文章编号:1000-2367(2018)04-0120-05　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.04.019

单调加权互补问题的路径跟踪算法

韩平,刘长河,尚有林

(河南科技大学 数学与统计学院,河南 洛阳 471023)

摘　要:加权互补问题是线性互补问题的推广模型,具有重要的应用背景.分析了加权互补问题的中心路径及其邻域,基于新定义的邻域,提出了求解单调加权互补问题的一个路径跟踪算法.取邻域中一点为初始点,证明了算法的 $\mathbf{O}(nL)$ 迭代复杂性.当加权互补问题中的权向量 w 为零向量时,该中心路径及其邻域和线性互补问题中的定义相同,该算法即为求解线性互补问题的宽邻域路径跟踪算法.

关键词:单调加权互补问题;路径跟踪算法;中心路径;宽邻域;多项式复杂性

中图分类号:O221.2　　**文献标志码:**A

考虑加权互补问题(weighted complementarity problem):

$$\text{(wCP)}\qquad \begin{cases} xs=w, x\geq 0, s\geq 0, \\ Px+Qs+Ry=a, \end{cases} \tag{1}$$

其中,$P\in\mathbf{R}^{(n+m)\times n}$,$Q\in\mathbf{R}^{(n+m)\times n}$,$R\in\mathbf{R}^{(n+m)\times n}$ 是给定的矩阵,$a\in\mathbf{R}^{n+m}$ 是给定的向量,$w\in\mathbf{R}^n_+$ 是给定的权向量,矩阵 R 是列满秩的.上面第一个等式中,xs 表示向量 x 和 s 对应分量的乘积所组成的向量.$x\geq 0$ 表示向量 x 的所有元素非负,即 $x\in\mathbf{R}^n_+$.同样地,$x>0$ 表示向量 x 的所有元素是正数,即,$x\in\mathbf{R}^n_{++}$.当 $P\Delta x+Q\Delta s+R\Delta y=0$ 蕴含 $\Delta x^{\mathrm{T}}\Delta s\geq 0$ 时,称问题(1)是单调的.当 w 为零向量时,问题(1)即为经典的线性互补问题(linear complementarity problem).线性互补问题包含了线性规划和凸二次规划问题两类重要数学规划问题[1-2].加权互补问题(wCP)由 Potra[3-4]提出,它是传统互补问题(LCP)的一个推广,具有重要的应用背景.经济领域中一些均衡问题[3,5],如 Fisher 均衡问题模型可以转化为一个 wCP.wCP 在数学规划中的应用参看文献[3,6].虽然 LCP 的一些理论和算法可以推广到 wCP,但当 w 为一般非负向量时,wCP 的理论和算法变得比 LCP 更复杂.另一方面,文献[3]指出,Fisher 均衡问题可以化为一个非线性互补问题,也可以化为一个线性的 wCP,而后者比前者更有可能设计高效的解决算法.

Ye 算法[5]可以看作求解 wCP 特例的内点算法,但是 Ye 算法中定义的跟踪路径是非光滑的.文献[3-4]研究了 wCP 的一般模型,定义了加权中心路径,若 wCP 单调且严格可行,证明问题有解.文献[7]提出了求解 wCP 的光滑牛顿算法并证明了收敛性.在线性规划的路径跟踪内点算法中,所使用的中心路径的邻域对算法的理论复杂性分析和计算有效性都具有重要影响,在文献[3-5]中所提出的路径跟踪算法均采用基于 2-范数的窄邻域 N_2,给出了算法的理论复杂性分析.本文定义了 wCP 的一个新的中心路径,它是线性规划的原始-对偶中心路径的推广[8-10],给出了 3 个不同的邻域,证明了它们之间的包含关系,并基于宽邻域 $N(\tau,\beta)$ 提出了一个路径跟踪算法.通过理论分析,证明了算法的 $\mathbf{O}(nL)$ 迭代复杂性.当 wCP 中的权向量 w 为零向量时,该中心路径及其邻域和线性互补问题中的定义相同,该算法即为求解线性互补问题的宽邻域路径跟踪算法[10].

