文章编号:1000-2367(2023)02-0025-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.02.003

校庆优秀校友专栏:数学

复合材料中的偏微分方程理论研究

李海刚[1],徐龙娟[2]

(1.北京师范大学 数学科学学院;数学与复杂系统教育部重点实验室,北京 100875;
2.首都师范大学 交叉科学研究院,北京 100048)

摘　要: 在过去的 50 年,复合材料的发展无疑是现代技术中的一个重要且成功的领域.复合材料通常由基体材料和夹杂材料复合而成. 高对比度复合材料在使用过程中,当夹杂彼此靠得很近时,往往会产生电场、磁场或应力场等物理场的集中现象,这是数学物理领域中的一个重要课题. 将着重介绍在过去的二十多年弹性复合材料应力集中问题在偏微分方程理论方面取得的一些重要进展和一些待解决的关键问题.

关键词: 复合材料;拉梅方程组;梯度估计;爆破速度;渐近展示

中图分类号: O175.23;O175.25　　　　**文献标志码:** A

现代科技的飞速发展离不开材料科学的发展,如新型纳米结构材料以及器件的设计与研制、周期纳米结构与等效模量等材料声学参数的构效关系等复合材料问题的研究,这些在航空航天、深海探测等高端科技领域有着极为迫切的需求.先进复合材料的研制与应用已成为 21 世纪科技发展的主要方向之一,其核心技术的突破遇到了大量的数学挑战,涉及偏微分方程、变分法、几何测度论、随机分析、非线性分析等领域,因此材料科学的持续长远发展需要大量基础数学研究人才的加入.

复合材料通常是由两种或两种以上的金属、陶瓷或高分子等材料经过复合工艺而制备成的一种多相材料, 其中基体材料与夹杂材料在某一特性方面的对比度往往比较高.在高对比度复合材料中,当夹杂靠得很近时会产生物理场的集中现象,如电场、电磁场、应力场等.随着新型复合材料数目的不断增加和新的材料不断被开发,美国科学院院士 FRIEDMAN A 在《对数学未来的思考》中认为:人类迄今在材料科学的数学研究方面所取得的成就,可以说仅仅是一个开始,还远远不能满足实际应用的需求,甚至对已经研究了很多年的标准材料也仍然面临着大量的数学挑战.例如,当一个均匀的弹性体在承受高压时会破裂.那么,破裂从何时开始,怎么开始? 它们又将如何扩展,何时会分裂成许多裂片,以至于材料最终彻底失效.

自 20 世纪 60 年代以来,工业上的巨大发展促进了复合材料背后数学理论的发展,新的数学工具出现也带动其他领域的发展.如均匀化、变分法、有限元方法、夹杂形状优化、补偿紧方法、拟共形映照等.这些理论的发展与完善既需要数学家、物理学家、力学家以及工程师们之间的相互交流与互动,也需要理论数学家与计算数学家之间更深层次的通力合作.由于玻璃纤维和轻质碳纤维复合材料在航空航天工业和体育器材等领域都有广泛的应用,1999 年,自适应有限元创始人 BABUŠKA IVO(美国工程院院士) 与瑞典航空研究所的两名工程师合作研究纤维增强复合材料中裂纹与破坏的计算分析[1].在复合材料中往往会有大量的纤维相互接触或几乎接触,而纤维之间的相互位置会严重影响复合材料能承受的最大应力.由于在碳纤维增强复

收稿日期: 2022-10-28;**修回日期:** 2022-12-22.

基金项目: 国家自然科学基金 (11971061).

作者简介(通信作者): 李海刚(1981—),男,河南安阳人,北京师范大学教授,博士生导师,教育部青年长江学者,主要从事材料科学中的偏微分方程理论研究,E-mail:hgli@bnu.edu.cn.

合材料中,小形变就会产生大应力,甚至产生裂纹,所以研究线性弹力方程组——拉梅(Lamé)方程组

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)=0 \tag{1}$$

能够精确地达到目的,其中(λ,μ)在基体材料与纤维材料中取不同的值.为了理解这个问题,研究对应的标量方程

$$\nabla\cdot(a\nabla u)=0 \tag{2}$$

也颇有价值,其中 a 在基体与纤维中也取不同常数.关于相互接触纤维之间应力的有界性,以及如何刻画纤维靠近时应力的集中行为,都是数值仿真过程中需要解决的关键问题[1].该问题也被称为 Babuška 问题.

