文章编号:1000-2367(2018)01-0016-07　　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.01.003

一类 Minimax 分式规划问题的迭代算法

申培萍，陈晓

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:对一类 Minimax 分式规划问题(MFP)提出一个迭代算法. 首先通过引进变量和指数变换，将问题(MFP)等价转化为问题(Q)，然后利用代数-几何平均不等式以及合适的转化过程，将等价问题(Q)压缩为凸规划问题($\widetilde{\mathrm{Q}}$). 从而根据选择不同的点所对应的压缩问题($\widetilde{\mathrm{Q}}$)，将原问题的求解过程转化为求解一系列的凸规划问题. 数值实验表明算法是可行有效的.

关键词:Minimax 问题;凸规划;迭代算法

中图分类号:O221.2　　**文献标志码**:A

考虑如下一类带有广义多项式约束的 Minimax 分式规划问题:

$$(\mathrm{MFP}):\begin{cases}\min\max & \left\{\dfrac{n_1(x)}{d_1(x)},\dfrac{n_2(x)}{d_2(x)},\cdots,\dfrac{n_p(x)}{d_p(x)}\right\},\\ \text{s.t.} & x\in X=\{x\in \mathbf{R}_n^+\mid \psi_m(x)\leq 1,m=1,2,\cdots,l\}.\end{cases}$$

其中,

$$n_j(x)=\sum_{t=1}^{T_j^1}\alpha_{jt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{jti}^1}\ j=1,2,\cdots,p,$$

$$d_j(x)=\sum_{t=1}^{T_j^2}\beta_{jt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{jti}^2},\ j=1,2,\cdots,p,$$

$$\psi_m(x)=\sum_{t=1}^{T_m^3}\gamma_{mt}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_{mti}^3},m=1,2,\cdots,l.$$

$\alpha_{jt},\beta_{jt},\gamma_{mt},\rho_{jti}^1,\rho_{jti}^2,\rho_{mti}^3$ 均为任意实数;T_j^1,T_j^2,T_m^3 为任意正整数.假设问题(MFP)的可行域 X 是有界集,且目标函数中的 $n_j(x),d_j(x)$ 满足下面条件:

$$n_j(x)\geq 0,d_j(x)>0,\forall x\in X,j=1,2,\cdots,p.$$

问题(MFP)是一类特殊的分式规划问题,这类问题在很多领域有广泛应用,如:电子电路设计[1],神经网络[2],信号处理[3],衡量系统效率或生产率[4]等.近几年,对于这类问题已提出多种求解方法,包括分支定界算法[5],确定性算法[6],割平面算法[7],单调化方法[8]等等.这些方法都是针对问题(MFP)的特殊形式进行讨论的,如 $n_j(x),d_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 均为线性函数[5-6].本文考虑一类带有广义多项式约束的 Minimax 分式规划问题,首先通过引入变量将原来的 Minimax 问题转化为等价的极小化问题,再根据指数变换和代数-几何平均不等式,将等价问题压缩为易于求解的凸规划问题.这样,原来的 Minimax 问题的最优解就可以通过求解一系列凸规划问题而获得.同时,数值实验结果表明本文提出算法是可行和有效的.相比于其他方法,本文考虑的模型不仅更为广泛,而且数值算例表明算法在较少的迭代次数和运行时间内获得问题(MFP)的最优解.

收稿日期:2017-12-10;**修回日期**:2017-12-25.

基金项目:国家自然科学基金(11671122);河南省高等学校重点科研项目(17A110006).

作者简介(通信作者):申培萍(1964-),女,河南南阳人,河南师范大学教授,博士,研究方向为最优化理论与应用,E-mail:shenpp@htu.cn.

1　等价问题

首先,通过引进变量 x_{n+1} ,将问题(MFP)转化为如下等价形式:

$$(\text{EP1}):\begin{cases}\min & x_{n+1},\\ \text{s.t.} & \dfrac{n_j(x)}{d_j(x)}\leq x_{n+1}, \quad j=1,2,\cdots,p,\\ & \psi_m(x)\leq 1, \qquad m=1,2,\cdots,l,\end{cases}$$

问题(MFP)与问题(EP1)的等价性由下面定理 1 给出.

