

# 多项时间分数阶扩散方程的二次三角形元超收敛分析

牛裕琪,王萍莉,王芬玲

(许昌学院 数学与统计学院,河南 许昌 461000)

**摘要:**基于二次三角形有限元和时间 L1 逼近格式,建立了具有 Caputo 导数的多项时间分数阶扩散方程的全离散格式.首先,在均匀网格下利用积分恒等式技巧证明了关于二次三角形元的高精度结果.其次运用分数阶导数的处理技巧和插值与投影之间的关系导出了空间方向的超逼近结果和时间方向的最优误差估计.进一步,借助插值后处理技术,得到了超收敛估计.

**关键词:**多项时间分数阶扩散方程;二次三角形元;全离散格式;超逼近和超收敛

**中图分类号:**O242.21

**文献标志码:**A

与整数阶微分方程相比,分数阶微分方程对一些复杂系统演化过程的描述和刻画与试验更加吻合,因而在越来越多的学科领域中得到应用,如在黏弹性力学、动力学、混沌、地球物理、信号处理、医学检测、控制论、统计、生物等领域,带来了工程应用与科学研究领域的变革.分数阶微分方程之所以能够在诸多领域中得到广泛应用与深入研究,主要是因为分数阶微分算子可以比整数阶微分算子更准确地描述具有历史记忆性和空间全域相关性的力学与物理过程,且分数阶导数建模简单、参数物理意义清楚.但是,对很多分数阶微分方程来说,很难得到它们的解析解,即使能够求得解析解,大多数的解也含有无穷级数或者一些难以计算的特殊函数,如 Mittag-Leffler 函数, H 函数等,故人们更多关注分数阶微分方程的数值解法,如有限差分方法、有限元方法、无网格方法、Petrov-Galerkin 方法、谱方法、DG 和 LDG 方法等.

在本文中,考虑如下多项时间分数阶扩散方程

$$\begin{cases} P_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(D_t)u(X, t) - \Delta u(X, t) = f(X, t), & (X, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(X, t) = 0, & (X, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(X, 0) = u_0(X), & X \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Omega \in \mathbf{R}^2$  是有界凸多边形区域,  $\partial\Omega$  是  $\Omega$  的边界,  $X = (x, y)$ ,  $u_0(X)$  和  $f(X, t)$  是已知适当光滑的函数,

$P_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(D_t)$  的定义为  $P_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(D_t) = D_t^\alpha + \sum_{i=1}^m l_i D_t^{\alpha_i}$ ,  $l_i > 0$ ,  $m \in \mathbf{N}^+$ ,  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m <$

$\alpha < 1$ ,  $D_t^\beta$  是关于  $t$  的左  $\beta$  阶 Caputo 导数, 其定义为  $D_t^\beta u(X, s) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\partial u(X, s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$ ,

这里  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数.

对此类方程的讨论也有很多,如文献[1]讨论了多项时间分数阶扩散方程的初边值问题的适定性和长时间渐近行为,在文献[2]中研究了分数阶扩散方程初边值问题弱解的存在唯一性,文献[3]给出了某些分数阶扩散方程的精确解的表达式,文献[4]给出了分数阶扩散方程的数值拟合方法,文献[5]讨论了其极大值原理,文献[6]利用逆 MQ 函数插值研究了变时间分数阶扩散方程的数值解,提出了径向基函数的最小二乘配

收稿日期:2018-09-20;修回日期:2019-05-15.

基金项目:国家自然科学基金(11101381;11971416);河南省高等学校重点科研项目(19B110013);许昌市基础与前沿研究项目(19,154001).

作者简介:牛裕琪(1969—),女,河南许昌人,许昌学院教授,研究方向为有限元方法及应用,E-mail:niuyuqi003@126.com.

通信作者:王芬玲,E-mail:mathwfl@163.com.

置方法,并讨论了算法的稳定性和收敛性,文献[7]利用 Galerkin 有限元方法得到了多项时间分数阶扩散方程的数值格式,并讨论了其稳定性和误差估计.目前关于多项分数阶微分方程高效有限元方法的讨论还不多,例如文献[8-9]分别对问题(1)讨论了双线性元和线性三角形元时间的超逼近和超收敛性.

本文主要目的将二次三角形元应用到方程(1)进行了全离散有限元分析.首先基于空间方向采用二次三角形有限元和时间方向运用 L1 逼近对问题(1)建立了全离散格式.其次在均匀直角三角剖分的基础上运用积分恒等式技巧证明了二次三角形元的高精度结果.再者基于文献[10-11]中插值与投影相结合的思想导出了插值与投影之间的超收敛估计,在此基础上导出了在  $H^1$  模意义下有限元的插值与逼近解的超逼近性.最后,运用插值后处理技巧得到超收敛结果.值得指出的是本文在均匀直角三角剖分的条件下导出了二次三角形元积分恒等式高精度结果(见引理 1),且与文献[12]中在等腰直角三角形剖分前提下得到同样的结果.