在过去的二十多年间,Babuška 问题得到了众多数学家与应用数学家的关注,如 阿贝尔奖得主 NIRENBERG L(美国科学院院士),国际数学家大会报告人 LI Y(李岩岩),KANG H,MILTON G,以及 AMMARI H(欧洲科学院院士),VOGELIUS M 等,取得了一系列重要进展.由应力-应变关系,应力的集中问题对应着偏微分方程解的梯度估计问题,本文将从以下 3 个方面介绍这方面的进展:(1)对比度有限情形梯度的一致有界估计;(2)高对比度的极限情形梯度的最佳爆破估计与渐近展示;(3)双参数情形梯度的统一估计,并介绍在此过程中发展的多种偏微分方程方法,如层位势方法、Neumann-Poincaré 算子的谱方法、能量方法和 Green 函数方法等.

1 对比度有限的情形

由于方程组(1)结构的复杂性,在数学上,人们首先考虑其简化模型(2).由于二维简化的平面弹力模型与电传导(或热传导)模型是一致的,所以标量方程的 Babuška 问题也通常被称为传导问题,此时方程(2)的解 u 表示电势(或温度).具体地,考虑如下 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}\nabla\cdot(a\nabla u)=0, & x\in D,\\ u=\varphi, x\in\partial D,\end{cases} \tag{3}$$

其中 D 是 $\mathbf{R}^d(d\geq 2)$ 中的有界开集,D_1,D_2 是 D 中的有界凸子集,$\varphi\in C^2(\partial D)$,

$$a=\chi_{D\setminus(\overline{D_1\cup D_2})}+k\chi_{D_1\cup D_2}, \tag{4}$$

$k\in(0,1)\cup(1,\infty)$.这里有两类关键的参数:D_1 与 D_2 之间的距离 ε 和传导系数对比度 k.

第一个利用分析方法来研究该类问题传导性质的应用数学家可以追溯到 KELLER[2].关于 Babuška 提出的梯度有界性问题,当 k 有限时,BONNETIER 和 VOGELIUS[3] 首先证明了内含物是两个相切圆盘时,问题(3)解是 $W^{1,\infty}$ 的,这推进了 De Giorgi-Nash-Moser 关于 L^∞ 系数椭圆方程解是 C^α 的著名结果.随后,LI Y 和 VOGELIUS[4] 研究了带有分片 Hölder 连续系数的散度型椭圆方程

$$D_\alpha(A^{\alpha\beta}D_\beta u)=\mathrm{div}\ f, \tag{5}$$

建立解的分片 $C^{1,\alpha}$ 正则性与解的梯度的一致有界性.文献[5]将上述结果推广到带有分片 Hölder 连续系数的椭圆方程组的情形.文献[5]中的弱椭圆性包含了线性弹性方程组——拉梅方程组,回答了 Babuška 弹力问题一致有界性的问题.但是,文献[4-5]中的梯度估计的上界不能反映对纤维距离以及对比度大小的具体依赖关系.因此,为了实际问题的需要,仍然需要做进一步的研究.

2 高对比度的极限情形

2.1 超传导模型

当问题(3)中的 k 趋于无穷大时,称这类问题为超传导问题.将通过研究这类极限问题来刻画高对比度的复合材料中的电场(或应力场)随着内含物之间的距离 ε 趋于 0 产生的集中现象.

文献[6]利用层位势方法研究了 $\mathbf{R}^2$ 中两个相距 ε 的圆盘的情形,得到方程解的梯度 $|\nabla u|$ 的下界估计是 $\varepsilon^{-1/2}$ 阶的.文献[7]进一步给出了电场强度的上下界估计,进而得到 $|\nabla u|$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的爆破速度是 $\varepsilon^{-1/2}$ 阶的.文献[8-9]将此结果推广到了 $\mathbf{R}^2$ 中两个相邻的一般凸区域情形,得到了同样的爆破率.