收稿日期:2017-08-17;**修回日期:**2018-03-22.

基金项目:国家自然科学基金(11471102;11701150);河南省高等学校重点基础研究项目(16A110012).

作者简介:韩平(1989-),女,河南南阳人,河南科技大学硕士研究生,研究方向是互补问题的理论与算法,E-mail:1249871253@qq.com.

通信作者:刘长河,E-mail:changheliu@163.com.

1　中心路径及其邻域

首先，给出 wCP 的可行域 $F=\{(x,s,y)\in \mathbf{R}_+^n\times\mathbf{R}_+^n\times\mathbf{R}^m : Px+Qs+Ry=a\}$，严格可行域为 $F^0=\{(x,s,y)\in F: xs>w, x>0, s>0\}$.对任意的常数 $\mu>0$，wCP 的扰动问题：

$$\begin{cases} xs-w=\mu e, x>0, s>0, \\ Px+Qs+Ry=a, \end{cases} \tag{2}$$

存在唯一解 (x^μ,s^μ,y^μ)，其中 e 为分量全为 1 的列向量.当变动参数 μ 时，便得到了 wCP 的中心路径，即 $C=\{(x^\mu,s^\mu,y^\mu): x^\mu s^\mu-w=\mu e, Px^\mu+Qs^\mu+Ry^\mu=a, x^\mu>0, s^\mu>0, \mu>0\}$.

下面讨论中心路径的邻域.2-范数邻域：

$$N_2(\eta)=\{(x,s,y)\in F^0 : \|xs-w-\mu e\|_2\le\eta\mu\},$$

其中，$\eta\in(0,1)$ 为常数，$\mu=e^{\mathrm{T}}(xs-w)/n$. $-\infty$- 范数邻域：

$$N_{-\infty}(\eta)=\{(x,s,y)\in F^0 : \|(xs-w-\mu w)^-\|_\infty\le\eta\mu\},$$

其中，u^- 表示向量 u 的负的部分，即 $u^-=\min\{u,0\}$；类似的记 $u^+=\max\{u,0\}$. $\|(xs-w-\mu e)^-\|_\infty\le\eta\mu$ 等价于 $-(xs-w-\mu e)^-\le\eta\mu e$，即 $(xs-w-\mu e)^-\ge-\eta\mu e$，且 $(xs-w-\mu e)^+\ge-\eta\mu e$ 是显然的，因此有 $xs-w-\mu e\ge-\eta\mu e$，即 $xs-w\ge(1-\eta)\mu e$.故上述 $-\infty$- 范数邻域可等价写作

$$N_{-\infty}(\eta)=\{(x,s,y)\in F^0 : xs-w\ge(1-\eta)\mu e\}.$$

类似于 Ai-Zhang 邻域[11]，定义邻域：$N(\tau,\beta)=\{(x,s,y)\in F^0 : \|[\tau\mu e-(xs-w)]^+\|_2\le\beta\tau\mu\}$，其中，$\beta,\tau\in(0,1)$.

上述邻域之间有下列包含关系：$C\subset N_2(\eta)\subset N_{-\infty}(\eta)$，$\forall\,\eta\in(0,1)$，

$$N_{-\infty}(1-\tau)\subset N(\tau,\beta)\subset N_{-\infty}(1-(1-\beta)\tau),\ \forall\,\beta,\tau\in(0,1), \tag{3}$$

其中只需要证明最后的包含关系，其他包含关系是显然的.当迭代点 $(x,s,y)\in N(\tau,\beta)$ 时，有 $\|[\tau\mu e-(xs-w)]^+\|_2=\sqrt{\sum_{x_is_i-w_i<\tau\mu}[\tau\mu-(x_is_i-w_i)]^2}\le\beta\tau\mu$.故对任意 $1\le i\le n$ 有 $\tau\mu-(x_is_i-w_i)\le\beta\tau\mu$，即 $x_is_i-w_i\ge(1-\beta)\tau\mu$.所以 $(x,s,y)\in N_{-\infty}(1-(1-\beta)\tau)$.因此 $N(\tau,\beta)\subset N_{-\infty}(1-(1-\beta)\tau)$.