### 1 二次三角形元的构造和全离散格式

不妨令  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  是有界矩形区域,其边界  $\partial\Omega$  分别平行于  $x$  轴和  $y$  轴.设  $\Gamma_h$  为  $\Omega$  上一族直角三角形剖分,  $\forall K \in \Gamma_h$  的两条直角边分别平行于  $x$  轴和  $y$  轴,并且所有水平边和竖直边也分别相等(记为 GATM 三角网格剖分<sup>[13]</sup>).

定义二次三角形有限元:  $(K, P, \Sigma), \Sigma = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, P = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$ , 其中  $v_i = v(Z_i), v_{i+3} = \frac{1}{|l_i|} \int_{l_i} v ds, i = 1, 2, 3, Z_i, l_i (i = 1, 2, 3)$  分别为单元的 3 个顶点和 3 条边.

二次三角形的有限元空间为  $V_0^h = \{v: v|_K \in P, \forall K \in \Gamma_h, v|_{\partial\Omega} = 0\}$ .

问题(1)的变分形式为:求  $u(X, t): (0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$  满足

$$\begin{cases} (P_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(Dt)u(X, t), v) + (\nabla u(X, t), \nabla v) = (f(X, t), v), & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(X, 0) = u_0(X), & X \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

设  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$  是区间  $[0, T]$  的一个剖分,时间步长为  $\tau = T/N$ ,且  $t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N, U^n$  代表  $t = t_n$  时  $u(t_n)$  在  $V_0^h$  中的逼近.对  $[0, T]$  上的光滑函数  $\varphi$ , 定义

$$\begin{aligned} \varphi^n &= \varphi(t_n), \tilde{D}_i^\alpha \varphi^n = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{b}_{\alpha, k} \partial_i \varphi^{n-k} = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n b_k^{n, \alpha} \varphi_k, \\ \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_i) \varphi^n &= \tilde{D}_i^\alpha \varphi^n + \sum_{i=1}^m l_i \tilde{D}_i^{\alpha_i} \varphi^n = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k (\varphi^{n-k} - \varphi^{n-k-1}) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n A_k^n \varphi^k, \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{\alpha, k} &= (k+1)^{1-\alpha} - k^{(1-\alpha)} (0 \leq k \leq N-1), \partial_i \varphi^k = \frac{\varphi^k - \varphi^{k-1}}{\tau} (0 \leq k \leq N), \\ b_k^{n, \alpha} &= \begin{cases} -\tilde{b}_{\alpha, n-1} = (n-1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}, k = 0, \\ \tilde{b}_{\alpha, n-k} - \tilde{b}_{\alpha, n-k-1}, 1 \leq k \leq n-1, \\ \tilde{b}_{\alpha, 0} = 1, k = n, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_k = \tilde{b}_{\alpha, k} + \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha_i)} l_i \tilde{b}_{\alpha_i, k} \tau^{\alpha-\alpha_i}, A_k^n = b_k^{n, \alpha} + \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha_i)} l_i b_k^{n, \alpha_i} \tau^{\alpha-\alpha_i}.$$

根据  $\tilde{A}_k$  和  $A_k^n$  的定义可知

$$1 + \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha_i)} l_i \tau^{\alpha-\alpha_i} = \tilde{A}_0 > \tilde{A}_1 > \dots > \tilde{A}_{N-1} > 0, A_k^n < 0, \text{当 } 0 \leq k \leq n-1 \text{ 时.}$$

问题(2)的全离散逼近格式为:对于给定的  $U^{n-1} \in V_0^h$ ,求  $U^n \in V_0^h$  满足

$$\begin{cases} (\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_i)U^n, v) + (\nabla U^n, \nabla v) = (f^n, v), & \forall v \in V_0^h, \\ U^0 = R_h u_0(X), & X \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $R_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_0^h$  为 Riesz 投影(或椭圆投影),即对  $u \in H_0^1(\Omega)$ , 满足

$$(\nabla(u - R_h u), \nabla v) = 0, \forall v \in V_0^h.$$

为了方便起见,令  $R_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}'' = P_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(D_t)u^n - \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)u^n$ .

## 2 一些引理

在本节中,给出一些误差估计中要用的一些引理.