定理 1　如果 $(x^*,x^*_{n+1})\in \mathbf{R}^{n+1}$ 是问题(EP1)的全局最优解,则 x^* 是问题(MFP)的全局最优解.反之,如果 x^* 是问题(MFP)的全局最优解,那么 (x^*,x^*_{n+1}) 是问题(EP1)的全局最优解,其中 $x^*_{n+1}=\max\left\{\dfrac{n_1(x^*)}{d_1(x^*)},\cdots,\dfrac{n_p(x^*)}{d_p(x^*)}\right\}$.

证明　由问题(MFP)和问题(EP1)的结构易知结论成立,故略.

为了求解问题(EP1),令 $x_i=\exp(w_i)$, $i=1,2,\cdots,n+1$,则问题(EP1)中的不等式约束可写为:

$$\sum_{t=1}^{T_j^1}\alpha_{jt}\ \exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{jti}^1 w_i)\leq \sum_{t=1}^{T_j^2}\beta_{jt}\ \exp(\sum_{i=1}^{n}(\rho_{jti}^2 w_i+w_{n+1})),\ j=1,2,\cdots,p, \tag{1}$$

$$\sum_{t=1}^{T_m^3}\gamma_{mt}\ \exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{mti}^3 w_i)\leq 1, m=1,2,\cdots,l. \tag{2}$$

进一步,对于不等式约束(1)~(2)式,为了把它们表示为两个正项式差的形式,引入如下记号:

$$p_j^+=\{t\in T_j^1\mid \alpha_{jt}>0\}, p_j^-=\{t\in T_j^1\mid \alpha_{jt}<0\},$$
$$q_j^+=\{t\in T_j^2\mid \beta_{jt}>0\}, q_j^-=\{t\in T_j^2\mid \beta_{jt}<0\},$$
$$J_m^+=\{t\in T_m^3\mid \gamma_{mt}>0\}, J_m^-=\{t\in T_m^3\mid \gamma_{mt}<0\},$$

则不等式约束(1)~(2)式可表示为

$$f_j^+(w)-f_j^-(w)\leq g_j^+(w)-g_j^-(w), \tag{3}$$

$$\varphi_m^+(w)-\varphi_m^-(w)\leq 1, \tag{4}$$

其中,

$$f_j^+(w)=\sum_{t\in p_j^+}\alpha_{jt}\ \exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{jti}^1 w_i), f_j^-(w)=\sum_{t\in p_j^-}(-\alpha_{jt})\ \exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{jti}^1 w_i),$$

$$\varphi_m^+(w)=\sum_{t\in J_m^+}\gamma_{mt}\ \exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{mti}^3 w_i), \varphi_m^-(w)=\sum_{t\in J_m^-}(-\gamma_{mt})\ \exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{mti}^3 w_i),$$

$$g_j^+(w)=\sum_{t\in q_j^+}\beta_{jt}\ \exp(\sum_{i=1}^{n}(\rho_{jti}^2 w_i+w_{n+1})), g_j^-(w)=\sum_{t\in q_j^-}(-\beta_{jt})\ \exp(\sum_{i=1}^{n}(\rho_{jti}^2 w_i+w_{n+1})).$$

上面的不等式约束(3)式和(4)式,可进一步变为:

$$\frac{f_j^+(w)+g_j^-(w)}{f_j^-(w)+g_j^+(w)}\leq 1, j=1,2,\cdots,p,$$

$$\frac{\varphi_m^+(w)}{\varphi_m^-(w)+1}\leq 1, m=1,2,\cdots,l.$$

现在考虑(EP1)中的目标函数 x_{n+1} ,经指数变换 $x_i=\exp(w_i)$ 后,它可转化为 $\exp(w_{n+1})$.根据指数函数的单调性,可将 w_{n+1} 代替 $\exp(w_{n+1})$ 作为目标函数.因此,通过上述引进变量和指数变换,问题(EP1)等价于下面的问题(Q):

$$(\text{Q}):\begin{cases}\min & h_0(w)=w_{n+1},\\ \text{s.t.} & h_k(w)\leq 1, k=1,2,\cdots,p+l,\end{cases}$$

其中,

$$h_k(w)=\begin{cases}\dfrac{f_k^+(w)+g_k^-(w)}{f_k^-(w)+g_k^+(w)},k=1,2,\cdots,p,\\ \dfrac{\varphi_{k-p}^+(w)}{\varphi_{k-p}^-(w)+1},k=p+1,\cdots,p+l.\end{cases}$$

问题(EP1)与问题(Q)的等价性由如下定理 2 给出.

