文章编号:1000-2367(2017)03-0065-05 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2017.03.009

二阶 Camassa-Holm 方程解的爆破性质研究

丁丹平,孙叶兰

(江苏大学 理学院,江苏 镇江 212000)

摘 要:主要研究在 $k=2$ 的情况下高阶 Camassa-Holm 方程解的爆破性质.首先,通过一系列的先验估计建立了一个新的爆破准则,并且给出了精确的爆破速率;然后,利用 Holder 不等式、Sobolev 不等式和闭集的相关性质给定在新爆破准则下的爆破点集.

关键词:高阶 Camassa-Holm 方程;爆破;爆破点集

中图分类号:O175.23 **文献标志码**:A

由于 Camassa-Holm 方程具有带尖点的孤立波解进而使得它成为浅水波理论研究的重要对象之一,关于 Camassa-Holm 方程的相关研究已经有许多重要的结果.很多人对于 Camassa-Holm 方程及其解的性质进行了深入的研究,如孤波解,双 Hamiltonian 结构,完全可积性等.文献[1-4]研究了浅水波方程在初值条件下 Cauchy 问题整体解的存在性及解的爆破性质、解的适定性、弱解的存在性和在初值不变号的情况下全局解的存在性等.同时,证明了如下结果:若(1) $y_0=u_0-u_{0,xx}\in H^1(S)$,$y_0\neq 0$ 且是奇函数;(2)$x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$时,$y_0$ 是非负的;$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$时,$y_0$ 是非正的,则周期为 1 的 Camassa-Holm 方程 $\partial_t u-\partial_t\partial_x^2 u+3u\partial_x u=2\partial_x u\partial_x^2 u+u\partial_x^3 u$,$t>0$ 的 Cauchy 问题解的爆破点集为 $\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}$[5];文献[6]研究了 Camassa-Holm 方程的初边界值问题解的爆破性质;文献[7]证明了具有 2 分支的 Camassa-Holm 方程解的爆破,并给出了相应的爆破速率;文献[8]通过单调性原理,研究了 $\kappa\neq 0$ 时的 Camassa-Holm 方程 $u_t-u_{xxt}+2\kappa u_x+3uu_x=2u_xu_{xx}+u_{xxx}$,$t>0$,$x\in\mathbf{R}$ 在有限时间内爆破解的问题;文献[9]研究了广义的具有 2 分支的 Camassa-Holm 方程系统的爆破解;文献[10]通过构造单调量同时利用反证法证明了具有 2 分支的 π-Camassa-Holm 方程爆破解的存在性.

文献[11]证明了 Degapperis-Procesi 方程当初值解 $u_0\in H^s(\mathbf{R})$,$s>\dfrac{3}{2}$,$u_0\neq 0$ 且 u_0 是奇函数使得 $y_0=u_0-u_{0,xx}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上是非正的条件下仅在零点满足爆破准则,即在零点爆破的特性,并研究了 Degapperis-Procesi 方程解的爆破速率.另一方面,文献[12]讨论了高阶 Camassa-Holm 方程的全局适定性;文献[13]讨论了二阶 Camassa-Holm 方程整体解的存在性、解的局部适定性和解的守恒定律;文献[14]利用奇异扰动的方法研究了高阶 Camassa-Holm 方程在初值 $u_0\in H^k(\mathbf{R})$ 时整体弱解以及守恒解的存在性.

在本文中所关注的是高阶 Camassa-Holm 方程解的爆破性质,关于高阶 Camassa-Holm 方程解的爆破性准则,爆破速率,爆破点集的性质公开发表的结论相对较少.本文将考虑如下的初值问题

$$\begin{cases}\partial_t u+u\partial_x u+\partial_x A_k^{-1}F_k(u)=0,(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbf{R},\\ u(x,0)=u_0(x),x\in\mathbf{R},\end{cases}\tag{1}$$

其中 u_0 是初始曲线,k 是非负整数.

收稿日期:2016-11-11;**修回日期**:2017-04-06.

