- 模 MBH 代数,$m,n\in\mathscr{Z}$.则 $(B\#_n^m H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ ($=B\otimes H$ 作为向量空间) 是 MBH 代数,其中单位元为 1_B1_H,乘法为

$$(a\otimes h)(b\otimes g)=a(\alpha_H^m\beta_H^n(h_1)\triangleright\beta_B^{-1}(b))\otimes\beta_H(h_2)g,$$

其中 $a,b\in B,h,g\in H$.在这种情况下,称 $(B\#_n^m H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 为广义 smash 积 MBH 代数.

证明 直接证明 BiHom 结合性可得.

注记 5 (1)当 $m=1,n=-1$ 时可得文献[6]中命题 1.

(2)当 $\alpha=\beta,m=0,n=0$ 时可得文献[4]中定义 2.7.

(3)当 $\alpha=\beta,n=0$ 时可得文献[5]中命题 3.1.

对偶命题 1 可得:

命题 2 设 (H,α_H,β_H) 是 MBH 双代数,(B,α_B,β_B) 是左 H- 余模 MBH 余代数,并且 $p,q\in\mathscr{Z}$.则 $(B\times_q^p H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ ($=B\otimes H$ 作为向量空间) 是 MBH 余代数,其中余单位为 $\varepsilon_B\otimes\varepsilon_H$,余乘为

$$\Delta(b\otimes h)=b_1\otimes\alpha_H^p\beta_H^q(b_{2(-1)})\beta_H^{-1}(h_1)\otimes\beta_B(b_{2(0)})\otimes h_2,$$

其中 $b\in B,h\in H$.在这种情况下,称 $(B\times_q^p H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 广义 smash 余积 MBH 余代数.

注记 6 (1)当 $p=-1,q=1$ 时可得文献[6]中命题 2.

(2)当 $\alpha=\beta,p=0,q=0$ 时可得文献[4]中命题 3.2.

(3)当 $\alpha=\beta,q=0$ 时可得文献[5]中命题 3.5.

定理 1 设 (H,α_H,β_H) 是 MBH 双代数,$(B\#_n^m H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 是广义 smash 积 MBH 代数,$(B\times_q^p H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 是广义 smash 余积 MBH 余代数,则下面条件等价:(i) $(\{B_{\times n,q}^{\# m;p}H,m_{B\#_n^m H},1_B\otimes 1_H,\Delta_{B\times_q^p H},\varepsilon_B\otimes\varepsilon_H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 是 MBH 双代数.(ii)下面条件成立:

(R1) ε_B 是代数同态,$\Delta_B(1_B)=1_B\otimes 1_B$,

(R2) (B,α_B,β_B) 是左 (H,α_H,β_H)-MBH 模余代数,

(R3) (B,α_B,β_B) 是左 (H,α_H,β_H)-MBH 余模代数,

(R4) $\Delta_B(ab)=a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright\beta_B^{-1}(b_1))\otimes\beta_B(a_{2(0)})b_2$,

(R5) $\alpha_H^p\beta_H^{q-1}((\alpha_H^m\beta_H^{n+1}(h_1)\triangleright b)_{(-1)})h_2\otimes(\alpha_H^m\beta_H^{n+1}(h_1)\triangleright b)_{(0)}=h_1\alpha_H^{p+1}\beta_H^{q-1}(b_{(-1)})\otimes\alpha_H^{m-1}\beta_H^{n+1}(h_2)\triangleright b_{(0)}$,

其中 $a,b\in B,h\in H,m,n,p,q\in\mathscr{Z}$.在这种情况下,称 $(B_{\times n,q}^{\# m;p}H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 广义双积 MBH 双代数.

证明 ((i)⇒(ii))直接验证可得.

((ii)⇒(i))对任意的 $a,b\in B,h,g\in H$,有

$$\Delta_{B\times_q^p H}((a\otimes h)(b\otimes g))=(a(\alpha_H^m\beta_H^n(h_1)\triangleright\beta_B^{-1}(b)))_1\otimes\alpha_H^p\beta_H^q((a(\alpha_H^m\beta_H^n(h_1)\triangleright$$

$$\beta_B^{-1}(b)))_{2(-1)})\beta_H^{-1}(\beta_H(h_{21})g_1)\otimes\beta_B((a(\alpha_H^m\beta_H^n(h_1)\triangleright\beta_B^{-1}(b)))_{2(0)})\otimes\beta_H(h_{22})g_2\overset{(\mathrm{R4})}{=\!=}$$