定理 2 若 $w^*=(\ln(x_1^*),\cdots,\ln(x_{n+1}^*))$ 是问题(Q)的全局最优解,则 $(x^*,x^*)_{n+1}\in\mathbf{R}^{n+1}$ 是问题(EP1)的全局最优解,其中 $x^*\in\mathbf{R}^n$.反之,若 $(x^*,x_{n+1}^*)\in\mathbf{R}^{n+1}$ 是问题(EP1)的全局最优解,那么 w^* 是问题(Q)的全局最优解,其中 $w^*=(\ln(x_1^*),\cdots,\ln(x_{n+1}^*))$.

证明 由问题(Q)的构造过程,易知问题(EP1)与问题(Q)的等价性成立,故略.

2 凸化过程

基于定理 1 和定理 2,原问题(MFP)等价于问题(Q).然而,观察到问题(Q)中的约束是一种多项式与多项式之比的形式,这使得问题(Q)是一类不易解决的 NP-难问题.为了求解问题(Q),将提出一种新的压缩方法,首先,将问题(Q)中约束的分母用单项式代替,使得问题(Q)中的约束转化为凸约束.为此,考虑如下函数:

$$G(w)=\sum_{t=1}^{q}b_t\exp(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}w_i).\tag{7}$$

给定点 $\varpi\in\mathbf{R}^{n+1}$,通过代数-几何平均不等式,有

$$G(w)\geq\hat{G}(w;\varpi)=\prod_{t=1}^{q}\left(\frac{b_t}{\alpha_t(\varpi)}\exp(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}w_i)\right)^{\alpha_t(\varpi)}=$$
$$\prod_{t=1}^{q}\left(\frac{b_t}{\alpha_t(\varpi)}\right)^{\alpha_t(\varpi)}\exp(\sum_{t=1}^{q}\alpha_t(\varpi)\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}w_i),\tag{8}$$

其中参数 $\alpha_t(\varpi)$ 可由(9)式得到

$$\alpha_t(\varpi)=\frac{b_t}{G(\varpi)}\exp(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i),t=1,2,\cdots,q.\tag{9}$$

现在,对问题(Q)的约束条件中的分母,利用(8)~(9)式,可以得到以下结果:

当 $k=1,2,\cdots,p$ 时,令

$$\theta_{kt}(\varpi)=\frac{(-\alpha_{kt})\exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{kti}^1\varpi_i)}{f_k^-(\varpi)+g_k^+(\varpi)},\sigma_{kt}(\varpi)=\frac{\beta_{kt}\exp(\sum_{i=1}^{n}(\rho_{kti}^2\varpi_i+\varpi_{n+1}))}{f_k^-(\varpi)+g_k^+(\varpi)},\tag{10}$$
$$\lambda_{kt}^1(\varpi)=\left(\prod_{t\in p_k^-}\left(\frac{-\alpha_{kt}}{\theta_{kt}(\varpi)}\right)^{\theta_{kt}(\varpi)}\right)\left(\prod_{t\in q_k^+}\left(\frac{\beta_{kt}}{\sigma_{kt}(\varpi)}\right)^{\sigma_{kt}(\varpi)}\right).$$

那么有

$$f_k^-(w)+g_k^+(w)\geq\prod_{t\in p_k^-}\left(\frac{(-\alpha_{kt})}{\theta_{kt}(\varpi)}\exp(\sum_{i=1}^{n}\rho_{kti}^1w_i)\right)^{\theta_{kt}(\varpi)}\prod_{t\in q_k^+}\left(\frac{\beta_{kt}}{\sigma_{kt}(\varpi)}\exp(\sum_{i=1}^{n}(\rho_{kti}^2w_i+w_{n+1}))\right)^{\sigma_{kt}(\varpi)}=$$
$$\lambda_{kt}^1(\varpi)\exp\left(\sum_{t\in p_k^-}\theta_{kt}(\varpi)\sum_{i=1}^{n}\rho_{kti}^1w_i+\sum_{t\in q_k^+}\sigma_{kt}(\varpi)\sum_{i=1}^{n}(\rho_{kti}^2w_i+w_{n+1})\right)\triangleq F_k(w;\varpi).$$