基金项目:国家自然科学基金(1371175)

作者简介:丁丹平(1965-),男,江苏丹阳人,江苏大学教授,主要从事高阶 Camassa-Holm 方程研究,E-mail:ddp@ujs.edu.cn.

通信作者:孙叶兰(1990-),女,山东临沂人,江苏大学硕士研究生,E-mail:1305218004@qq.com.

1 相关引理

考虑方程(1)在 $k=2$ 时的柯西问题:

$$\begin{cases} y_t+2u_x y+u y_x=0, t>0, x\in\mathbf{R}, \\ y(0,t)=(1-\partial_x^2+\partial_x^4)u_0(x), x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{2}$$

其中,$y=u-u_{xx}+u_{xxxx}$. 对所有的 $f\in L^2(\mathbf{R})$,有 $(1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}f=pf$,注意到(2)式中有 $py=u$,其中,$p=\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x|}+\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x|}$,关于 p 的更多细节讨论参见文献[15]. 故(2)式的等价表述为

$$\begin{cases} u_t+uu_x=-\partial_x p\left(u^2+\frac{1}{2}u_x^2-\frac{1}{2}u_{xx}^2-3\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u)\right), t>0, x\in\mathbf{R}, \\ u(x,0)=u_0(x), x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{3}$$

下面给出一些重要引理.

引理 1[1] 令 $T>0$,并有 $\nu\in C^1([0,T);H^2(\mathbf{R}))$,那么对任意的 $t\in[0,T)$ 都至少存在一个点 $\xi(t)\in\mathbf{R}$ 使得 $m(t):=\inf[\nu_x(t,x)]=\nu_x(t,\xi(t))$,并且函数 m 在$[0,T)$ 上是几乎处处可导,即在$(0,T)$ 上几乎处处有 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\nu_{tx}(t,\xi(t))$.

引入 Mckean 在文献[16]中研究 Camassa-Holm 方程时运用的经典质点轨迹方法:假设 $u(x,t)$是二阶 Camassa-Holm 方程的解,$q(x,t)$满足下面的问题:

$$\begin{cases} q_t=u(t,q), 0<t<T, x\in\mathbf{R}, \\ q(x,0)=x, x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{4}$$

T 是方程解的最大存在时间,则 $q(t,\cdot)$ 是流线的一个微分同胚.

对 $q(t,\psi)$ 关于 x 进行微分,有

$$\frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}t}=q_{tx}=u_x(t,q)q_x, t\in(0,T), \tag{5}$$

因此 $q_x(x,t)=\exp\left(\int_0^t u_x(q,s)\mathrm{d}s\right), q_x(x,0)=1$.

引理 2[13] 对于给定的 $u_0\in H^s(\mathbf{R}), s>\frac{9}{2}$. 存在依赖 $\|u_0\|_H$ 的时间 $T>0$,及问题(2)的一个唯一解 u,使得 $u=u(\cdot,u_0)\in C([0,T);H^s(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T);H^{s-1}(\mathbf{R}))$ 且映射 $u_0\in H^s\to u\in C([0,T);H^s(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T);H^{s-1}(\mathbf{R}))$ 是连续的.

2 爆破准则和爆破速率

这一部分,将给出有关问题(2)解的爆破性质的讨论,并给出主要结果.

引理 3 对所有的 $f\in L^2(\mathbf{R})$,$(1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}f=pf$,则有 $\|p\|_{L^\infty}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left\|\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}\right\|\le\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left\|\frac{\mathrm{d}^3 p}{\mathrm{d}x^3}\right\|\le\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明 设 $p_1=\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}+\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}$, $p_2=\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}(-x)}+\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}(-x)}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_1}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3\mathrm{i}-\sqrt{3}}{12}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}-\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}, \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{\mathrm{d}x^3}=\frac{3-\sqrt{3}\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}+\frac{3+\sqrt{3}\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3\mathrm{i}-\sqrt{3}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}+\sqrt{3}}{2}x}-\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}x}, \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}-3}{12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}+\sqrt{3}}{2}x}-\frac{3+\sqrt{3}\mathrm{i}}{12}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}x}.$$