$$a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright\beta_B^{-1}((\alpha_H^m\beta_H^n(h_1)\triangleright\beta_B^{-1}(b))_1))\otimes\alpha_H^p\beta_H^q((\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_1)\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b))_2)_{(-1)})(h_{21}\beta_H^{-1}(g_1))\otimes\beta_B((\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_1)\triangleright\beta_B^{-1}(b))_2)_{(0)})\otimes\beta_H(h_{22})g_2\overset{(H1)}{=\!=}$$
$$a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright\beta_B^{-1}(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{11})\triangleright\beta_B^{-1}(b_1)))\otimes\alpha_H^p\beta_H^q((\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{12})\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b_2)))_{(-1)})(h_{21}\beta_H^{-1}(g_1))\otimes\beta_B((\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{12})\triangleright\beta_B^{-1}(b_2)))_{(0)})\otimes\beta_H(h_{22})g_2\overset{(G1)}{=\!=}$$
$$a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright\beta_B^{-1}(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{11})\triangleright\beta_B^{-1}(b_1)))\otimes\alpha_H^p\beta_H^q(\beta_B(a_{2(0)})_{(-1)}(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{12})\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b_2))_{(-1)})(h_{21}\beta_H^{-1}(g_1))\otimes\beta_B(\beta_B(a_{2(0)})_{(0)}(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{12})\triangleright\beta_B^{-1}(b_2))_{(0)})\otimes\beta_H(h_{22})g_2\overset{(CM2)}{=\!=}$$
$$a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright\beta_B^{-1}(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{11})\triangleright\beta_B^{-1}(b_1)))\otimes\alpha_H^p\beta_H^q(\beta_B(a_{2(0)(-1)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{12})\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b_2))_{(-1)})(h_{21}\beta_H^{-1}(g_1))\otimes\beta_B(\beta_B(a_{2(0)(0)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{12})\triangleright\beta_B^{-1}(b_2))_{(0)})\otimes\beta_H(h_{22})g_2\overset{(C4)}{=\!=}$$
$$a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright\beta_B^{-1}(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{11})\triangleright\beta_B^{-1}(b_1)))\otimes(\alpha_H^p\beta_H^{q+1}(a_{2(0)(-1)})\alpha_H^p\beta_H^q((\alpha_H^{m+1}\beta_H^n(h_{121})\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b_2))_{(-1)}))(\beta_H(h_{122})\beta_H^{-1}(g_1))\otimes\beta_B(\beta_B(a_{2(0)(0)})(\alpha_H^{m+1}\beta_H^n(h_{121})\triangleright\beta_B^{-1}(b_2))_{(0)})\otimes h_2g_2\overset{(A4)}{=\!=}$$
$$a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright\beta_B^{-1}(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{11})\triangleright\beta_B^{-1}(b_1)))\otimes(\alpha_H^p\beta_H^{q+1}(a_{2(0)(-1)})(\alpha_H^{p-1}\beta_H^q((\alpha_H^{m+1}\beta_H^n(h_{121})\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b_2))_{(-1)})h_{122}))g_1\otimes\beta_B^2(a_{2(0)(0)})\beta_B((\alpha_H^{m+1}\beta_H^n(h_{121})\triangleright\beta_B^{-1}(b_2))_{(0)})\otimes h_2g_2\overset{(R5)}{=\!=}a_1(\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)})\triangleright$$
$$(\alpha_H^m\beta_H^{n-1}(h_{11})\triangleright\beta_B^{-2}(b_1)))\otimes(\alpha_H^p\beta_H^{q+1}(a_{2(0)(-1)})\alpha_H^{-1}(\alpha_H(h_{121})\alpha_H^{p+1}\beta_H^{q-1}(b_{2(-1)})))g_1\otimes$$
$$\beta_B^2(a_{2(0)(0)})(\alpha_H^m\beta_H^{n+1}(h_{122})\triangleright b_{2(0)})\otimes h_2g_2\overset{(CM4)}{=\!=}a_1(\alpha_H^{m+p+1}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)1})\triangleright$$
$$(\alpha_H^m\beta_H^{n-1}(h_{11})\triangleright\beta_B^{-2}(b_1)))\otimes(\alpha_H^p\beta_H^{q+1}(a_{2(-1)2})\alpha_H^{-1}(\alpha_H(h_{121})\alpha_H^{p+1}\beta_H^{q-1}(b_{2(-1)})))g_1\otimes$$
$$\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^{n+1}(h_{122})\triangleright b_{2(0)})\otimes h_2g_2\overset{(M4)}{=\!=}a_1((\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)1})\alpha_H^m\beta_H^{n-1}(h_{11}))\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b_1))\otimes(\alpha_H^p\beta_H^{q+1}(a_{2(-1)2})(h_{121}\alpha_H^p\beta_H^{q-1}(b_{2(-1)})))g_1\otimes\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^{n+1}(h_{122})\triangleright b_{2(0)})\otimes h_2g_2\overset{(C4)}{=\!=}$$
$$a_1((\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)1})\alpha_H^m\beta_H^{n-1}(h_{11}))\triangleright\beta_B^{-1}(b_1))\otimes(\alpha_H^p\beta_H^{q+1}(a_{2(-1)2})(\alpha_H^{-1}(h_{12})\alpha_H^p\beta_H^{q-1}(b_{2(-1)})))g_1\otimes$$
$$\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{21})\triangleright b_{2(0)})\otimes\beta_H(h_{22})g_2\overset{(A4)}{=\!=}a_1((\alpha_H^{m+p}\beta_H^{n+q}(a_{2(-1)1})\alpha_H^m\beta_H^{n-1}(h_{11}))\triangleright$$
$$\beta_B^{-1}(b_1))\otimes(\alpha_H^p\beta_H^{q+1}(a_{2(-1)2})h_{12})(\alpha_H^p\beta_H^q(b_{2(-1)})\beta_H^{-1}(g_1))\otimes$$
$$\beta_B(a_{2(0)})(\alpha_H^m\beta_H^n(h_{21})\triangleright b_{2(0)})\otimes\beta_H(h_{22})g_2=\Delta_{B\times_q^pH}(a\otimes h)\Delta_{B\times_q^pH}(b\otimes g).$$