当 $k=p+1,\cdots,p+l$ 时,记

$$\xi_{k-p}(\varpi)=\frac{1}{\varphi_{k-p}^-(\varpi)+1},\tag{11}$$

$$\zeta_{(k-p)t}(\varpi)=\frac{(-\gamma_{(k-p)t})\exp(\sum_{i=1}^{n+1}\eta_{(k-p)ti}^3\varpi_i)}{\varphi_{k-p}^-(\varpi)+1},\tag{12}$$

$$\lambda^2_{(k-p)t}(\varpi)=\prod_{t\in J^-_{k-p}}\left(\frac{-\gamma_{(k-p)t}}{\zeta_{(k-p)t}(\varpi)}\right)^{\zeta_{(k-p)t}(\varpi)}\left(\frac{1}{\xi_{k-p}(\varpi)}\right). \tag{13}$$

则有

$$\varphi^-_{k-p}(w)+1\geq\prod_{t=1}^{J^-_{k-p}}\left(\frac{-\gamma_{(k-p)t}}{\zeta_{(k-p)t}(\varpi)}\exp(\sum_{i=1}^n\eta^3_{(k-p)ti}w_i)\right)^{\zeta_{(k-p)t}(\varpi)}\left(\frac{1}{\xi_{k-p}(\varpi)}\right)^{\xi_{k-p}(\varpi)}=$$

$$\lambda^2_{(k-p)t}(\varpi)\exp(\sum_{t\in J^-_{k-p}}\zeta_{(k-p)t}(\varpi)\sum_{i=1}^n\eta^3_{(k-p)ti}w_i)\triangleq\Phi_{k-p}(w;\varpi).$$

基于上述结果，可将问题(Q)最终压缩成下面问题：

$$\widetilde{Q}(\varpi):\begin{cases}\min & h_0(w)=w_{n+1},\\ \text{s.t.} & \tilde{h}_k(w;\varpi)\leq 1,\ k=1,2,\cdots,p+l,\end{cases}$$

其中，

$$\tilde{h}_k(w;\varpi)=\begin{cases}\dfrac{f^+_k(w)+g^-_k(w)}{F_k(w;\varpi)},k=1,2,\cdots,p,\\ \dfrac{\varphi^+_{k-p}(w)}{\Phi_{k-p}(w;\varpi)},k=p+1,\cdots,p+l.\end{cases}$$

由 $f^+_k(w)$，$g^-_k(w)$，$\varphi^+_{k-p}(w)$ 的表达式知，$f^+_k(w)$，$g^-_k(w)$，$\varphi^+_{k-p}(w)$ 都是凸函数，又根据 $F_k(w;\varpi)$ 和 $\Phi_{k-p}(w;\varpi)$ 均为单项式，故 $\tilde{h}_k(w;\varpi)$ 为凸函数.这样，问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 是凸规划问题.

对于任意给定的点 $\varpi\in\mathbf{R}^{n+1}$，从问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 的构造过程，可以发现，问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 和问题(Q)的最优值是相等的，且可以证明问题(Q)和问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 的约束函数满足：$h_k(\varpi)=\tilde{h}_k(\varpi;\varpi)$.这样，通过选取 $\varpi\in\mathbf{R}^{n+1}$，问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 可以作为问题(Q)的近似.因此，依靠选取不同的点 ϖ，问题(Q)的最优解就可以通过求解一系列的凸规划问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 得到，详细过程将在下面给出.

3　算法及其收敛性

基于上述讨论，原问题(MFP)等价于问题(Q).对于给定点 ϖ，利用代数-几何平均不等式，问题(Q)被压缩转化为凸规划问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$. 下面，将提出一个迭代算法，通过求解一系列的凸规划问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 来获得问题(Q)的最优解，继而获得问题(MFP)的最优解.首先，对于给定的初始点 w^0，令 $\varpi=w^0$，计算(10)、(11)和(12)式中相应参数 θ_{kt}，σ_{kt}，ξ_{k-p} 和 $\zeta_{(k-p)t}$，并求解凸规划问题 $\widetilde{Q}(w_0)$，记其解为 w^1.如果 $w^1=w^0$，算法终止，w^1 为问题(Q)的最优解.否则，令 $\varpi=w^1$，重复上述过程直至满足终止条件.算法具体过程如下：

步骤 0　选取初始点 w^0.置迭代次数 $r=1$.