对于更高维数,文献[10]利用极值原理研究了内含物是两个任意有界凸区域的超导问题:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\Omega:=D\backslash(\overline{D_1\cup D_2}),\\ u=C_i, & x\in\overline{D}_i, i=1,2,\\ \int_{\partial D_i}\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{+}=0, & i=1,2,\\ u=\varphi, & x\in\partial D\end{cases}\tag{6}$$

的梯度估计，其中 $C_i(i=1,2)$ 是待定常数，$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{+}:=\lim_{\tau\to 0}\frac{u(x+\nu\tau)-u(x)}{\tau}$，$\nu$ 表示区域的单位外法向量，他们得到了梯度的上下界估计：

$$\frac{\rho_d(\varepsilon)}{C\varepsilon}\leq\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\frac{C\rho_d(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

其中

$$\rho_d(\varepsilon)=\begin{cases}\sqrt{\varepsilon}, & d=2,\\ |\log\varepsilon|^{-1}, & d=3,\\ 1, & d\geq 4.\end{cases}\tag{7}$$

由此得到 $d=2$ 时 $|\nabla u|$ 的爆破率是 $\varepsilon^{-1/2}$ 阶的，$d=3$ 时是 $(\varepsilon|\log\varepsilon|)^{-1}$ 阶的，$d\geq 4$ 时是 ε^{-1} 阶的.文献[11] 将上述结论推广到内含物是有限个凸区域的情形.需要指出的是，在以上结果中，他们均假设内含物不能靠近边界，所以文献[10－11] 中的估计可看作是内部估计.对应的边界估计可参考文献[7,12].当内含物是非严格凸的或 $C^{1,\alpha}$ 时，文献[13] 证明了当内含物是相对凸的但不严格凸时，即带有部分“平坦”边界时，问题(6) 解的梯度 $|\nabla u|$ 是一致有界的，即爆破不会发生，揭示了“双黄蛋” 型内含物不产生集中的现象；当内含物相对凸的阶数 $m\in[2,\infty)$ 时，建立了 $|\nabla u|$ 的逐点上下界估计，进而得到 $|\nabla u|$ 的爆破速率与 d 和 m 的依赖关系：当 $m>d-1$ 时，爆破速率为 $\varepsilon^{\frac{1-d}{m}}$；当 $m=d-1$ 时为 $(\varepsilon|\log\varepsilon|)^{-1}$；当 $m<d-1$ 时为 ε^{-1}，该结论表明，当 $m\to\infty$ 时，$|\nabla u|$ 趋于有界；当 $1<m<2$ 时，内含物的光滑性条件由之前的 $C^{2,\alpha}$ 弱化到 $C^{1,\alpha}$ 时，利用 De Giorgi-Nash 估计和 Campanato 方法证明得到 $|\nabla u|$ 的爆破速率当 $d=2$ 时为 $\varepsilon^{-1/m}$，当 $d\geq 3$ 时为 ε^{-1}.这些结论揭示了空间维数与内含物的相对凸性对超导问题解的梯度爆破速率的根本影响.当 $k=0$ 时，对应的绝缘模型最近也取得重要进展，见文献[14－17].关于对 ∇u 性质的更多研究，可参考文献[18－28]等.关于非线性偏微分方程解的梯度的爆破分析，可参考文献[29－31]中关于 p-Laplace 方程的研究.

文献[32]建立了 $\mathbf{R}^2$ 中梯度的定量描述，即证明得到了梯度关于 ε 的渐近表达式.他们考虑超导体问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\mathbf{R}^2\backslash(\overline{D_1\cup D_2}),\\ u=\lambda_i, & x\in\partial D_i, i=1,2,\\ u(x)-H(x)=O(|x|^{-1}), & |x|\to\infty,\end{cases}$$

其中常数 λ_i 由 $\int_{\partial D_i}\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{+}=0$ 确定，$H(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中给定的调和函数.当 D_1 和 D_2 是 $\mathbf{R}^2$ 中半径分别为 r_1 和 r_2 的圆盘时，他们利用奇异函数 q，

$$\begin{cases}\Delta q=0, & x\in\mathbf{R}^2\backslash(\overline{D_1\cup D_2}),\\ q=c_i, & x\in\partial D_i, i=1,2,\\ \int_{\partial D_i}\left.\frac{\partial q}{\partial\nu}\right|_{+}=(-1)^i, & i=1,2,\\ q(x)=O(|x|^{-1}), & |x|\to\infty,\end{cases}\tag{8}$$

其中 c_i 是两个常数，建立了 ∇u 与 r_1,r_2,ε，和 H 之间的具体依赖关系.当 D_1 和 D_2 是 $\mathbf{R}^2$ 中两个 $C^{2,\gamma}(\gamma\in(0,1))$ 的有界区域时，文献[33] 通过一个与定义在内含物边界上的 Neumann-Poincaré 算子对应的特征函数的单层位势构造了奇异函数.他们将该奇异函数与文献[32] 中内含物是两个圆盘时的奇异函数进行比较，定量地描述了梯度的爆破速率.相关结果也可参考文献[34].$\mathbf{R}^3$ 中的类似结果见文献[35]，他们考虑了内含物是两个半径相等的球的情形.对于半径不相等的情形，可参考文献[36].对于任意维数空间中梯度的爆破