2　路径跟踪算法

设当前点 $(x,s,y)\in F^0$，由方程组(2)的牛顿方程计算迭代方向 $(\Delta x,\Delta s,\Delta y)$ 如下：

$$\begin{cases} x\Delta s+s\Delta x=\tau\mu e-(xs-w), \\ P\Delta x+Q\Delta s+R\Delta y=0, \end{cases} \tag{4}$$

其中，$\tau\in(0,1)$，$\mu=e^{\mathrm{T}}(xs-w)/n$. 则新的迭代点为：

$$(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha)):=(x,s,y)+\alpha(\Delta x,\Delta s,\Delta y),$$

其中，步长 $\alpha\in(0,1]$ 满足 $(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in F^0$，且 $\mu(\alpha):=e^{\mathrm{T}}(x(\alpha)s(\alpha)-w)/n<\mu$.

注 1　特别地，当 $w=0$ 时，问题(1)为经典的单调线性互补问题，由(2)式定义的中心路径即为经典的中心路径，此时，在严格可行域的定义中，条件 $xs>w$ 可由 $x>0$ 和 $s>0$ 得到，上面的迭代过程即为经典的路径跟踪算法(参见文献[10-11]).

下面给出一个在算法的理论分析中起到重要作用的性质.

性质 1　设 $(x,s,y)\in F^0$ 迭代方向 $(\Delta x,\Delta s,\Delta y)$ 是下面方程组的解，

$$\begin{cases} x\Delta s+s\Delta x=r, \\ P\Delta x+Q\Delta s+R\Delta y=0, \end{cases} \tag{5}$$

若 $\Delta x^{\mathrm{T}}\Delta s\ge0$，且 $r>-(xs-w)$，则对任意的 $\alpha\in[0,1]$，有 $\mu(\alpha)>0$；并且，若存在 $\bar\alpha\in(0,1]$，使得 $x(\bar\alpha)s(\bar\alpha)>w$，则对任意 $\alpha\in[0,\bar\alpha]$，都有 $(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in F^0$.

证明　由 $\mu(\alpha)=e^{\mathrm{T}}[(x+\alpha\Delta x)(s+\alpha\Delta s)-w]/n=e^{\mathrm{T}}[xs-w+\alpha r+\alpha^2\Delta x\Delta s]/n$ 可得 $\mu(0)=\mu>0$，且当 $0<\alpha\le1$ 时，

$$\mu(\alpha)=e^{\mathrm{T}}[(xs-w)+\alpha r]/n+\alpha^2\Delta x^{\mathrm{T}}\Delta s/n>e^{\mathrm{T}}[(xs-w)-\alpha(xs-w)]/n=(1-\alpha)e^{\mathrm{T}}(xs-w)/n\geq 0 \tag{6}$$

其中,第一个不等号由 $\Delta x^{\mathrm{T}}\Delta s\geq 0$,$0<\alpha\leq 1$ 及 $r>-(xs-w)$ 得到.

由 $x(\bar{\alpha})s(\bar{\alpha})=xs+\bar{\alpha}r+\bar{\alpha}^2\Delta x\Delta s$ 得 $\Delta x\Delta s=\frac{1}{\bar{\alpha}^2}(x(\bar{\alpha})s(\bar{\alpha})-xs-\bar{\alpha}r)$.当 $0<\alpha\leq\bar{\alpha}$ 时,有

$$x(\alpha)s(\alpha)-w=xs+\alpha r+\alpha^2\Delta x\Delta s-w=xs-w+\alpha r+(\alpha/\bar{\alpha}^2)(x(\bar{\alpha})s(\bar{\alpha})-xs-\bar{\alpha}r)>$$
$$xs-w+(\alpha-\alpha^2/\bar{\alpha})r-(\alpha/\bar{\alpha})^2(xs-w)=[1-(\alpha/\bar{\alpha})^2](xs-w)+\alpha(1-\alpha/\bar{\alpha})r\geq$$
$$(1-\alpha/\bar{\alpha})(xs-w)-\alpha(1-\alpha/\bar{\alpha})(xs-w)=(1-\alpha)(1-\alpha/\bar{\alpha})(xs-w)\geq 0,$$