进而有 $|p_1|\le\left|\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12}\right||\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}|+\left|\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12}\right||\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}|=\frac{\sqrt{3}}{6}|\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}|+\frac{\sqrt{3}}{6}|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}x}|=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$, 同理可得 $|p_2|<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left|\frac{\mathrm{d}^2 p_1}{\mathrm{d}x^2}\right|\le\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left|\frac{\mathrm{d}^2 p_2}{\mathrm{d}x^2}\right|\le\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left|\frac{\mathrm{d}^3 p_1}{\mathrm{d}x^3}\right|\le\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left|\frac{\mathrm{d}^3 p_2}{\mathrm{d}x^3}\right|\le\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因此 $\|p\|_{L^\infty}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left|\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}\right|\le\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\left|\dfrac{\mathrm{d}^3 p}{\mathrm{d}x^3}\right| \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

定理 1　设 $u_0 \in H^s, s > \dfrac{9}{2}$,且 $T > 0$ 是问题(2) 的解的最大存在时间,存在 x_0 使得 $u_{0,x}(x_0) < -\dfrac{\sqrt{30\sqrt{3}}}{6(1-\delta)^2}\| u_0 \|_{H^2(\mathbf{R})}$,其中 $\delta \in (\dfrac{1}{2},1)$,则(2) 的解 $u(t,x)$ 在有限的时间内爆破,并且 $0 < T \le T^*$,其中,$T^* = -\dfrac{u_{0x}(x_0)}{4(K-u_{0,x})\sqrt{-Ku_{0,x}} + u_{0,x}^2 - 6Ku_{0,x} + K^2}$,$K = \dfrac{\sqrt{30\sqrt{3}}}{6}\| u_0 \|_{H^2}$ 使得 $\lim\limits_{t\to T}(\min(u_x(t,x))) = -\infty$.

证明　将(2)式中的第一个等式关于 x 进行微分得到:$u_{tx} + u_x^2 + uu_{xx} = -\partial_x^2(1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 - 3\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u))$,令 $M = (1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 - 3\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u)) = (1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2) - (1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}(3\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u))$,则 $M = M_1 + M_2$,其中 $M_1 = (1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2)$,$M_2 = -3(1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}(\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u))$,故 $M_1 = \int_{\mathbf{R}} p(x-y)(u^2(t,y) + \frac{1}{2}u_x^2(t,y) - \frac{1}{2}u_{xx}^2(t,y))\mathrm{d}y$,$M_2 = -3\int_{\mathbf{R}} p(x-y)(u_{xx}^2 + u_x u_{xxx})\mathrm{d}y$,进而有 $-\partial_x^2 M_1 = -\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}(x-y)(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2)\mathrm{d}y$,$-\partial_x^2 M_x = 3\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}^3 p}{\mathrm{d}x^3}(x-y)(u_x u_{xx})\mathrm{d}y$. 因此根据 Hölder 不等式和引理 3 有

$$\|\partial_x^2 M_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le \left\|\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\int_{\mathbf{R}}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_{xx}^2)\mathrm{d}y \le \frac{\sqrt{3}}{3}\| u_0 \|_{H^2(\mathbf{R})}^2,$$

$$\|\partial_x^2 M_2(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le \left\|\frac{\mathrm{d}^3 p}{\mathrm{d}x^3}\right\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\int_{\mathbf{R}}(u_x u_{xx})\mathrm{d}y \le \frac{\sqrt{3}}{2}\| u_0 \|_{H^2(\mathbf{R})}^2,$$