设  $e, e_1 \in \Gamma_h$  的两个相邻单元,顶点分别为  $Z_1(0,0), Z_2(2h_x, 0), Z_3(0, 2h_y)$  和  $Z_1(0,0), Z_2(2h_x, 0), Z_3^*(2h_x - 2h_y)$ ,相应地,边长分别为  $l_1 = \overrightarrow{Z_2 Z_3}, l_2 = \overrightarrow{Z_3 Z_1}, l_3 = \overrightarrow{Z_1 Z_2}, l_4 = \overrightarrow{Z_1 Z_3^*}$  以及  $l_5 = \overrightarrow{Z_3^* Z_2}$  (见图 1).

**引理 1** 设  $u \in \omega^{4,\infty}, I_h u \in V_0^h$  是  $u$  的分片二次插值函数,则

$$\int_{\Omega} \nabla(u - I_h u) \nabla v = O(h^3) \|u\|_{4,\infty} |v|_1, v \in V_0^h,$$

其中  $h = \max\{h_x, h_y\}$ .

**证明** 记  $\omega = u - I_h u, I_1 v$  为  $v \in V_0^h$  的分片线性插值函数,则

$$v = I_1 v + v - I_1 v = I_1 v - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 h_i^2 v_{l_i} \varphi_{i+3}, \quad (5)$$

其中  $2h_i$  为单元的边  $l_i$  的长,  $v_{l_i}$  为沿  $l_i$  逆时针方向的二阶导数,  $\varphi_{i+3}$  为对应于  $l_i$  中点的基函数.

$$\varphi_4 = \frac{1}{h_x h_y} xy, \varphi_5 = \frac{1}{h_x h_y^2} (2h_x h_y - x h_y - y h_x), \varphi_6 = \frac{1}{h_x^2 h_y} (2h_x h_y - x h_y - y h_x).$$

下面记  $h_3 = h_x, h_4 = h_y$ . 由(5)式得:

$$\int_e \nabla \omega \nabla v = \int_e \nabla \omega \nabla (I_1 v) - \frac{1}{2} \int_e \sum_{i=1}^3 h_i^2 v_{l_i} \nabla \omega \nabla \varphi_{i+3}, \quad (6)$$

对于  $\int_e \nabla \omega \nabla (I_1 v)$ , 由分部积分  $\int_e \nabla \omega \nabla (I_1 v) = \int_{\partial e} \omega \frac{\partial I_1 v}{\partial n} ds - \int_e \omega \Delta (I_1 v)$ , 由于  $I_1 v$  是分片线性插值函数, 则  $\Delta (I_1 v) = 0, \frac{\partial I_1 v}{\partial n}$  为常数, 根据插值条件, 有  $\int_{\partial e} \omega \frac{\partial I_1 v}{\partial n} ds = \frac{\partial I_1 v}{\partial n} \int_{\partial e} \omega ds = 0$ , 综上所述可知,

$$\int_e \nabla \omega \nabla (I_1 v) = 0. \quad (7)$$

对于(6)式中的第 2 部分,考虑

$$-\frac{1}{2} \int_e \sum_{i=1}^3 h_i^2 v_{l_i} \nabla \omega \nabla \varphi_{i+3}. \quad (8)$$

设  $\varphi_6, \varphi_6'$  分别为图 1 中  $e, e_1$  对应于  $l_3$  中点的基函数,则在  $l_1, l_2$  上有  $\varphi_6 = 0$ , 在  $l_4, l_5$  上有  $\varphi_6' = 0$ .

先考察(8)式中当  $i=3$  时,由分部积分得:

$$h_3^2 v_{l_3} \int_e \nabla \omega \nabla \varphi_6 + h_3^2 v_{l_3} \int_{e_1} \nabla \omega \nabla \varphi_6' = h_x^2 v_{xx} \left( \int_{\partial e} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6 ds - \int_e \Delta \omega \varphi_6 + \int_{\partial e_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6' ds - \int_{e_1} \Delta \omega \varphi_6' \right),$$

由于在  $l_1, l_2$  上  $\varphi_6 = 0$ , 则  $\int_{\partial e} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6 ds = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6 ds = \int_{l_3} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6 ds = - \int_{l_3} \omega_y(x, 0) \varphi_6(x, 0) dx$ ; 同理在  $l_4,$

$l_5$  上  $\varphi_6' = 0$ , 则  $\int_{\partial e_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6' ds = \sum_{i=3}^5 \int_{l_i} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6' ds = \int_{l_3} \frac{\partial \omega}{\partial n} \varphi_6' ds = \int_{l_3} \omega_y(x, 0) \varphi_6'(x, 0) dx$ .