速率的定量表示,文献[37]研究了内含物是有界凸区域的情形,证明得到了 $|\nabla u|$ 关于内含物间距 ε 的渐近等式.该结果对超导问题(6)解的梯度的奇异行为给出了完备的回答.更多结果见文献[38].对应的边界估计,即内含物与外部基体边界充分靠近时,可参考文献[39].

2.2 硬纤维模型

在高对比度的弹性复合材料中,当内含物靠得很近时,往往会发生应力集中现象.与极限问题(6)类似,当纤维的 Lamé 常数 $\min\{\mu_1, d\lambda_1+2\mu_1\}\to\infty$ 时,u 满足如下方程

$$\begin{cases}\mathscr{L}_{\lambda,\mu}u := \mu\Delta u+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)=0, & x\in\Omega,\\ u|_+=u|_-, & x\in\partial D_i, i=1,2,\\ e(u)=\dfrac{1}{2}(\nabla u+(\nabla u)^{\mathrm{T}})=0, & x\in D_i, i=1,2,\\ \displaystyle\int_{\partial D_i}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_+\cdot\psi_\alpha=0, & i=1,2,\alpha=1,2,\cdots,d(d+1)/2,\\ u=\varphi, & x\in\partial D,\end{cases}\tag{9}$$

其中 $\varphi\in C^2(\partial D;\mathbf{R}^d)$ 给定,$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_+ := (\mathbf{C}^0 e(u))\vec{n}=\lambda(\nabla\cdot u)\vec{n}+\mu(\nabla u+(\nabla u)^{\mathrm{T}})\vec{n}$,$\psi_\alpha$ 是刚性位移空间

$$\Psi := \{\psi\in C^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)\mid \nabla\psi+(\nabla\psi)^{\mathrm{T}}=0\}\tag{10}$$

的一组基.关于问题(9)解的存在性、唯一性和正则性,见文献[40].特别地,(9)的 H^1 弱解是 $C^1(\overline{\Omega};\mathbf{R}^d)\cap C^1(\overline{D}_1\cup\overline{D}_2;\mathbf{R}^d)$ 的.

文献[40-41]通过改进文献[26]中的迭代技术并利用精细的能量估计方法得到 Lamé 方程组(9)解的梯度的逐点上界估计:

$$|\nabla u(x)|\le C\|\varphi\|_{C^2(\partial D;\mathbf{R}^d)}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}+\mathrm{dist}(x,\overline{P_1P_2})}, & d=2,\\ \dfrac{1}{|\log\varepsilon|(\varepsilon+\mathrm{dist}^2(x,\overline{P_1P_2}))}+\dfrac{\mathrm{dist}(x,\overline{P_1P_2})}{\varepsilon+\mathrm{dist}^2(x,\overline{P_1P_2})}, & d=3,\end{cases}\tag{11}$$

其中 $P_1\in\partial D_1$ 和 $P_2\in\partial D_2$ 使得 $\mathrm{dist}(P_1,P_2)=\mathrm{dist}(\partial D_1,\partial D_2)=\varepsilon$,$\overline{P_1P_2}$ 表示连接 P_1 和 P_2 的线段.他们构造了标量辅助函数 $\bar{u}\in C^2(\mathbf{R}^d)$,结合(10)中定义的 ψ,引入向量值辅助函数 $\bar{u}\psi$,基于能量估计的迭代技术,确定了 $|\nabla u|$ 的主项,由此得到(11)式.

文献[42]引入一组线性泛函矩阵 $\mathscr{B}_d^{k_0}[\varphi]$,其中 $k_0=1,2,\cdots,d$ 是一个整数,证明得到了对应的下界估计:

$$|\nabla u(x)|\ge\frac{\rho_d(\varepsilon)}{C\varepsilon}\mathscr{B}_d^{k_0}[\varphi], x\in\overline{P_1P_2},\tag{12}$$

其中 $\rho_d(\varepsilon)$ 定义如(7)所示.结合(11)和(12)的结果可知,$|\nabla u|$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的爆破速率是 $\varepsilon^{-1/2}$ 阶的,在 $\mathbf{R}^3$ 中是 $(\varepsilon|\log\varepsilon|)^{-1}$ 阶的.当内含物的光滑性由 $C^{2,\alpha}$ 减弱为 $C^{1,\alpha}$ 时,文献[43]证明得到此时 $|\nabla u|$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的爆破速率是 $\varepsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}}$ 阶的,在 $\mathbf{R}^d(d\ge3)$ 中是 ε^{-1} 阶的.揭示了内含物光滑性对爆破速率的影响.对应的边界估计见文献[44-45].