所以 $\left\|-\partial_x^2(1-\partial_x^2+\partial_x^2)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 - 3\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u))\right\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le \frac{5\sqrt{3}}{6}\| u_0 \|_{H^2(\mathbf{R})}^2$. 根据引理 1,存在 $x_0 \in \mathbf{R}$ 使得 $u_{0x} = \inf\limits_{x\in\mathbf{R}} u_{0x}(x)$,定义:$m(t) = u_x(t,q(t,x_0))$,则根据(4)式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) = (u_{xt} + u_{xx}q_t)(t,q(t,x_0)) = (u_{tx} + uu_{xx})(t,q(t,x_0)) = -u_x^2 - \partial_x^2(1-\partial_x^2+\partial_x^4)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_{xx}^2 - 3\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u)) \le -m^2(t) + \frac{5\sqrt{3}}{6}\| u_0 \|_{H^2(\mathbf{R})}^2 = -m^2(t) + K^2. \tag{6}$$

若存在 $\delta \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $m(0) < \frac{-K}{(1-\delta)^2} = -\frac{\sqrt{30\sqrt{3}}}{6(1-\delta)^2}\| u_0 \|_{H^2(\mathbf{R})}$ 成立,则 $m_t(0) < -m(0)^2 + \frac{K^2}{(1-\delta)^2} < 0$,所以又有 $m_t(0) < -m^2(0) + K^2 < 0$,进而可以得到 $m(t)$ 在$[0,T)$ 上是单调递减函数,令 $\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{K}{-u_{0x}(x_0)}}$,$\varepsilon \in (\delta,1)$,则 $(\varepsilon-1)^4 = \frac{K}{(u_{0x}(x_0))^2}$. 由于 $m(t)$ 是单调递减函数,故$(u_{0x}(x_0))^2 = \frac{K^2}{(\varepsilon-1)^4} < m^2(t)$,即 $K^2 < (\varepsilon-1)^4 m^2(t)$,进而$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) \le -m^2(t) + m^2(t)(\varepsilon-1)^4 \le -m^2(t)\varepsilon^4$,$t \in [0,T)$,因此 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{m(t)} = \frac{1}{m^2(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) \le -\varepsilon^4$,$t \in [0,T)$,故在$[0,t)$ 上进行积分 $-\frac{1}{m(t)} + \frac{1}{u_{0x}(x_0)} \le -\varepsilon^4 t$,$t \in [0,T)$,所以 $m(t) \le \frac{u_{0x}(x_0)}{1+\varepsilon^4 t u_{0x}(x_0)}$,因此,当 $t \to -\frac{1}{\varepsilon^4 u_{0x}(x_0)}$ 时,$m(t) \to -\infty$. 即当 $T \le -\frac{1}{\varepsilon^4 u_{0x}(x_0)} = T^* < +\infty$ 时:$\lim\limits_{t\to T}(\min(u_x(t,x))) = -\infty$. 因此定理 1 得到证明.

下面讨论爆破解的爆破速率.

引理 4　对于定理 1 中的 $m(t)$,任意的 $\varepsilon_1 \in (0,\frac{1}{2})$,则存在时间 $t_0 \in [0,T)$,使得 $m(t_0) < 0$,$m(t_0)^2 >$

K^2/ε_1 成立.

证明 根据引理 1,$m \in W^{1,\infty}_{loc}$,因此 m 是局部 Lipschitz 的,由定理 1 可知,存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $m^2(t) > \dfrac{K^2}{\varepsilon_1}$,$t \in [t_0, t_0 + \delta_1)$.

下面用反证法证明:不妨设存在 $0 < \delta_1 < T - t_0$,使得 $m^2(t_0 + \delta_1) = \dfrac{K^2}{\varepsilon_1}$,进而有 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \leq -m^2 + K^2 < -m^2 + \varepsilon_1 m^2$,根据局部 Lipschitz,函数 m 是绝对连续的,并且在 $[t, t_0 + \delta_1]$ 上有 $m(t_0 + \delta_1) \leq m(t_0) < 0$,则 $m^2(t_0 + \delta_1) \geq m^2(t_0) > \dfrac{K^2}{\varepsilon_1}$ 与假设矛盾,所以引理 4 成立.

定理 2 $u_0 \in H^s, s > \dfrac{9}{2}$,$T > 0$ 是(2)式相应解的最大有限存在时间. 则 $\lim\limits_{t \to T}(T - t)\min\limits_{x \in \mathbf{R}} u_x(t, x) = -1$.