又由于  $\varphi_6' = \frac{1}{h_x^2 h_y} (2h_x - x)(x h_y + y h_x)$ , 有  $\varphi_6(x, 0) = \frac{x}{h_x^2 h_y} (2h_x h_y - x h_y) = \varphi_6'(x, 0)$ , 从而

$$h_3^2 v_{l_3} \int_e \nabla \omega \varphi_6 + h_3^2 v_{l_3} \int_{e_1} \nabla \omega \varphi_6' = -h_x^2 v_{xx} \left( \int_e \Delta \omega \varphi_6 + \int_{e_1} \Delta \omega \varphi_6' \right). \quad (9)$$

先讨论  $\int_e \omega_{xx} \varphi_6 + \int_{e_1} \omega_{xx} \varphi_6'$ .

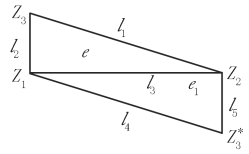


图 1 单元  $e \cup e_1$   
Fig. 1 Element  $e \cup e_1$

$$\begin{aligned} & \int_e \omega_{xx} \varphi_6 + \int_{e_1} \omega_{xx} \varphi'_6 = \int_e \omega_{xx} \frac{x}{h_x^2 h_y} (2h_x h_y - x h_y - y h_x) + \int_{e_1} \omega_{xx} \frac{1}{h_x^2 h_y} (2h_x - x)(x h_y + y h_x) = \\ & - \int_e \omega_{xx} \frac{x}{2h_x^3 h_y} (2h_x h_y - x h_y - y h_x)_y^2 + \int_{e_1} \omega_{xx} \frac{1}{2h_x^3 h_y} (2h_x - x)(x h_y + y h_x)_y^2 = \\ & \int_e \omega_{xx} \frac{x}{2h_x^3 h_y} (2h_x h_y - x h_y - y h_x)^2 - \int_{\partial e} \omega_{xx} \frac{x}{2h_x^3 h_y} (2h_x h_y - x h_y - y h_x)^2 n_y ds - \\ & \int_{e_1} \omega_{xy} \frac{1}{2h_x^3 h_y} (2h_x - x)(x h_y + y h_x)^2 + \int_{\partial e_1} \omega_{xy} \frac{1}{2h_x^3 h_y} (2h_x - x)(x h_y + y h_x)^2 n_y ds. \end{aligned} \quad (10)$$

由于在  $l_1$  上,  $y h_x + x h_y - 2h_x h_y = 0$ , 在  $l_4$  上,  $y h_x + x h_y = 0$ , 故(10)式等价于

$$\begin{aligned} & \int_e \omega_{xx} \varphi_6 + \int_{e_1} \omega_{xx} \varphi'_6 = \frac{1}{2h_x^3 h_y} \int_e u_{xy} x (2h_x h_y - x h_y - y h_x)^2 + \frac{h_y}{2h_x^3} \int_{l_3} \omega_{xx} x (2h_x - x)^2 dx - \\ & \frac{1}{2h_x^3 h_y} \int_{e_1} u_{xy} (2h_x - x)(x h_y + y h_x)^2 + \frac{h_y}{2h_x^3} \int_{l_3} \omega_{xx} (2h_x - x) x^2 dx = \frac{h_y}{h_x^2} \int_{l_3} \omega_{xx} x (2h_x - \\ & x) dx + \frac{1}{2h_x^3 h_y} \int_e y_{xy} x (2h_x h_y - x h_y - y h_x)^2 - \frac{1}{2h_x^3 h_y} \int_{e_1} u_{xy} (2h_x - x)(x h_y + y h_x)^2 = \\ & \frac{h_y}{h_x^2} \int_{l_3} \omega_{xx} x (2h_x - x) dx + \frac{1}{6h_x^4 h_y} \int_e u_{xy} x (2h_x h_y - x h_y - y h_x)^3 + \frac{h_y^2}{6h_x^4} \int_{l_3} u_{xy} x (2h_x - x)^3 dx + \\ & \frac{1}{6h_x^4 h_y} \int_{e_1} u_{xy} (2h_x - x)(x h_y + y h_x)^3 - \frac{h_y^2}{6h_x^4} \int_{l_3} u_{xy} (2h_x - x) x^3 dx. \end{aligned} \quad (11)$$