剩下的易证.证毕.

注记 7　(1)当 $m=1,n=-1,p=-1,q=1$ 时可得文献[6]中定理 1.

(2)当 $\alpha=\beta,m=0,n=0,p=0,q=0$ 时可得文献[4]中定理 3.5.

(3)当 $\alpha=\beta,n=0,q=0$ 时可得文献[5]中定理 3.6.

命题 3　设 $(B^{\#m,p}_{\times n,q}H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 是广义双积 MBH 双代数,H 是带有对极 S_H 的 MBH-Hopf 代数,在 $Hom(B,B)$ 中 $S_B:B\to B$ 是 Id_B 的卷积逆,并且满足 $S_B\circ\alpha_B=\alpha_B\circ S_B,S_B\circ\beta_B=\beta_B\circ S_B$,则 $(B^{\#m,p}_{\times n,q}H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ 是 MBH-Hopf 代数.对极 S 定义为

$$S(b\otimes h)=(1_B\otimes S_H(\alpha_H^p\beta_H^{q-1}(b_{(-1)})\alpha_H^{-1}\beta_H^{-1}(h)))(S_B(b_{(0)})\otimes1_H),$$

其中 $b\in B,h\in H,m,n,p,q\in\mathscr{Z}$.

证明　按照定义直接可证.

注记 8　(1)当 $m=1,n=-1,p=-1,q=1$ 时可得文献[6]中命题 3,其中对极 S 定义应为 $S(b\otimes h)=(1_B\otimes S_H(\alpha_H^{-1}(b_{(-1)})\alpha_H^{-1}\beta_H^{-1}(h)))(S_B(b_{(0)})\otimes1_H)$.

(2)当 $\alpha=\beta,m=0,n=0,p=0,q=0$ 时可得文献[4]中命题 3.6.

(3)当 $\alpha=\beta,n=0,q=0$ 时可得文献[5]中命题 3.8.

3　MBH-Yetter-Drinfeld 范畴

定义 10　设 (H,α_H,β_H,S) 是 MBH-Hopf 代数,$(U,\triangleright,\alpha_U,\beta_U)$ 是左 H- 模并且 $(U,\rho,\alpha_U,\beta_U)$ 是左 H-余模(写作 $\rho(u)=u_{(-1)}\otimes u_{(0)}$). 如果下面条件成立:

(HYD)　$(\alpha_H^k\beta_H^\ell(g_1)\triangleright u)_{(-1)}g_2\otimes(\alpha_H^k\beta_H^\ell(g_1)\triangleright u)_{(0)}=g_1\alpha_H(u_{(-1)})\otimes\alpha_H^{k-1}\beta_H^\ell(g_2)\triangleright u_{(0)}$,

其中 $g\in H, u\in U, k,\ell\in\mathscr{Z}$.则$(U,\triangleright,\rho,\alpha_U,\beta_U)$是(左 - 左)MBH-Yetter-Drinfeld 模.MBH-Yetter-Drinfeld 模范畴用${}_H^H\mathrm{HYD}^{(k,\ell)}$表示.