步骤 1　令 $\varpi=w^{r-1}$.用 ϖ 计算(10)，(11) 和(12) 中相应的参数 θ_{kt}，σ_{kt}，ξ_{k-p}，$\zeta_{(k-p)t}$.

步骤 2　求解凸规划问题 $\widetilde{Q}(\varpi)$ 获得解 w^r.

步骤 3　若 $w^r=w^{r-1}$，算法停止.令 $w^*=w^r$ 且 w^* 为问题(Q)的最优解.否则，置 $r=r+1$，并转向步骤 1.

注　当算法停止时，问题(MFP)的最优解为 $x^*=(\exp(w^*_1),\exp(w^*_2),\cdots,\exp(w^*_n))$.

下面为了讨论算法的收敛性，先给出引理 1.

引理 1　对于算法中产生的每一个点 $w^r(r\geq 1)$ 均有

$$h_k(w^r)=\tilde{h}_k(w^r;w^r)\nabla h_k(w^r)=\nabla\tilde{h}_k(w^r;w^r),k=1,2,\cdots,p+l,$$

其中，∇ 代表函数的梯度.

证明　首先考虑(7)式和(8)式的函数 $G(w)$ 和 $\hat{G}(w;\varpi)$. 由(8)式知，

$$\hat{G}(\varpi;\varpi)=\prod_{t=1}^q\left(\frac{b_t}{\alpha_t(\varpi)}\exp(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i)\right)^{\alpha_t(\varpi)}, \tag{14}$$

将(9)式中的 $\alpha_t(\varpi)$ 代入(14)式，结合 $\sum_{t=1}^q\alpha_t(\varpi)=1$，有

$$\hat{G}(\varpi;\varpi)=\prod_{t=1}^{q}(G(\varpi))^{\alpha_t(\varpi)}=(G(\varpi))^{\sum\limits_{t=1}^{q}\alpha_t(\varpi)}=G(\varpi),$$

即 $G(\varpi)=\hat{G}(\varpi;\varpi)$.

另外,由(7)式和(8)式,得

$$\left.\frac{\partial G(w)}{\partial w_i}\right|_{\varpi}=\sum_{t=1}^{q}b_t\mu_{ti}\ \exp(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i\},i=1,2,\cdots,n+1,$$

$$\left.\frac{\partial \hat{G}(w;\varpi)}{\partial w_i}\right|_{\varpi}=\prod_{t=1}^{q}\left(\frac{b_t}{\alpha_t(\varpi)}\right)^{\alpha_t(\varpi)}\exp(\sum_{t=1}^{q}\alpha_t(\varpi)\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i)\sum_{t=1}^{q}\alpha_t\mu_{ti},i=1,2,\cdots,n+1.$$

结合 $\sum\limits_{t=1}^{q}\alpha_t=1$, 可得

$$\left.\frac{\partial \hat{G}(w;\varpi)}{\partial w_i}\right|_{\varpi}=\frac{G(\varpi)}{\exp(\sum\limits_{t=1}^{q}\alpha_t(\varpi)\sum\limits_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i)}\exp(\sum_{t=1}^{q}\alpha_t(\varpi)\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i)\sum_{t=1}^{q}\frac{b_t}{G(\varpi)}\mu_{ti}\ \exp(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i)=$$

$$\sum_{t=1}^{q}b_t\mu_{ti}\ \exp(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_{ti}\varpi_i),i=1,2,\cdots,n+1.$$

从而, $\frac{\partial G(\varpi)}{\partial w_i}=\frac{\partial \hat{G}(\varpi;\varpi)}{\partial w_i}$, $i=1,2,\cdots,n+1$,即 $\nabla G(\varpi)=\nabla\hat{G}(\varpi;\varpi)$. 利用上述结果,有下面式子成立:

$$f_k^-(w^r)+g_k^+(w^r)=F_k(w^r;w^r),\nabla(f_k^-(w^r)+g_k^+(w^r))=\nabla F_k(w^r;w^r),k=1,2,\cdots,p;$$

$$\varphi_{k-p}^-(w^r)+1=\Phi_{k-p}(w^r;w^r),\nabla(\varphi_{k-p}^-(w^r)+1)=\nabla\Phi_{k-p}(w^r;w^r),k=p+1,\cdots,p+l.$$

从而,有 $h_k(w^r)=\tilde{h}_k(w^r;w^r)$ 和 $\nabla h_k(w^r)=\nabla\tilde{h}_k(w^r;w^r)$ 成立.