由于在  $l_3$  的端点处有  $x(2h_x - x) = 0, \omega = 0$ , 且  $\int_{l_3} \omega dx = 0$ , 所以

$$\int_{l_3} \omega_{xx} x (2h_x - x) dx = -2 \int_{l_3} \omega_x (2h_x - x) dx = - \int_{l_3} \omega dx = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_y^2}{6h_x^4} \left( \int_{l_3} u_{xy} (2h_x - x) x^3 dx - \int_{l_3} u_{xy} x (2h_x - x)^3 dx \right) = \frac{h_y^2}{6h_x^4} \int_{l_3} u_{xy} \cdot 4x h_x (2h_x - x)(x - \\ & h_x) dx = - \frac{h_y^2}{6h_x^3} \int_{l_3} u_{xy} [x^2 (2h_x - x)^2]'_x dx = \frac{h_y^2}{6h_x^3} \int_{l_3} u_{xy} [x^2 (2h_x - x)^2] dx, \end{aligned} \quad (13)$$

综合利用(6)~(13)式得

$$\begin{aligned} & -h_x^2 v_{xx} \left( \int_e \omega_{xx} \varphi_6 + \int_{e_1} \omega_{xx} \varphi'_6 \right) = - \frac{1}{6h_x^2 h_y} \int_e u_{xy} x (2h_x h_y - x h_y - y h_x)^3 v_{xx} - \frac{1}{6h_x^2 h_y} \int_{e_1} u_{xy} (2h_x - \\ & x)(x h_y + y h_x)^3 v_{xx} - \frac{h_y^2}{6h_x^3} \int_{l_3} u_{xy} [x^2 (2h_x - x)^2] v_{xx} dx = O(h^4) \|u\|_{4,\infty,e \cup e_1} \|v\|_{2,1,e \cup e_1}. \end{aligned}$$

同理  $-h_x^2 v_{xx} \left( \int_e \omega_{yy} \varphi_6 + \int_{e_1} \omega_{yy} \varphi'_6 \right) = O(h^4) \|u\|_{4,\infty,e \cup e_1} \|v\|_{2,1,e \cup e_1}$ .

因为在平行于  $x$  轴的  $\partial\Omega_x$  上  $v_{xx} = 0$ , 由逆不等式, 得

$$\sum_K h_x^2 v_{l_3 l_3} \int_K \nabla \omega \nabla \varphi_6 = O(h^3) \|u\|_{4,\infty} \|v\|_1.$$

类似可证明(6)式中的其他项. 综上, 引理 1 得证.

**引理 2** 设  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$ , 则  $\|R_h u - I_h u\|_1 \leq Ch^3 \|u\|_{4,\infty}$ .

**证明** 由 Riesz 投影的定义和引理 1 有

$$\begin{aligned} & |R_h u - I_h u|_1^2 = (\nabla(R_h u - I_h u), \nabla(R_h u - I_h u)) = (\nabla(R_h u - u), \nabla(R_h u - I_h u)) + \\ & (\nabla(u - I_h u), \nabla(R_h u - I_h u)) \leq Ch^3 \|u\|_{4,\infty} |R_h u - I_h u|_1, \end{aligned}$$

利用  $H_0^1(\Omega)$  空间中半模和全模的等价性, 引理 2 得证.

**注 1** 引理 2 的结果比传统的估计方法正好高一阶.

**引理 3**<sup>[14]</sup> 若  $u_{tt}(X, t) \in L^2(\Omega)$ , 对  $\forall t \in (0, T]$ , 则有  $\|R_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^n\|_0 \leq C \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{tt}(X, t)\|_0 \tau^{2-\alpha}$ .

**引理 4**<sup>[8]</sup> 设  $\{\xi^n\}_{n=0}^N$  为  $\Omega$  上的一函数列, 则有

$$(\nabla \xi^n, \sum_{k=0}^n A_k^n \nabla \xi^k) = \frac{1}{2} (\tilde{A}_0 \|\nabla \xi^n\|_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n \|\nabla \xi^k\|_0^2 - \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n \|\nabla \xi^n - \nabla \xi^k\|_0^2).$$

### 3 超逼近和超收敛分析

基于第 2 节中的引理将给出本文中重要的两个定理.

**定理 1** 设  $u^n, U^n$  分别为(2)式和(4)式的解. 若  $u(X, t) \in W^{4, \infty}(\Omega), u_t(X, t) \in H^3(\Omega), u_{tt}(X, t) \in L^2(\Omega)$ , 以及任意的正整数  $1 \leq n \leq N$ , 则有  $\|I_h u^n - U^n\|_1 = O(h^3 + \tau^{2-\alpha})$ .