注记 9 (1)(HYD)条件等价于$(R5)$,i.e.,

$\alpha_H^p\beta_H^{q-1}((\alpha_H^m\beta_H^{n+1}(h_1)\triangleright u)_{(-1)})h_2\otimes(\alpha_H^m\beta_H^{n+1}(h_1)\triangleright u)_{(0)}=h_1\alpha_H^{p+1}\beta_H^{q-1}(u_{(-1)})\otimes\alpha_H^{m-1}\beta_H^{n+1}(h_2)\triangleright u_{(0)}$.

(2)当 $\alpha=\beta, m=0, n=0, p=0, q=0$ 时可得文献[4]中定义 4.1.

(3)当 $\alpha=\beta, n=0, q=0$ 时可得文献[5]中定义 4.1.

下面结果易证:

命题 4 等式(HYD)等价于下面形式:

$$(\mathrm{HYD})'\quad \rho(\alpha_H^k\beta_H^\ell(g)\triangleright u)=(g_{11}\alpha_H^{-1}(u_{(-1)}))S(g_2)\otimes\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(g_{12})\triangleright u_{(0)},$$

其中 $g\in H, u\in U$ 和 $k,\ell\in\mathscr{Z}$.

定理 2 如果(U,α_U,β_U),(V,α_V,β_V)是 MBH-Yetter-Drinfeld 模,则$(U\otimes V,\alpha_{U\otimes V}=\alpha_U\otimes\alpha_V,\beta_{U\otimes V}=\beta_U\otimes\beta_V)$是 MBH-Yetter-Drinfeld 模,其中模作用和余模作用分别是:

$$h\triangleright(u\otimes v)=h_1\triangleright u\otimes h_2\triangleright v,$$
$$\rho(u\otimes v)=u_{(-1)}v_{(-1)}\otimes u_{(0)}\otimes v_{(0)},$$

其中 $u\in U, v\in V$ 和 $h\in H$.

证明 下面只验证条件$(HYD)'$成立,其他证明省略.