其中,第 1 个不等式由 $x(\bar{\alpha})s(\bar{\alpha})>w$ 得到,第 2 个不等式由$(\alpha/\bar{\alpha})^2\leq\alpha/\bar{\alpha}$ 及 $r>-(xs-w)$ 得到.因此,对 $\forall\alpha\in[0,\bar{\alpha}]$,有 $x(\alpha)s(\alpha)>w$.又由 $x(0)>0$,$s(0)>0$ 及连续性可知对任意的 $\alpha\in[0,\bar{\alpha}]$,都有 $x(\alpha)>0$,$s(\alpha)>0$.故$(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in F^0$.

在本文的算法中,采用的邻域为 $N(\tau,\beta)$ 邻域,迭代步长由下面的一维搜索得到

$$\min_{0\leq\alpha\leq 1}\{e^{\mathrm{T}}(x(\alpha)s(\alpha)-w):(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in N(\tau,\beta)\}. \tag{7}$$

算法 1(路径跟踪算法) 输入:精度 $\varepsilon>0$.初始点$(x^0,s^0,y^0)\in N(\tau,\beta)$.置 $k:=0$.

步骤 1 若 $e^{\mathrm{T}}(x^ks^k-w)\leq\varepsilon$ 则停.

步骤 2 由线性方程组(4)式计算迭代方向 $(\Delta x^k,\Delta s^k,\Delta y^k)$,由一维搜索(7) 式计算步长 $\alpha^k\in(0,1]$.

步骤 3 令 $(x^{k+1},s^{k+1},y^{k+1}):=(x(\alpha^k),s(\alpha^k),y(\alpha^k))$,置 $k:=k+1$,转步骤 1.

注 2 在后面的理论分析中,可以证明,当取适当参数时,$\mu(\alpha)$ 上$[0,1]$严格单调递减,且存在 $\bar{\alpha}\in(0,1)$,使得对任意 $\alpha\in[0,\bar{\alpha}]$,都有$(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in N(\tau,\beta)$. 则一维搜索(7)式可以等价的写成:

$$\max\{\alpha\in[0,1]:(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in N(\tau,\beta)\}. \tag{8}$$

3 算法的收敛性分析

引理 1[12] 设 $u,v\in P^n$,$u^{\mathrm{T}}v\geq 0$,且 $u+v=r$,则 $\|(uv)^-\|_1\leq\|(uv)^+\|_1\leq\frac{1}{4}\|r\|^2$.

引理 2 设 $(x,s,y)\in N(\tau,\beta)$,$\beta\leq 1/2$,则 $\|(\Delta x\Delta s)^-\|_1\leq\|(\Delta x\Delta s)^+\|_1\leq(\beta\tau+n)\mu/4$.

证明 在方程(4)式的第 1 个等式两边同乘以$(xs)^{-1/2}$得

$$x^{-1/2}s^{1/2}\Delta x+x^{1/2}s^{-1/2}\Delta s=(xs)^{-1/2}[\tau\mu e-(xs-w)].$$

记 $u=x^{-1/2}s^{1/2}\Delta x$,$v=x^{1/2}s^{-1/2}\Delta s$,$r=(xs)^{-1/2}[\tau\mu e-(xs-w)]$,则 $u+v=r$,且 $u^{\mathrm{T}}v\geq 0$. 故由引理 1 得

$$\|(\Delta x\Delta s)^-\|_1\leq\|(\Delta x\Delta s)^+\|_1\leq\frac{1}{4}\|(xs)^{-1/2}[\tau\mu e-(xs-w)]\|^2=(1/4)\|(xs)^{-1/2}[\tau\mu e-(xs-w)]^++(xs)^{-1/2}[\tau\mu e-(xs-w)]^-\|^2=(1/4)[\|(xs)^{-1/2}[\tau\mu e-(xs-w)]^+\|^2+\|(xs)^{-1/2}[\tau\mu e-(xs-w)]^-\|^2]\leq(1/4)[\frac{\|[\tau\mu e-(xs-w)]^+\|^2}{\min(x_is_i-w_i)}+\|(xs-w)^{-1/2}[(xs-w)-\tau\mu e]^+\|^2]\leq(1/4)[(\beta\tau\mu)^2/(1-\beta)\tau\mu+\|(xs-w)^{-1/2}(xs-w)^+\|^2]=(1/4)((\beta^2\tau\mu)/(1-\beta)+n\mu)\leq(1/4)(\beta\tau\mu+n\mu), \tag{9}$$