**证明** 定义  $\rho^n = u^n - R_h u^n, \theta^n = R_h u^n - U^n$ , 联立(2)式和(4)式, 可得如下误差方程

$$\begin{aligned} & (\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n, v) + (\nabla \theta^n, \nabla v) = -(\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\rho^n, v) - \\ & (\nabla \rho^n, \nabla v) - (R_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^n, v), \forall v \in V_0^h. \end{aligned} \quad (14)$$

为了估计  $\|\theta^n\|_1$ , 在(14)式中令  $v = \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n$ , 则有

$$\begin{aligned} & \|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n\|_0^2 + (\nabla \theta^n, \nabla \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n) = -(\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\rho^n, \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n) - \\ & (\nabla \rho^n, \nabla \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n) - (R_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^n, \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n) = F_1 + F_2 + F_3. \end{aligned} \quad (15)$$

根据(3)式和引理 2, 得到如下等式

$$(\nabla \theta^n, \nabla \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n) = \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} (\tilde{A}_0 \|\theta^n\|_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n \|\theta^k\|_0^2 - \sum_{k=0}^{n-1} A_k^n \|\theta^n - \theta^k\|_0^2). \quad (16)$$

现在估计(15)式右边的 3 项. 注意到  $\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k = n^{1-\alpha} + \sum_{i=1}^m l_i \frac{\tau^{\alpha-\alpha_i} \Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha_i)} n^{1-\alpha_i}$  和  $\|\partial_t \rho^{n-k}\|_0 =$

$$\|\frac{1}{\tau} \int_{t_{n-k-1}}^{t_{n-k}} \rho_t dt\|_0 \leq Ch^3 \|u_t\|_{L^\infty(H^3(\Omega))}. \text{得 } F_1 \text{ 的估计}$$

$$\begin{aligned} |F_1| &= \left| \left( -\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n A_k^n \rho^k, \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n \right) \right| = \left| \left( -\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k \partial_t \rho^{n-k}, \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n \right) \right| \leq \\ & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k \|\partial_t \rho^{n-k}\|_0 \|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n\|_0 \leq Ch^3 \|u_t\|_{L^\infty(H^3(\Omega))} (n^{1-\alpha} \tau^{1-\alpha} + \\ & \sum_{i=1}^m l_i \frac{\tau^{\alpha-\alpha_i} \Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha_i)} n^{1-\alpha_i} \tau^{1-\alpha}) \|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n\|_0 \leq Ch^3 \|u_t\|_{L^\infty(H^3(\Omega))} (T^{1-\alpha} + \\ & \sum_{i=1}^m l_i \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha_i)} T^{1-\alpha_i} \|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n\|_0 \leq Ch^6 \|u_t\|_{L^\infty(H^3(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n\|_0^2. \end{aligned} \quad (17)$$

利用定理 1, 则有

$$|F_2| = 0, \quad (18)$$

利用引理 1, 可得

$$|F_3| \leq C \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{tt}(X, t)\|_0 \tau^{4-2\alpha} + \frac{1}{2} \|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)\theta^n\|_0^2, \quad (19)$$

联立(16)~(19)式, 得  $\tilde{A}_0 \|\theta^n\|_1^2 \leq -\sum_{k=0}^{n-1} A_k^n \|\theta^k\|_0^2 + \sigma$ , 其中  $\sigma = Ch^6 \tau^\alpha \|u_t\|_{L^\infty(H^3(\Omega))}^2 + C \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{tt}(X, t)\|_0^2 \tau^{4-\alpha}$ .

为了得到超逼近估计, 先用数学归纳法证明下式成立

$$\|\theta^n\|_1^2 \leq \tilde{A}_{n-1}^{-1} \sigma. \quad (20)$$

在(20)式中令  $n=1$ , 并注意到  $\theta^0=0$  得  $\tilde{A}_0 \|\theta^1\|_1^2 \leq -\sum_{k=0}^{n-1} A_0^1 \|\theta^0\|_0^2 + \sigma = \sigma$ , 从而得当  $n=1$  时(20)式成立.

假设当  $n = 1, 2, \dots, q$  时(20)式成立,则当  $n = q + 1 (0 \leq q \leq N - 1)$  时有

$$\begin{aligned} \|\theta^{q+1}\|_1^2 &\leq -\tilde{A}_0^{-1} \sum_{j=0}^q A_j^{q+1} \|\theta^j\|_0^2 + \tilde{A}_0^{-1} \sigma = \tilde{A}_0^{-1} \sum_{j=1}^q (\tilde{A}_{j-1} - \tilde{A}_j) \|\theta^{q+1-j}\|_0^2 + \tilde{A}_0^{-1} \sigma \leq \\ &\tilde{A}_0^{-1} \sum_{j=1}^q (\tilde{A}_{j-1} - \tilde{A}_j) \tilde{A}_{q-j}^{-1} \sigma + \tilde{A}_0^{-1} \sigma \leq \tilde{A}_0^{-1} \sum_{j=1}^q (\tilde{A}_{j-1} - \tilde{A}_j) \tilde{A}_{q-j}^{-1} \sigma + \tilde{A}_0^{-1} \sigma = \tilde{A}_q^{-1} \sigma, \end{aligned}$$

因此,  $n = q + 1 (0 \leq q \leq N - 1)$  时成立.