定理 3 对于算法中产生的每个点 $w^r(r\geq 1)$,假设 $\tilde{Q}(\varpi)$ 满足 Slater′s 约束规范.如果算法迭代是有限步的,则算法终止于问题(Q)的 KKT 点; 否则,如果算法产生无限序列 $\{w^r\}$,则$\{w^r\}$ 的任意聚点都是问题(Q)的 KKT 点.

证明 若算法迭代 r 步后停止,那么,由于 $\tilde{Q}(w^r)$ 满足 Slater′s 约束规范,则问题 $\tilde{Q}(w^{r-1})$ 的最优解 w^r 是 KKT 点,即有

$$\nabla h_0(w^r)+\sum_{k=1}^{p+l}\lambda_k\nabla(\tilde{h}_k(w^r;w^{r-1})-1)=0,$$

$$\lambda_k(\tilde{h}_k(w^r;w^{r-1})-1)=0,k=1,2,\cdots,p+l,$$

$$\lambda_k\geq 0,\tilde{h}_k(w^r;w^{r-1})\leq 1,k=1,2,\cdots,p+l,$$

其中, λ_k 是拉格朗日乘子.由算法第 3 步,有 $w^{r-1}=w^r$, 从而,

$$\nabla h_0(w^r)+\sum_{k=1}^{p+l}\lambda_k\nabla\ (\tilde{h}_k(w^r;w^r)-1)=0,$$

$$\lambda_k(\tilde{h}_k(w^r;w^r)-1)=0,k=1,2,\cdots,p+l,$$

$$\lambda_k\geq 0,\tilde{h}_k(w^r;w^r)\leq 1,k=1,2,\cdots,p+l.$$

由引理 1 可以得出:

$$\nabla h_0(w^r)+\sum_{k=1}^{p+l}\lambda_k\nabla\ (h_k(w^r)-1)=0,$$

$$\lambda_k(h_k(w^r)-1)=0,k=1,2,\cdots,p+l,$$

$$\lambda_k\geq 0,h_k(w^r)\leq 1,k=1,2,\cdots,p+l,$$

这意味着 w^r 是问题(Q)的 KKT 点.

若算法是无限步迭代的,并假设 w^* 是序列$\{w^r\}$ 的聚点,则不失一般性,假设当 $r\to\infty$ 时,$\{w^r\}\to w^*$. 对(15)~(17)式两边取极限,可得

$$\nabla h_0(w^*)+\sum_{k=1}^{p+l}\lambda_k\nabla\ (h_k(w^*)-1)=0,$$

$$\lambda_k(h_k(w^*)-1)=0,k=1,2,\cdots,p+l,$$
$$\lambda_k\geq 0,h_k(w^*)\leq 1,k=1,2,\cdots,p+l,$$

即 w^* 是问题(Q)的 KKT 点.

4　数值实验

为验证本文算法,将下面两个例子分别用本文算法与文献[5,9]算法在酷睿双核 CPU(主频 2.5 GHz),4 GB 内存的微机上用 Matlab 进行数值计算,结果列于表 1 中,从表 1 可以看出本文算法是可行有效的.