证明 根据(6)式,有

$$-k^2 \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(t) + m^2(t) \leq K^2. \tag{7}$$

在 $t \in (0, T)$ 处处成立. 由于 m 是局部 Lipschitz 的在 $[0, T)$ 并且 $m^2(t) > \dfrac{K}{\varepsilon}$ 成立,$\dfrac{1}{m}$ 在 (t_0, T) 上也是局部 Lipschitz 的,对 $m(t) \cdot \dfrac{1}{m(t)} = 1$,$t \in (t_0, T]$ 左右两边进行微分得:$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{1}{m}) = -\dfrac{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}{m^2}$,在 (t_0, T) 上处处成立且 $\dfrac{1}{m}$ 在 (t_0, T) 上绝对连续. 因此,根据引理 4 和(7)式得

$$1 - \varepsilon_1 \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{m}) \leq 1 + \varepsilon_1, t \in (0, T). \tag{8}$$

对于 $t \in (t_0, T)$ 将(8)式在 (t, T) 上进行积分可得 $\dfrac{1}{1 + \varepsilon_1} \leq -m(t)(T - t) \leq \dfrac{1}{1 - \varepsilon_1}$,$t \in (t_0, T)$,故 $\lim\limits_{t \to T}(T - t)\min\limits_{x \in \mathbf{R}} u_x(t, x) = -1$.

3 爆破点集

这一部分将给出满足爆破准则的点组成的集合的相关性质.

定理 3 设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid u_{0,x}(x) < -K_1 \| u_0 \|_{H^2}\}$ 非空,其中 $K_1 = \dfrac{\sqrt{30\sqrt{3}}}{6(1 - \delta)^2}$,则 A 为有限测度闭集.

证明 记集合 A 的测度为 $|A|$,因为 $\| u_{0,x} \|_{L^2}^2 = \int_{\mathbf{R}} | u_{0,x} |^2 \mathrm{d}x > \int_A | u_{0,x} |^2 \mathrm{d}x > \int_A K_1^2 \| u_0 \|_{H^2}^2 \mathrm{d}x = K_1^2 \int_A \| u_0 \|_{H^2}^2 \mathrm{d}x = K_1^2 \,| A |\, \| u_0 \|_{H^2}^2$,故有

$$\| u_{0,x} \|_{L^2}^2 \geq K_1^2 \,| A |\,(\| u_0 \|_{L^2}^2 + \| u_{0,x} \|_{L^2}^2 + \| u_{0,xx} \|_{L^2}^2). \tag{9}$$

根据 Sobolev 嵌入定理:

$$\| u_0 \|_{L^2} \leq C_1 \| u_0 \|_{H^2},\text{其中 } C_1 \text{ 是常数}. \tag{10}$$

根据(10)式得:$\| u_0 \|_{L^2} \leq C_1 \| u_0 \|_{H^2} = C_1 \sqrt{\| u_0 \|_{L^2}^2 + \| u_{0,x} \|_{L^2}^2 + \| u_{0,xx} \|_{L^2}^2}$,所以有

$$(\| u_0 \|_{L^2}^2 + \| u_{0x} \|_{L^2}^2 + \| u_{0xx} \|_{L^2}^2) \geq \frac{\| u_0 \|_{L^2}^2}{C_1^2}, \tag{11}$$

根据 $K_1^2 = \dfrac{5\sqrt{3}}{6(1 - \delta)^4}$ 联立(9)式和(11)式可得:$| A | \leq \dfrac{2\sqrt{3} C_1^2 (1 - \delta)^4 \| u_{0,x} \|_{L^2}^2}{5 \| u_0 \|_{L^2}^2}$,所以,$A$ 的测度有限. 下面证明集合 A 为闭集.

设点列$\{x_n\}_1^\infty \subset A$，并且 $x_n \to y_0$，下面证明 $y_0 \in A$.