由第二数学归纳法可知(20)式对所有的  $n$  都成立.

根据文献[8]有下式成立  $\tilde{A}_{N-1}^{-1} \leq C\tau^{-\alpha}$ , 利用上式

和(20)式得  $\|\theta^n\|_1^2 \leq \tilde{A}_{n-1}^{-1} \sigma \leq \tilde{A}_{N-1}^{-1} \sigma \leq C\tau^{-\alpha} \sigma$ , 进而可导出  $\|\theta^n\|_1 = O(h^3 + \tau^{2-\alpha})$ .

再利用三角不等式和引理 2 可知  $\|I_h u - U^n\|_1 \leq$

$$\|I_h u - R_h u\|_1 + \|R_h u - U^n\|_1 = O(h^3 + \tau^{2-\alpha}).$$

定理 1 证毕.

接下来研究二次三角形元的整体超收敛性.如图 2,

把 4 个小单元  $K \in \Gamma_h$  合成一个大单元  $E$ , 类似于文献

[12] 中的插值后处理算子  $\prod_{2h}^3: C(E) \rightarrow S_{2h}^3 = \{v \mid v \in P_3(E), v|_{\partial\Omega} = 0\}$ ,

$$\prod_{2h}^3 u(Z_i) = u(Z_i), i = 1, 2, \dots, 6, \int_{l_i} \prod_{2h}^3 u dl = \int_{l_i} u dl, i = 1, 2, 3, 4,$$

其中  $P_3(E)$  为  $E$  上完全三次多项式集合,  $C(E)$  为  $E$  上连续函数空间.

易证, 对  $\forall u \in H^4(\Omega)$ , 上述插值算子  $\prod_{2h}^3$  满足

$$\prod_{2h}^3 I_h u = \prod_{2h}^3 u, \|\prod_{2h}^3 u - u\|_1 \leq Ch^3 \|u\|_4, \|\prod_{2h}^3 v\|_1 \leq C \|v\|_1, \forall v \in S_{2h}^3. \quad (21)$$

利用定理 1 和(21)式, 不难得到如下结论.

**定理 2** 在与定理 1 同样的假设条件下, 有  $\|\prod_{2h}^3 U^n - u^n\|_1 = O(h^3 + \tau^{2-\alpha})$ .

**注 2** 文中的定理 1 和定理 2 是单独利用插值和投影无法得到的.因为在超逼近的估计过程中, 若直接用插值, 定理 1 证明中  $F_2$  将变成  $(\nabla(u^n - I_h u^n), \nabla \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)(I_h u^n - U^n))$ , 此项的估计如下

$$|(\nabla(u^n - I_h u^n), \nabla \tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)(I_h u^n - U^n))| \leq Ch^2 \|u\|_{4, \infty} \|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)(I_h u^n - U^n)\|_1,$$

右端中出现  $\|\tilde{P}_{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(\tilde{D}_t)(I_h u^n - U^n)\|_1$  这样的项使得超逼近估计无法顺利进行, 所以不易导出本文的定理 1; 另一方面, 若仅限于用投影, 有关投影的插值后处理算子还无法构造, 因此到目前为止很难得到定理 2. 综上所述该文采用二次三角形元插值的积分恒等式高精度结果与投影的优良特性完美结合的举措, 实现超逼近和超收敛估计.

**注 3** 本文的估计方法对文献[15]中的二次 Hermite 型有限元同样也是适用的.

**注 4** 对于文献[16]中的类 Carey 元, 应用该文的思想还无法导出超逼近和超收敛结果.

### 参 考 文 献

[1] LI Z Y, LIU Y K, YAMAMOTO M. Initial-boundary value problems for multi-term time fractional diffusion equations with positive constant coefficients[J]. Appl Math Comput, 2015, 257(15): 381-397.

[2] SAKAMOTO K, YAMAMOTO M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems[J]. J Math Anal Appl, 2011, 382(1): 426-447.

[3] DING X L, JIANG Y L. Analytical solutions for the multi-term time-space fractional advection-diffusion equations with mixed boundary conditions[J]. Nonlinear Anal-Real, 2013, 14(2): 1026-1033.