从工程实际应用的角度来看,更重要的是通过建立梯度的渐近表达式来捕捉梯度的奇异行为.文献[46]利用层位势方法和奇异函数 q 和(8)式,结合 Lamé 常数 (λ,μ),构造了向量值的奇异函数 Q_i,$i=1,2$,满足

$$\mathscr{L}_{\lambda,\mu}Q_i=0, x\in\mathbf{R}^2\setminus\{\delta_1,\delta_2\},$$

其中 δ_1 和 δ_2 分别是反演变换 R_1R_2 和 R_2R_1 的唯一不动点.他们发现方程的解可以表示如下:

$$u=C_1Q_1+C_2Q_2+b,$$

其中 C_1 和 C_2 是两个与 ε 有关的常数,∇b 有界.从这个解的表示中他们证明得到 $|\nabla u|$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的爆破率是 $\varepsilon^{-1/2}$ 阶的.对于一般的凸区域 D_1 和 D_2,文献[47]得到任意维数的 ∇u 的渐近展式.

上述建立的 ∇u 在窄区域上的渐近展示,局部的应力集中对复合材料的整体效能会有直接影响.假设复

合材料是周期排列的,文献[48]得到了有效剪切模量和拉伸模量关于内含物间距 ε 的渐近展示.文献[49]基于对偶变分原理,给出了 Flaherty-Keller 公式的严格数学证明,得到的渐近展示带有 $O(\varepsilon^{-1/4})$ 阶的低阶项.最近,文献[50]利用完全不同的方法将余项改进到了 $O(1)$ 阶.他们借助文献[40-41]中发展完善的迭代技术,修正其中的辅助函数,改进了凸内含物周期材料的有效剪切模量和拉伸模量的 Flaherty-Keller 公式,实现了从局部梯度估计理论到整体有效性能理论的统一.

3 双参数问题的统一估计

在偏微分方程的理论研究与数值计算研究中,双参数问题往往较单参数问题困难许多,所以如何建立解的梯度与参数 k 以及内含物间距 ε 之间的具体关系也是弹性复合材料领域的核心问题.当内含物是 $\mathbf{R}^2$ 中的圆盘时,文献[51]考虑了下面的非齐次问题:

$$\begin{cases}\nabla\cdot(a\nabla u)=f, & x\in D,\\ u=\varphi, & x\in\partial D,\end{cases}$$

其中 a 的定义如(4)所示.他们利用 Green 函数方法,证明得到了梯度和高阶导数关于 k 与 ε 的具体依赖表达式

$$\|\nabla u\|_{L^\infty}\leq\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{k}},k\gg 1.$$

该结果统一了传导问题中方程系数有限情形与部分退化情形的梯度估计.取 $a=\chi_{D\setminus(\overline{D_1\cup D_2})}+k_1\chi_{D_1}+k_2\chi_{D_2}$,当 $(k_1-1)(k_2-1)<0$ 时,文献[52]考虑了 $\mathbf{R}^2$ 中的齐次问题

$$\begin{cases}\nabla\cdot(a\nabla u)=0, & x\in\mathbf{R}^2,\\ u(x)-H(x)=O(|x|^{-1}), & |x|\to\infty,\end{cases}$$

其中 $H(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中给定的调和函数.假设 D_1 和 D_2 是两个圆盘,利用 Neumann-Poincaré 算子的谱的性质,建立了解的梯度和高阶导数估计,发现此时 $|\nabla u|$ 是有界的,且与 k_1,k_2 和 ε 无关.特别地,取 $k_1=0,k_2=\infty$ 或 $k_1=\infty,k_2=0$ 时,$|\nabla u|$ 仍然有界,但是 $|\nabla^2 u|$ 的爆破速率是 $\varepsilon^{-1/2}$ 阶的.更多相关结果可参考文献[53]最近的工作.