$$\begin{aligned}
&\rho(\alpha_H^k\beta_H^\ell(h)\triangleright(u\otimes v))=\rho(\alpha_H^k\beta_H^\ell(h_1)\triangleright u\otimes\alpha_H^k\beta_H^\ell(h_2)\triangleright v)=(\alpha_H^k\beta_H^\ell(h_1)\triangleright u)_{(-1)}(\alpha_H^k\beta_H^\ell(h_2)\triangleright v)_{(-1)}\otimes\\
&(\alpha_H^k\beta_H^\ell(h_1)\triangleright u)_{(0)}\otimes(\alpha_H^k\beta_H^\ell(h_2)\triangleright v)_{(0)}\overset{(\mathrm{HYD})'}{=\!=}((h_{111}\alpha_H^{-1}(u_{(-1)}))S(h_{12}))((h_{211}\alpha_H^{-1}(v_{(-1)})S(h_{22}))\otimes\\
&(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright u_{(0)})\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{212})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{C4})}{=\!=}((h_{111}\alpha_H^{-1}(u_{(-1)}))S(\alpha_H(h_{121})))((\alpha_H^{-1}\beta_H(h_{122})\\
&\alpha_H^{-1}(v_{(-1)}))S(h_{22}))\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright u_{(0)})\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^{\ell-1}(h_{21})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{A4})}{=\!=}(\alpha_H(h_{111})u_{(-1)})(S(\alpha_H(h_{121}))\\
&((\alpha_H^{-1}(h_{122})\alpha_H^{-1}\beta_H^{-1}(v_{(-1)}))S(\beta_H^{-1}(h_{22}))))\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright u_{(0)})\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^{\ell-1}(h_{21})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{A4})}{=\!=}\\
&(\alpha_H(h_{111})u_{(-1)})(((S(\alpha_H^{-1}(h_{121}))\alpha_H^{-1}(h_{122}))\alpha_H^{-1}(v_{(-1)}))S(h_{22}))\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright u_{(0)})\otimes\\
&(\alpha_H^{k+1}\beta_H^{\ell-1}(h_{21})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{D5})}{=\!=}(\alpha_H(h_{111})u_{(-1)})((\varepsilon(h_{12})\alpha_H^{-1}\beta_H(v_{(-1)}))S(h_{22}))\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright\\
&u_{(0)})\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^{\ell-1}(h_{21})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{C4})}{=\!=}(\alpha_H(h_{111})u_{(-1)})((\varepsilon(h_{121})\alpha_H^{-1}\beta_H(v_{(-1)}))S(\beta_H^{-1}(h_2)))\otimes\\
&(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright u_{(0)})\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{122})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{C5})}{=\!=}(\alpha_H(h_{111})u_{(-1)})(\alpha_H^{-1}\beta_H(v_{(-1)})S(\beta_H^{-1}(h_2)))\otimes\\
&(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright u_{(0)})\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^{\ell-1}(h_{12})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{A4})}{=\!=}(\alpha_H(h_{111})\alpha_H^{-1}(u_{(-1)}v_{(-1)}))S(h_2)\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{112})\triangleright\\
&u_{(0)})\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^{\ell-1}(h_{12})\triangleright v_{(0)})\overset{(\mathrm{C4})}{=\!=}(h_{11})\alpha_H^{-1}(u_{(-1)}v_{(-1)}))S(h_2)\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{121})\triangleright u_{(0)})\otimes\\
&(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{122})\triangleright v_{(0)})=(h_{11})\alpha_H^{-1}(u_{(-1)}v_{(-1)}))S(h_2)\otimes(\alpha_H^{k+1}\beta_H^\ell(h_{12})\triangleright(u_{(0)}\otimes v_{(0)})).
\end{aligned}$$

命题 5 设$(H,\mu_H,\Delta_H,\alpha_H,\beta_H)$是 MBH 双代数,并且$(U,\alpha_U,\beta_U)$,$(V,\alpha_V,\beta_V)$,$(W,\alpha_W,\beta_W)$是 MBH-Yetter-Drinfeld 模.定义线性映射:

$$a_{U,V,W}:(U\otimes V)\otimes W\to U\otimes(V\otimes W),(u\otimes v)\otimes w\mapsto\alpha_U(u)\otimes(v\otimes\beta_W^{-1}(w)),$$

则 $a_{U,V,W}$ 是左 H- 模和左 H- 余模同态.

证明 直接验证可得.

注记 10 设(H,α,β)是 MBH-Hopf 代数.则(K,Id,Id)是 MBH-Yetter-Drinfeld 模,其中左 H- 模 $H\otimes K\to K, h\otimes t\mapsto\varepsilon(h)t$,和左 H- 余模 $K\to H\otimes K, t\mapsto 1_H\otimes t$.

命题 6 MBH-Yetter-Drinfeld 模范畴 ${}_H^H\mathrm{HYD}^{(k,\ell)}$ 是张量范畴,其中张量结构和单位 $I=(K,Id,Id)$ 分别在定理 2 和注 10 中给出.对任意的(U,α_U,β_U),(V,α_V,β_V),$(W,\alpha_W,\beta_W)\in{}_H^H HYD^{(k,\ell)}$,其中结合子和单位限制分别为

$$a_{U,V,W}:(U\otimes V)\otimes W\to U\otimes(V\otimes W),(u\otimes v)\otimes w\mapsto\alpha_U(u)\otimes(v\otimes\beta_W^{-1}(w)),$$
$$l_V:K\otimes V\to V, t\otimes v\mapsto t\beta_V(v), r_V:V\otimes K\to V, v\otimes t\mapsto t\alpha_V(v).$$

证明　直接验证可得.

参　考　文　献

[1] RADFORD D E.The structure of Hopf algebra with a projection[J].J Algebra，1985，92：322-347.

[2] RADFORD D E.Hopf Algebras[M].Singapore：World Scientic，2012.

[3] 马天水，景俊霞，景艳艳.一类交叉双积[J].河南师范大学学报（自然科学版），2014，42(2)：16-20.
MA T S，JING J X，JING Y Y.A class of crossed biproducts[J].Journal of Henan Normal University（Natural Science Edition），2014，42(2)：16-20.