其中第 2 个不等式由 $(x,s,y)\in N(\tau,\beta)$ 及关系式(3)式得到.

引理 3 设 $(x,s,y)\in N(\tau,\beta)$,$\beta\leq 1/2$,$\tau\leq 1/3$,则对任意的 $\alpha\in(0,1]$,有 $\mu(\alpha)<\mu$.

证明 由(6)式得

$$\mu(\alpha)=e^{\mathrm{T}}[(xs-w)+\alpha(\tau\mu e-(xs-w))]/n+\alpha^2\Delta x^{\mathrm{T}}\Delta s/n=\mu+\alpha(\tau\mu-\mu)+\frac{\alpha^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\Delta s_i\leq$$
$$\mu+\alpha(\tau-1)\mu+\frac{\alpha^2}{4n}(\beta\tau+n)\mu\leq\mu-\alpha\mu[1-\tau-(\beta\tau+1)/4]=\mu-\alpha\mu[3/4-\tau-\beta\tau/4]<\mu, \tag{10}$$

其中,第 1 个不等式由引理 2 得到,第 2 个不等式由 $\alpha\leq 1$ 及 $n\geq 1$ 得到.

引理 4 设 $(x,s,y)\in N(\tau,\beta)$,$\beta\leq 1/2$,$\tau\leq 1/3$,则 $\mu(\alpha)$ 在$[0,1]$上严格单调递减.

证明　由(10)式得

$$\mu'(\alpha)=\tau\mu-\mu+\frac{2\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\Delta s_i\leq-(1-\tau)\mu+\frac{2\alpha}{n}\times\frac{1}{4}(\beta\tau+n)\mu\leq$$
$$-\mu[1-\tau-(\beta\tau+1)/2]=-\mu[1/2-\tau-\beta\tau/2]<0,\tag{11}$$

其中，第 1 个不等式由引理 2 得到，第 2 个不等式由 $\alpha\leq 1$ 及 $n\geq 1$ 得到.

记 $h(\alpha)=(xs-w)+\alpha[\tau\mu e-(xs-w)]$，则

$$x(\alpha)s(\alpha)-w=h(\alpha)+\alpha^2\Delta x\Delta s,\tag{12}$$

当 $(x,s,y)\in F^0$ 且 $\alpha\in[0,1]$ 时，$h(\alpha)=(1-\alpha)(xs-w)+\alpha\tau\mu e>0$.

引理 5　设 $(x,s,y)\in N(\tau,\beta)$，若 $\beta\leq 1/2$ 及 $\tau\leq 1/3$，则对任意的 $\alpha\in(0,1]$，有

$$\|(\tau\mu(\alpha)e-h(\alpha))^+\|\leq(1-\alpha)\beta\tau\mu(\alpha).$$

证明　由性质 1 和引理 3 可知，$0<\mu(\alpha)<\mu$，因此

$$\tau\mu(\alpha)e-h(\alpha)\leq\tau\mu(\alpha)e-\frac{\mu(\alpha)}{\mu}h(\alpha)=\frac{\mu(\alpha)}{\mu}[\tau\mu e-h(\alpha)]=(1-\alpha)\frac{\mu(\alpha)}{\mu}[\tau\mu e-(xs-w)],\tag{13}$$

因此

$$\|(\tau\mu(\alpha)e-h(\alpha))^+\|\leq(1-\alpha)\frac{\mu(\alpha)}{\mu}\|[\tau\mu e-(xs-w)]^+\|\leq(1-\alpha)\beta\tau\mu(\alpha).\tag{14}$$

引理 6[12]　对于 $u,v\in P^n$，有三角不等式 $\|(u+v)^+\|\leq\|u^+\|+\|v^+\|$.