如何将上述关于二维圆盘内含物的结果推广到一般的凸内含物和任意有限维数仍然是一个公开的问题.如何将标量的结果推广到对应的拉梅方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot((\chi_\Omega\mathbf{C}^0+\chi_{D_1\cup D_2}\mathbf{C}^1)e(u))=0, & x\in D,\\ u=\varphi, & x\in\partial D,\end{cases}$$

更是一个极具挑战且非常重要的问题.

参 考 文 献

[1] BABUŠKA I,ANDERSSON B,SMITH P,et al.Damage analysis of fiber composites. I. Statistical analysis on fiber scale[J].Comput Methods Appl Mech Engrg,1999,172(1/2/3/4):27-77.

[2] KELLER J.Conductivity of a medium containing a dense array of perfectly conducting spheres or cylinders or nonconducting cylinders[J]. J Appl Phys,1963,34: 991-993.

[3] BONNETIER E,VOGELIUS M.An elliptic regularity result for a composite medium with "touching" fibers of circular cross-section[J]. SIAM J Math Anal,2000,31:651-677.

[4] LI Y,VOGELIUS M.Gradient estimates for solutions to divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients[J].Arch Rational Mech Anal,2000,153:91-151.

[5] LI Y,NIRENBERG L.Estimates for elliptic systems from composite material[J].Comm Pure Appl Math,2003,56:892-925.

[6] AMMARI H,KANG H,LIM M.Gradient estimates for solutions to the conductivity problem[J].Math Ann,2005,332(2):277-286.

[7] AMMARI H,KANG H,LEE H,et al.Optimal estimates for the electric field in two dimensions[J].J Math Pures Appl,2007,88(4):307-324.

[8] YUN K.Estimates for electric fields blown up between closely adjacent conductors with arbitrary shape[J].SIAM J Appl Math,2007,67:

714-730.

[9] YUN K.Optimal bound on high stresses occurring between stiff fibers with arbitrary shaped cross-sections[J].J Math Anal Appl,2009,350:306-312.

[10] BAO S,LI Y,YIN B.Gradient estimates for the perfect conductivity problem[J].Arch Ration Mech Anal,2009,193:195-226.

[11] BAO S,LI Y,YIN B.Gradient estimates for the perfect and insulated conductivity problems with multiple inclusions[J].Comm Partial Differential Equations,2010,35:1982-2006.

[12] LI H,XU L.Optimal estimates for the perfect conductivity problem with inclusions close to the boundary[J].SIAM J Math Anal,2017,49(4):3125-3142.

[13] CHEN Y,LI H,XU L.Optimal gradient estimates for the perfect conductivity problem with $C^{1,\alpha}$ inclusions[J].Ann Inst H Poincar Anal Non Linaire,2021,38(4):953-979.

[14] DONG H,LI Y,YANG Z.Optimal gradient estimates of solutions to the insulated conductivity problem in dimension greater than two [J/OL].[2022-10-20].https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.11313.

[15] DONG H,LI Y,YANG Z.Gradient estimates for the insulated conductivity problem:the non-umbilical case[J/OL].[2022-10-20]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.10081.

[16] LI Y,YANG Z.Gradient estimates of solutions to the insulated conductivity problem in dimension greater than two[J/OL].[2022-10-15]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.14056.

[17] WEINKOVE B.The insulated conductivity problem,effective gradient estimates and the maximum principle:10.48550/arxiv.2013.14143 [P].2021-03-25.

[18] AMMARI H,BONNETIER E,TRIKI F,et al.Elliptic estimates in composite media with smooth inclusions:an integral equation approach[J].Ann Sci éc Norm Supér,2015,48(2):453-495.

[19] BUDIANSKY B,CARRIER G.High shear stresses in stiff fiber composites[J].J App Mech,1984,51:733-735.

[20] BONNETIER E,TRIKI F.On the spectrum of the Poincaré variational problem for two close-to-touching inclusions in $2D$[J].Arch Ration Mech Anal,2013,209(2):541-567.

[21] DONG H.Gradient estimates for parabolic and elliptic systems from linear laminates[J].Arch Ration Mech Anal,2012,205(1):119-149.

[22] DONG H,ZHANG H.On an elliptic equation arising from composite materials[J].Arch Rational Mech Anal,2016,222(1):47-89.

[23] GORB Y.Singular behavior of electric field of high-contrast concentrated composites[J].Multiscale Model Simul,2015,13(4):1312-1326.