[4] LIU L，SHEN B L.Radford′s biproducts and Yetter-Drinfeld modules for monoidal Hom-Hopf algebras[J].J Math Phys，2014，55：031701.

[5] MA T S，LIU L L，CHEN L Y.Radford (m,n)-biproduct and $(m+n)$-Yetter-Drinfeld category[J].Comm Algebra，2020，48：3285-3306.

[6] 郑慧慧，王永忠，马天水.Radford 双积 monoidal BiHom-Hopf 代数[J].河南师范大学学报（自然科学版），2016，44(6)：37-42.
ZHENG H H，WANG Y Z，MA T S.Radford biproduct monoidal BiHom-Hopf algebra[J].Journal of Henan Normal University（Natural Science Edition），2016，44(6)：37-42.

[7] 董丽红，薛栓.一类余拟三角 Hom-Hopf 代数[J].河南师范大学学报（自然科学版），2016，44(6)：43-48.
DONG L H，XUE S.A class of coquasitriangular Hom-Hopf algebras[J].Journal of Henan Normal University（Natural Science Edition），2016，44(6)：43-48.

[8] GRAZIANI G，MAKHLOUF A，MENINI C，et al.BiHom-Associative algebras，BiHom-Lie algebras and BiHom-Bialgebras[J].SIGMA，2015，11：086.

[9] HARTWING J T，LARSSON D，SILVESTROV S.Deformations of Lie algebras using σ-derivations[J].J Algebra，2006，295：314-361.

[10] 焦争鸣，黄功宇.Hom-Hopf 元(映射)与 Hom-Hopf(Pentagon)方程的解[J].河南师范大学学报（自然科学版），2016，44(3)：1-6.
JIAO Z M，HUANG G Y.Hom-Hopf elements (maps) and the solutions of Hom-Hopf (Pentagon) equations[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)，2016，44(3)：1-6.

[11] LIU L，MAKHLOUF A，MENINI C，et al.$\{\sigma,\tau\}$-Rota-Baxter operators，infinitesimal Hom-bialgebras and the associative (Bi)Hom-Yang-Baxter equation[J].Canad Math Bull，2019，62(2)：355-372.

[12] LIU L，MAKHLOUF A，MENINI C，et al.Rota-Baxter operators on BiHom-associative algebras and related structures[J].Colloq Math，2020，161：263-294.

[13] LIU L，MAKHLOUF A，MENINI C，et al.BiHom-Novikov algebras and infinitesimal BiHom-bialgebras[J].J Algebra，2020，560：1146-1172.

[14] MA T S，YANG H Y，LIU L L，et al.On unified Hom-Yetter-Drinfeld categories[J].J Geom Phys，2019，144：81-107.

[15] MA T S，YANG H Y，ZHANG L Y，et al.Quasitriangular covariant monoidal BiHom-bialgebras，associative monoidal BiHom-Yang-Baxter equations and Rota-Baxter paired monoidal BiHom-modules[J].Colloq Math，2020，161：189-221.

[16] MA T S，YANG H Y.Drinfeld double for infinitesimal BiHom-bialgebras[J].Adv Appl Clifford Algebras，2020，30(3)：42.

[17] 王颖，杜凤丽.$(n-3)$-filiform 李代数的 Hom-结构和保积 Hom-结构[J].河南师范大学学报（自然科学版），2018，46(3)：1-5.
WANG Y，DU F L.Hom-structures and the multiplicative Hom-structures of $(n-3)$-filiform Lie algebras[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)，2018，46(3)：1-5.

A class of generalized biproduct and related Yetter-Drinfeld category

Ma Tianshui，Yang Haiyan

(School of Mathematics and Information Science，Henan Normal University，Xinxiang 453007，China)

Abstract：In this article，firstly，we introduce the notions of a generalized smash product MBH-algebra $(B\#_n^m H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ and a generalized smash coproduct MBH-coalgebra $(B\times_q^p H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ .Furthermore，we get the necessary and sufficient conditions for $(B\#_n^m H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ and $(B\times_q^p H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$ to be a MBH-bialgebras $(B^{\#m,p}_{\times n,q}H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$. At last，we provide a class of monoidal category which is related to $(B^{\#m,p}_{\times n,q}H, \alpha_B\otimes\alpha_H, \beta_B\otimes\beta_H)$.

Keywords：Radford biproduct；BiHom-algebra；Yetter-Drinfeld category

[责任编校　陈留院　赵晓华]