[4] REN J C, SUN Z Z, ZHAO X. Compact difference scheme for the fractional sub-diffusion equation with Neumann boundary conditions[J]. J Comput Phys, 2013, 232(1): 456-467.

[5] AL-REFAI M, LUCHKO Y. Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville frac-

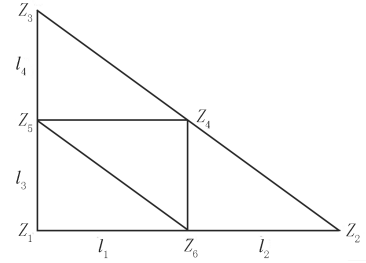


图 2 大单元 E  
Fig.2 Big element E

- tional derivatives[J].Appl Math Comput,2015,257(15):40-51.
- [6] 景今.变分数阶微分方程的 RBFS 数值算法[D].济南:山东大学,2013.  
JING J.RBFs Algorithm for Variable Order Fractional Equation[D].Jinan:Shandong University,2013.
- [7] JIN B T, LAZAROV R, LIN Y K, et al.The Galerkin finite element method for a multi-term time fractional diffusion equation[J].J Comput Phys,2015,281:825-843.
- [8] ZHAO Y M, ZHANG Y D, LIU F W, et al.Convergence and superconvergence of a fully-discrete scheme for multi-term time fractional diffusion equations[J].Comput Math Appl,2017,73(6):1087-1099.
- [9] 王芬玲,樊明智,赵艳敏,等.多项时间分数阶扩散方程各向异性线性三角元的高精度分析[J].计算数学,2018,40(3):299-312.  
WANG F L, FAN M Z, ZHAO Y M, et al.High accuracy analysis of anisotropic linear triangular element for multi-term time fractional diffusion equations[J].Math Num Sinica,2018,40(3):299-312.
- [10] 石东洋,王芬玲,赵艳敏.非线性 sine-Gordon 方程的各向异性线性元高精度分析新模式[J].计算数学,2014,36(3):245-256.  
SHI D Y, WANG F L, ZHAO Y M.A new Pattern of high accuracy analysis of anisotropic linear element for nonlinear sine-Gordon equations[J].Math Num Sinica,2014,36(3):245-256.
- [11] SHI D Y, WANG P L, ZHAO Y M.Superconvergence analysis of anisotropic linear triangular finite element for nonlinear Schrödinger equation[J].Appl Math Letters,2014,38(38):129-134.
- [12] 林群,严宁宁.高效有限元构造与分析[M].保定:河北大学出版社,1996.  
LIN Q, YAN N N.The construction and analysis for effective finite element methods[M].Baoding:Hebei University Publishers,1996.
- [13] 石东洋,梁慧.各向异性网格下线性三角形元的超收敛性分析[J].工程数学学报,2007,24(3):487-493.  
SHI D Y, LANG H.The Superconvergence analysis of linear triangular element on anisotropic meshes[J].Chin J Eng Math,2007,24(3):487-493.
- [14] JIANG Y J, MA J T.High-order finite element methods for time-fractional partial differential equations[J].J Comput Appl Math,2011,235(11):3285-3290.
- [15] SHI D Y, LIANG H.Convergence and superconvergence analysis of a new quadratic Hermitetype triangular element on anisotropic meshes[J].Appl Comput Math,2009,27(2):257-269.
- [16] 李永献,杨晓侠.非线性伪双曲方程的类 Carey 元高精度分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(3):24-30.  
LI Y X, YANG X X.High accuracy analysis of quasi-Carey element for nonlinear pseudo-hyperbolic equations[J].Journal of Henan University(Natural Science Edition),2016,44(3):24-30.

## Superconvergence analysis of quadratic triangular element for multi-term time-fractional diffusion equations

Niu Yuqi, Wang Pingli, Wang Fenling

(School of Mathematics and Statistics, Xuchang University, Xuchang 461000, China)

**Abstract:** Based on the quadratic triangular finite element and time L1 approximate scheme, a fully-discrete scheme is established for multi-term time-fractional diffusion equation with Caputo derivative. Firstly, the high accuracy precision result of the quadratic triangular element is proved by using the integral identity technique under the uniform grid. Then, the spatial superclose result and temporal optimal error estimate are obtained by using the fractional derivative technique and the relationship between interpolation and projection. Furthermore, the superconvergence analysis is given through the interpolated postprocessing technique.

**Keywords:** multi-term time fractional diffusion equation; quadratic triangular element; fully-discrete scheme; superclose and superconvergence

[责任编辑 陈留院 赵晓华]