[24] GORB Y,BERLYAND L.Asymptotics of the effective conductivity of composites with closely spaced inclusions of optimal shape[J]. Quart J Mech Appl Math,2005,58:83-106.

[25] KANG H,KIM E.Estimation of stress in the presence of closely located elastic inclusions:A numerical study[J].Contemporary Math,2016,660:45-57.

[26] LI H,LI Y,BAO S,et al.Derivative estimates of solutions of elliptic systems in narrow regions[J].Quart Appl Math,2014,72(3):589-596.

[27] LIM M,YU S.Asymptotics of the solution to the conductivity equation in the presence of adjacent circular inclusions with finite conductivities[J].J Math Anal Appl,2015,421:131-156.

[28] LIM M,YUN K.Blow-up of electric fields between closely spaced spherical perfect conductors[J].Comm Partial Differential Equations,2009,34:1287-1315.

[29] CIRAOLO G,SCIAMMETTA A.Gradient estimates for the perfect conductivity problem in anisotropic media[J].J Math Pures Appl,2019,127:268-298.

[30] CIRAOLO G,SCIAMMETTA A.Stress concentration for closely located inclusions in nonlinear perfect conductivity problems[J].J Differential Equations,2019,266(9):6149-6178.

[31] GORB Y,NOVIKOV A.Blow-up of solutions to a p-Laplace equation[J].Multiscale Model Simul,2012,10:727-743.

[32] KANG H,LIM M,YUN K.Asymptotics and computation of the solution to the conductivity equation in the presence of adjacent inclusions with extreme conductivities[J].J Math Pures Appl,2013,99:234-249.

[33] AMMARI H,CIRAOLO G,KANG H,et al.Spectral analysis of the Neumann-Poincaré operator and characterization of the stress concentration in anti-plane elasticity[J].Arch Ration Mech Anal,2013,208(1):275-304.

[34] KANG H,LEE H,YUN K.Optimal estimates and asymptotics for the stress concentration between closely located stiff inclusions[J]. Math Ann,2015,363:1281-1306.

[35] KANG H,LIM M,YUN K.Characterization of the electric field concentration between two adjacent spherical perfect conductors[J]. SIAM J Appl Math,2014,74:125-146.

[36] LI H,WANG F,XU L.Characterization of Electric Fields between two Spherical Perfect Conductors with general radii in 3D[J].J Differential Equations,2019,267(11):6644-6690.

[37] LI H.Asymptotics for the electric field concentration in the perfect conductivity problem[J].SIAM J Math Anal,2020,52:3350-3375.

[38] LI H, LI Y, YANG Z. Asymptotics of the gradient of solutions to the perfect conductivity problem[J]. Multiscale Model Simul, 2019, 17: 899-925.

[39] CHEN Y, HAO X, XU L. Upper and lower bounds for stress concentration in linear elasticity when $C^{1,\alpha}$ inclusions are close to boundary [J]. Quart Appl Math, 2022. DOI: 10.1090/qam/1621.

[40] BAO J, LI H, LI Y. Gradient estimates for solutions of the Lamé system with partially infinite coefficients[J]. Arch Ration Mech Anal, 2015, 215(1): 307-351.

[41] BAO J, LI H, LI Y. Gradient estimates for solutions of the Lamé system with partially infinite coefficients in dimensions greater than two [J]. Adv Math, 2017, 305: 298-338.

[42] LI H. Lower bounds of gradient′s blow-up for the Lamé system with partially infinite coefficients[J]. J Math Pures Appl, 2021, 149: 98-134.

[43] CHEN Y, LI H. Estimates and asymptotics for the stress concentration between closely spaced stiff $C^{1,\gamma}$ inclusions in linear elasticity[J]. J Funct Anal, 2021, 281: 1-63.

[44] BAO J, JU H, LI H. Optimal boundary gradient estimates for Lamé systems with partially infinite coefficients[J]. Adv Math, 2017, 314: 583-629.

[45] LI H, ZHAO Z. Boundary blow-up analysis of gradient estimates for Lamé systems in the presence of M-convex hard inclusions[J]. SIAM J Math Anal, 2020, 52(4): 3777-3817.

[46] KANG H, YU S. Quantitative characterization of stress concentration in the presence of closely spaced hard inclusions in two-dimensional linear elasticity[J]. Arch Rational Mech Anal, 2019, 232: 121-196.

[47] LI H, XU L. Asymptotics of the stress concentration in high-contrast elastic composites: 1048550/arXiv: 2004.06310[P]. 2020-04-14.