例 1

$$\begin{aligned}\min\max\quad & \left\{\frac{2.1x_1+2.2x_2-x_3+0.8}{1.1x_1-x_2+1.2x_3},\frac{3.1x_1-x_2+1.3x_3}{8.2x_1+4.1x_2-x_3}\right\},\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2-x_3\leq 1,\\ & -x_1+x_2-x_3\leq -1,\\ & 12x_1+5x_2+12x_3\leq 40,\\ & 12x_1+12x_2+7x_3\leq 50,\\ & -6x_1+x_2+x_3\leq -2,\\ & 1.0\leq x_1\leq 1.2,0.55\leq x_2\leq 0.65,1.35\leq x_3\leq 1.45.\end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned}\min\max\quad & \left\{\frac{5x_1+4x_2-x_3+0.9}{3x_1-x_2+2x_3+0.5},\frac{3x_1-x_2+4x_3+0.5}{9x_1+3x_2-x_3+0.5},\frac{4x_1-x_2+6x_3+0.5}{12x_1+7x_2-x_3+0.9},\right.\\ & \left.\frac{7x_1-x_2+7x_3+0.5}{11x_1+9x_2-x_3+0.9},\frac{7x_1-x_2+7x_3+0.7}{11x_1+7x_2-x_3+0.9}\right\},\\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+2x_2-x_3\leq 3,\\ & -2x_1+x_2-3x_3\leq -1,\\ & 11x_1+7x_2+12x_3\leq 47,\\ & 13x_1+13x_2+6x_3\leq 56,\\ & -6x_1+2x_2+3x_3\leq -1,\\ & 1.0\leq x_1\leq 2,\quad 0.35\leq x_2\leq 0.9,\quad 1.0\leq x_3\leq 1.55.\end{aligned}$$

从表 1 可以看出,本文得到的最优值优于文献[5,9]的结果,且算法的迭代次数以及运行时间均少于文献[5,9]中的数据.

表 1　数值计算结果

例子	文献	最优解	最优值	迭代次数	运行时间/s
1	[5]	(1.0,0.55,1.45)	1.160 9	6	0.010 4
	[9]	(1.0,0.55,1.45)	1.161 6	18	0.133 2
	本文	(1.0,0.55,1.45)	1.160 3	2	0.010 0
2	[5]	(1.752 8,0.350 0,1.550 0)	1.117 7	26	0.148 7
	[9]	(1.753 8,0.350 0,1.550 0)	1.118 3	10	0.083 5
	本文	(1.752 8,0.350 0,1.550 0)	1.115 9	2	0.062 0

5　结　论

本文考虑一类带有广义多项式约束的 Minimax 分式规划问题,该优化问题包括二次规划、广义几何规划和多乘积规划等几类重要的数学规划问题,能广泛应用于电子电路设计、信号处理、经济金融等众多实际问题中. 该文基于指数变量变换和代数-几何平均不等式,将原问题的等价问题压缩成易于求解的凸规划问

题,通过求解一系列凸规划问题获得原问题的最优解.理论分析和数值实验结果表明本文提出算法是可行和有效的.

参 考 文 献

[1] Barrodale I.Best rational approximation and strict quasiconvexity[J].SIAM J Numer Anal,1973,10(1):8-12.

[2] Balasubramaniam P,Lakshmanan S.Delay-interval-dependent robust-stability criteria for neutral stochastic neural networks with polytopic and linear fractional uncertainties[J].Int J Comput Math,2011,88(10):2001-2015.

[3] Ding Feng.Decomposition based fast least squares algorithm for output error systems[J].Signal Process,2013,93:1235-1242.

[4] Stancu-Minasian I M.Fractional Programming: Theory,Methods and Applications[M].Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1997.

[5] Jiao H W,Liu S Y.A new linearization technique for minimax linear fractional programming[J].J Comput Math,2014,91(8):1730-1743.

[6] Feng Q G,Jiao H W,Mao H P,et al.A Deterministic Algorithm for Min-max and Max-min Linear Fractional Programming Problems[J].Int J Comput Intell Syst,2011,4:134-141.

[7] Barros A I,Frenk J B G.Generalized fractional programming and cutting plane algorithms[J].J Optim Theory Appl,1995,87(1):103-120.

[8] Phuong NTH,Tuy H.A unified monotonic approach to generalized linear fractional programming[J].J Global Optim,2003,26:229-259.

[9] Zhao Y F,Liu S Y,Jiao H W.A new branch and bound algorithm for minimax ratios problems[J].Open Mathematics,2017,15:840-851.

An iterative algorithm for a class of Minimax fractional programming problems

Shen Peiping, Chen Xiao

(College of Mathematics and Information Science,Henan Normal University,Xinxiang 453007,China)

Abstract: In this paper,we propose an iterative algorithm for solving a class of Minimax fractional programming problems. By introducing a new variable and utilizing an exponential variable transformation,problem (MFP) is equivalent to problem (Q).Then using condensed method,problem (Q) is converted into a series of convex programming problems ($\widetilde{Q}$).Numerical results show the feasibility and efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: Minimax problem; convex programs; iterative algorithm

[责任编校 陈留院]