因为 $u_0 \in H^2$，根据嵌入定理可得 $u_{0,x}$ 是连续函数. 因此，可得：$\lim\limits_{n\to\infty} u_{0,x}(x_n) = u_{0,x}(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$. 由于 $\{x_n\}_1^\infty \subset A$，故 $u_{0,x}(x_n) < -\dfrac{\sqrt{10C_0}}{2(1-\delta)^2}\| u_0 \|_{H^2}$，根据上式得：$u_{0,x}(y_0) = u_{0,x}(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_{0,x}(x_n) < -\dfrac{\sqrt{10C_0}}{2(1-\delta)^2}\| u_0 \|_{H^2}$，即有 $y_0 \in A$，所以集合 A 是闭集. 由定理 3 可获得命题 1.

命题 1　如果定理 1 成立，则问题(2)存在一有限测度的闭的爆破点集.

参 考 文 献

[1] Constantin A, Escher J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations[J]. Acta Math, 1998, 181: 229-243.

[2] Constantin A, Escher J. Global weak solutions for a shallow water equation[J]. Indiana University Math J, 1998, 47: 1527-1545.

[3] Constantin A, Escher J. On the structure of a family of quasi-linear equations arising in shallow water theory[J]. Math Ann, 1998, 312: 403-416.

[4] Constantin A, Escher J. Global existence and blow-up for a shallow water equation[J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa CI Sci, 1998, 26: 303-328.

[5] Constantin A, Escher J. On the blow-up rate and blow-up set of breaking waves for a shallow water equation[J]. M Z, 2000, 233: 75-91.

[6] ZHOU J B, TIAN L X. Blow-up of solution of an initial boundary value problem for a generalized Camassa-Holm equation[J]. Physics Letters A, 2008, 372: 3659-3666.

[7] LIU J J, YIN Z Y. Blow-up and global existence for a modified two-component Camassa-Holm equation[J]. J Math Anal Appl, 2011, 375: 502-509.

[8] ZHOU Y, CHEN H P. Wave breaking and propagation speed for the Camassa-Holm equation with $\kappa \neq 0$[J]. Nonlinear Analysis : Real World Applications, 2011, 12: 1875-1822.

[9] GUO F, PENG W W. Blow-up solution for the generalized two-component Camassa-Holm system on the circle[J]. Nonlinear Analysis, 2014, 105: 120-133.

[10] MA C C, Alsaedi A, Hayat T, et al. On blow-up of solutions to the two-component π-Camassa-Holm system[J]. J Math Anal Appl, 2015, 426: 1026-1039.

[11] Escher J, LIU Y, YIN Z Y. Global weak solutions and blow-up structure for the Degsperis-Procesi equation[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 241: 457-485.

[12] Coclite G M , Holden H , Karlsen K H. Well-posedness of higher-order Camassa-Holm equations[J]. J Differential Equations , 2009, 246: 929-963.

[13] TIAN L X, ZHANG P, XIA L M. Global existence for the higher-order Camassa-Holm shallow water equation[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74: 2368-2474.

[14] DING D P, LYU P. Conservative solutions for higher-order Camassa-Holm equations[J]. J Math Phy, 2010, 51(7): 86-92.

[15] DING D P, ZHANG S H. Lipschitz metric for the periodic second-order Camassa-Holm equation[J]. J Math Anal Appl, 2017, 451: 990-1025.

[16] McKean H P . Breakdown of a shallow water equation[J] . Asian J Math, 1998, 2: 767-774.

Blow-up Properties of Solutions to the Second-order Camassa-Holm Equation

Ding Danping, Sun Yelan

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212000, China)

Abstract: The properties of solutions to the second-order Camassa-Holm equation in the case of $k=2$ are investigated. A new blow-up criteria and the precise blow-up rate are established. By employing the Sobolev embedding theory, Holder inequality and closed set properties, a closed blow-up set with new blow-up criteria is obtained.

Keywords: higher-order Camassa-Holm equation; blow-up; blow-up set

［责任编辑　陈留院］