[48] FLAHERTY J, KELLER J. Elastic behavior of composite media[J]. Comm Pure Appl Math, 1973, 26: 565-580.

[49] KANG H, YU S. A proof of the Flaherty-Keller formula on the effective property of densely packed elastic composites[J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2020, 59(1): 13.

[50] LI H, LI Y. An extension of Flaherty-Keller formula for density packed m-convex inclusion[J/OL]. [2022-10-20]. https://doi.org/10.48550/arxiv.192.13261.

[51] DONG H, LI H. Optimal estimates for the conductivity problem by Green′s function Method[J]. Arch Ration Mech Anal, 2019, 231: 1427-1453.

[52] JI Y, KANG H. Spectrum of the Neumann-Poincaré operator and optimal estimates for transmission problems in presence of two circular inclusions[J/OL]. [2022-10-21]. https://doi.org/10.1093/imrn/rnac057, 2022.

[53] DONG H, YANG Z. Optimal estimates for transmission problems including relative conductivities with different signs[J/OL]. [2022-10-23]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.12237.

On study for the theory of partial differential equations in composite materials

Li Haigang[1], Xu Longjuan[2]

(1. School of Mathematical Sciences; Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China; 2. Academy for Multidisciplinary Studies, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

Abstract: In the past 50 years, the improvement of composite materials is undoubtedly an important and successful field in modern technology. It is composed of the matrix and inclusions. In high contrast composite materials, a high concentration of physical fields such as electric field, magnetic field or stress field will occur when the inclusions are close to each other, which is an important subject in the field of mathematical physics. In this paper, we will focus on the important advances in the theory of partial differential equations and some key open problems for the stress concentration of elastic composite materials in the past 20 years.

Keywords: composite materials; Lamé systems; gradient estimates; blow-up rates; asymptotics

［责任编校　陈留院　赵晓华］

本期优秀校友介绍

吴付科，华中科技大学教授，博士，博士生导师，博士毕业于华中科技大学数学与统计学院，曾在英国 Strathclyde 大学数学与统计系从事博士后研究，国家优秀青年基金获得者，入选教育部新世纪优秀人才支持计划.1998 年本科毕业于河南师范大学数学系，主要从事随机微分方程以及相关领域的研究，近年来主持 7 项国家自然科学基金.曾获得过美国数学学会交流项目(AMS：Ky and Yu-Fen Fan)和德意志对外交流文化中心支持基金(DAAD)的支持，2015 年获得湖北省自然科学二等奖，2017 年获得英国皇家学会“高级牛顿学者”基金.迄今为止，在 *SIAM* 系列杂志，*JDE*，*SPA* 等期刊发表论文 90 余篇，出版 1 部专著《随机微分方程》和 1 部译著《随机微分方程：导论与应用》，当前为 *IET Control Theory & Applications* 编委.

苗雨，河南师范大学教授，博士，博士生导师，科技处处长，河南省优秀青年科技专家.2001 年本科毕业于河南师范大学数学与信息科学学院，研究领域是概率论与数理统计，主持 3 项国家自然科学基金(青年 1 项，面上 2 项).先后担任数学与信息科学学院院长，河南省应用统计学会理事长，河南省数学会副理事长，河南省统计学类教学指导委员会副主任委员，中国现场统计研究会经济与金融统计分会常务理事，中国商业统计学会常务理事等.入选教育部新世纪优秀人才支持计划，河南省科技创新杰出青年支持计划，河南省高校科技创新人才支持计划.国家一流本科专业建设点、河南省高校科技创新团队、河南省高等学校精品在线课程、河南省重点学科负责人.荣获河南省青年科技奖，河南省青少年科技创新奖，被中共河南省委，中共河南省委高校工委分别授予优秀共产党员称号.

李海刚，北京师范大学教授，博士，博士生导师.2003 年本科毕业于河南师范大学数学与信息科学学院，主要从事材料科学中的偏微分方程理论研究，在复合材料中的 Babuška 问题、流-固模型的悬浮问题等方面取得一系列进展，已在 *Adv Math*，*ARMA*，*JMPA*，*JFA*，*AIHP-NL*，*SIMA*，*TAMS*，*CV&PDEs* 等国际权威数学杂志发表论文 30 余篇. 2016 年获得霍英东青年教师基金，2018 年获得教育部自然科学二等奖.入选 2020 年度教育部长江学者奖励计划青年学者.