由引理 6 和(12)式可得

$$\|[\tau\mu(\alpha)e-(x(\alpha)s(\alpha)-w)]^+\|=\|(\tau\mu(\alpha)e-h(\alpha)-\alpha^2\Delta x\Delta s)^+\|\leq\|(\tau\mu(\alpha)e-h(\alpha))^+\|+$$
$$\|(-\alpha^2\Delta x\Delta s)^+\|=\|(\tau\mu(\alpha)e-h(\alpha))^+\|+\alpha^2\|(\Delta x\Delta s)^-\|.\tag{15}$$

定理 1　设 $(x,s,y)\in N(\tau,\beta)$，$\beta\leq 1/2$，$\tau\leq 1/3$.则当 $\alpha\leq 4\beta\tau/(n+5\beta\tau)$ 时，有

$$(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in N(\tau,\beta).$$

证明　由(15)式、引理 2 和引理 5 可得

$$\|[\tau\mu(\alpha)e-(x(\alpha)s(\alpha)-w)]^+\|\leq\|(\tau\mu(\alpha)e-h(\alpha))^+\|+\alpha^2\|(\Delta x\Delta s)^-\|\leq$$
$$(1-\alpha)\beta\tau\mu(\alpha)+\alpha^2(\beta\tau+n)\mu/4=\beta\tau\mu(\alpha)-\alpha[\beta\tau\mu(\alpha)-\alpha(\beta\tau+n)\mu/4].\tag{16}$$

由(6)式得

$$\beta\tau\mu(\alpha)-\alpha(\beta\tau+n)\mu/4\geq\beta\tau(1-\alpha)\mu-\alpha(\beta\tau+n)\mu/4=$$
$$\beta\tau\mu-\alpha(5\beta\tau+n)\mu/4\geq\beta\tau\mu-\frac{4\beta\tau\mu}{5\beta\tau+n}\cdot\frac{5\beta\tau+n}{4}=0,\tag{17}$$

其中第 2 个不等式由 $\alpha\leq 4\beta\tau/(n+5\beta\tau)$ 所得.因此 $\|[\tau\mu(\alpha)e-(x(\alpha)s(\alpha)-w)]^+\|\leq\beta\tau\mu(\alpha)$.由关系式(3) 式可知 $x(\alpha)s(\alpha)-w\geq(1-\beta)\tau\mu(\alpha)>0$，故由性质 1 可得 $(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in F^0$，进而得到 $(x(\alpha),s(\alpha),y(\alpha))\in N(\tau,\beta)$.

定理 2　设 $\beta\leq 1/2$，$\tau\leq 1/3$，则算法 1 至多迭代 $O\left(n\ln\frac{e^{\mathrm{T}}(x^0s^0-w)}{\varepsilon}\right)$ 次后停止.

证明　记 $\bar\alpha=4\beta\tau/(n+5\beta\tau)$.由引理 4，定理 1 及步长的计算公式(8) 式得 $\mu(\alpha)\leq\mu(\bar\alpha)$，故由(10) 式可得 $\mu(\alpha)\leq\mu(\bar\alpha)\leq\mu-\bar\alpha\mu(3/4-\tau-\beta\tau/4)\leq(1-3\bar\alpha/8)\mu$. 因此迭代点满足

$$e^{\mathrm{T}}(x^ks^k-w)\leq(1-3\bar\alpha/8)e^{\mathrm{T}}(x^{k-1}s^{k-1}-w)\leq(1-3\bar\alpha/8)^ke^{\mathrm{T}}(x^0s^0-w).$$

要使 $e^{\mathrm{T}}(x^ks^k-w)\leq\varepsilon$，只需要 $(1-e\bar\alpha/8)^kg^{\mathrm{T}}(x^0s^0-w)\leq\varepsilon$，即

$$k\lg(1-3\bar\alpha/8)+\lg(e^{\mathrm{T}}(x^0s^0-w))\leq\lg\varepsilon.$$

由 $\ln(1+t)\leq t$，只需要 $-k\frac{3\bar\alpha}{8}\leq\lg\frac{\varepsilon}{e^{\mathrm{T}}(x^0s^0-w)}$，从而得出

$$k\geq\frac{8}{3\bar\alpha}\lg\frac{e^{\mathrm{T}}(x^0s^0-w)}{\varepsilon}=\frac{2n+10\beta\tau}{3\beta\tau}\lg\frac{e^{\mathrm{T}}(x^0s^0-w)}{\varepsilon}.$$

由此即得算法的迭代界.

4 结 论

本文研究了 wCP 的中心路径及其邻域,基于所定义的宽邻域提出了一个路径跟踪算法.不同于文献[3－5]中采用的基于 2-范数的窄邻域 N_2,本文算法使用更宽的邻域 $N(\tau,\beta)$.给定邻域中一点为初始点,证明了算法的 $O(nL)$迭代复杂性.当 wCP 中的权向量 w 为零向量时,该中心路径及其邻域和线性互补问题中的定义相同,该算法即为求解线性互补问题的宽邻域路径跟踪算法.本文研究的算法属于可行内点算法,要求初始点属于给定邻域,这对于一般的 wCP 问题并不容易.如何设计和分析 wCP 的不可行内点算法,将是一个有意义的研究方向.

参 考 文 献

[1] 韩继业,修乃华,戚厚铎.非线性互补理论与算法[M].上海:上海科学技术出版社,2006.

[2] Cottle R W,Pang J-S,Stone R E.The Linear Complementarity Problem [M].Boston:Academic Press,1992.

[3] Potra F A.Weighted complementarity problems-a new paradigm for computing equilibria [J].SIAM Journal on Optimization,2012,22(4):1634-1654.

[4] Potra F A.Sufficient weighted complementarity problems [J].Computational Optimization and Applications,2016,64:467-488.

[5] Ye Y.A path to the Arrow-Debreu competitive market equilibrium [J].Mathematical Programming,2008,111(1/2):315-348.

[6] Anstreicher K.Interior-point algorithms for a generalization of linear programming and weighted centering [J].Optimization Methods and Software,2012,27(4/5):605-612.

[7] Zhang J.A smoothing Newton algorithm for weighted linear complementarity problem [J].Optimization Letters,2016,10:499-509.

[8] Kojima M,Mizuno S,Yoshise A.A primal-dual interior point algorithm for linear programming[C]// Megiddo N,ed.Progress in Mathematical Programming:Interior Point and Related Methods.New York:Springer,1989:29-47.

[9] Kojima M,Mizuno S,Yoshise A.A polynomial-time algorithm for a class of linear complementary problems [J].Mathematical Programming,1989,44:1-26.

[10] Wright S J.Primal-Dual Interior-Point Methods [M].Philadelphia:SIAM,1997.

[11] 刘长河,尚有林,李锦睿.基于一类新方向的宽邻域路径跟踪内点算法[J].运筹学学报,2016,20:43-53.

[12] Ai W,Zhang S.An $O(\sqrt{n}L)$ iteration primal-dual path following method,based on wide neighborhoods and large updates,for monotone LCP [J].SIAM Journal on Optimization,2005,16:400-417.

Path-following algorithms for monotone weighted complementarity problems

Han Ping, Liu Changhe, Shang Youlin

(School of Mathematics and Statistics,Henan University of Science and Technology,Luoyang 471023,China)

Abstract: Weighted complementary problem is a generalization of the linear complementary problems, and has important application background.In this paper, we analyze the center path and its neighborhood for weighted complementarity problems, and propose a path-following algorithm for the monotone weighted complementarity problems based on the new defined neighborhood.Given a point in this neighborhood as the starting point, we prove that the iteration complexity of this algorithm is $O(nL)$.When the weight vector is equal to zero vector, the center path and its neighborhood are same with the definition in linear complementarity problems, and our algorithm becomes the path-following algorithm based on wide neighborhood for linear complementarity problem.

Keywords: monotone weighted complementarity problems; path-following algorithm; central path; wide neighborhood; polynomial complexity

[责任编校 陈留院]