

## 专栏:耦合系统同步动力学

**【特约主持人】**刘维清:江西省百千万人才工程人选,江西省物理学会理事

**【主持人按语】**许多系统是由大量相互作用的非线性子单元构成的,系统的功能实现不仅取决于这些子单元本身的动力学行为,还与系统在不同的相互作用方式,作用通道特性,作用强度下的同步程度密切相关.即使子单元是非常简单的个体,在非线性和相互作用下,也可因同步而涌现出复杂而有趣的自组织动力学行为.这些行为是许多系统功能实现的内在机制,如鸟群、鱼群的同步有序运动,心脏有节律地搏动,海豚的半脑睡眠,人脑的认知过程中各个功能区神经元子集的同步放电,以及因神经元之间同步或失同步引起的脑部疾病(如特定脑区的高度同步引发癫痫发作,特定脑区同步缺失引起帕金森病等).因此,研究耦合振子系统中各种形式的同步动力学行为和内在规律对理解系统的功能,揭示自然界中群体的涌现行为机制具有理论和现实意义.专栏文章《耦合振子系统中振幅包络同相同步向反相同步的转变》通过在吸引耦合神经元振子系统中引入排斥耦合作用,耦合神经振子系统的幅度与相位的相互作用下产生振幅包络相关性.对于给定的某一吸引耦合作用强度,排斥耦合强度的增加会使振幅包络从同相同步到反相同步的转变.该转变也可以出现在具有不同时间尺度的耦合周期振子系统中,说明吸引与排斥耦合作用竞争下,振幅包络从同相向反相同步转换现象具有普适性.耦合神经元振子系统中的振幅包络的同相位同步和反相位同步是协调神经行为的关键点,在学习、记忆等认知过程中起着重要作用.专栏文章《周期1与准周期访问映射下的层流混沌及其耦合同步》通过周期1与准周期的访问映射,观察单个系统的层流混沌现象;通过延迟耦合作用研究两个系统的层流混沌的同步行为.发现周期1的访问映射的系统中,不同的参数下出现了超前预期同步、广义滞后同步和完全同步行为;在准周期的访问映射系统中,上述三种同步现象不会单独存在,而是在同一个参数下,广义滞后同步与超前预期同步交替出现.绘制相应的图形并对其作出合理解释.

# 耦合振子系统中振幅包络同相同步向反相同步的转变

刘维清,石世嫔

(江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000)

**摘要:**耦合振子系统的振幅包络同步行为反映了耦合振子系统幅度与相位的相互作用.在吸引耦合神经元振子系统中引入排斥耦合作用,耦合系统的振幅包络会随着排斥耦合作用的增加从同相同步向反相同步转变.对于给定的吸引耦合神经元振子,随着引入的排斥耦合强度增加,耦合神经元振子的振幅包络之间的相位差会先从0耦合系统中的同步是由于振子之间的相互作用而使整个动力学系统趋于相同的集群动力学现象.随着研究的不断深入,

**收稿日期:**2023-12-08;**修回日期:**2024-01-23.

**基金项目:**国家自然科学基金(11765008);江西省科技厅重点资助项目(20202ACBL201004).

**作者简介(通信作者):**刘维清(1977-),男,江西兴国,江西理工大学教授,博士,研究方向为理论物理, E-mail:lwq\_jx@163.com.

**引用本文:**刘维清,石世嫔.耦合振子系统中振幅包络同相同步向反相同步的转变[J].河南师范大学学报(自然科学版), 2024, 52(5): 43-50. (Liu Weiqing, Shi Shipin. Amplitude envelope transition from in-phase to anti-phase synchronization in coupled oscillators system[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2024, 52(5): 43-50. DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.12.08.0001.)

增加至 $\pi$ ,然后又由 $\pi$ 开始减小.同时,振幅包络的幅值会随排斥耦合强度的增加先减小后增加,存在一个使振幅包络的幅度达到最小值的排斥耦合强度.吸引与排斥耦合竞争引起的振幅包络从同相同步向反相同步转变过程也可以在引入时间尺度的耦合 Stuart-Landau 振子中产生,具有普适性.该研究不仅可以丰富振幅包络的相关动力学研究,还有助于理解脑信息处理和传递过程.

**关键词:** 振幅包络;吸引耦合;排斥耦合;时间尺度;相同步;反相同步

**中图分类号:** O415.3

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-2367(2024)05-0043-08

耦合系统中的同步是由于振子之间的相互作用而使整个动力学系统趋于相同的集群动力学现象.随着研究的不断深入,不同类型的同步形式被相继发现,如完全同步<sup>[1]</sup>、滞后同步<sup>[2]</sup>、振幅包络同步<sup>[3]</sup>等.其中振幅包络同步是指耦合非全同振子系统中,频率失配使得振子的变量时序之间不存在相位相关性,但会在变量的时序上调制一个具有强相关性的振幅包络.由于振幅包络现象广泛存在于语音、神经、电力系统,通信信号中而备受关注.振幅包络同步现象最早在耦合混沌系统中被发现<sup>[3]</sup>,占萌等<sup>[4]</sup>通过耦合周期振子系统中的振幅包络同步分析给出了耦合振子系统中振幅包络同步的产生机制.刘维清等<sup>[5]</sup>在耦合电路系统中发现了振幅包络的多节律模式.刘汉昌等<sup>[6]</sup>在耦合周期振子系统中发现了正弦包络和非正弦包络两种振幅包络同步模式,并进一步在全局耦合振子系统中发现由于引入异质振子而产生的振幅包络的延展态<sup>[7]</sup>.振幅包络动力学行为涉及人机交互、神经系统、脑科学等领域.KLIMESCH 等<sup>[8]</sup>通过研究人类的脑电图和脑磁图的相关性,发现了相位-振幅同步在记忆过程中的关键作用,促进了对相位同步如何支持系统之间交互作用的理解.此外,有研究表明,脑神经系统中神经元之间的相位振幅耦合与大脑的状态有着重要的关联性,并分析了该耦合作用下振幅包络对人脑记忆的影响<sup>[9]</sup>.2018年 ZAMM 等<sup>[10]</sup>研究了认知神经科学中测量执行联合行为的个体之间的脑间同步情况,提出了一种测量音乐家的脑间同步性的新方法,即基于振幅包络的相关性测定表演音乐家的脑皮质同步振荡.在人机交互领域,可以通过振幅包络同步来验证语音是否进行了完全的传输.TORT 等<sup>[11]</sup>研究了神经元相位-振幅耦合使得大脑获得的连续生理电信号的意义,提出了一种新的测量方法来实现量化评估相位振幅耦合作用下的包络同步.同时相位-相位耦合和相位-振幅耦合已经成为神经元动力学<sup>[12-13]</sup>中与感知和认知相关的非常重要的概念.振幅包络同步研究成果对于理解许多不同强相位和振幅耦合动力学系统如神经元系统<sup>[14]</sup>、纳米机械谐振器<sup>[15]</sup>和动力系统<sup>[16]</sup>具有重要意义.

作为神经元协调工作中最普遍的一种方式,神经元的同步活动不仅参与了脑的高级功能,还与神经系统的疾病紧密相关.神经元的同步行为在学习、记忆等认知过程中起着重要作用,而反常的同步则与神经疾病密切相关,如同步的异常增强会导致癫痫,同步的减弱会导致精神分裂等疾病<sup>[17]</sup>.因此,研究神经元的同步性质对进一步认识大脑信息处理与传输的机制有着至关重要的作用<sup>[18]</sup>.耦合神经元振子系统中的同相位同步和反相位同步是协调神经行为的关键点,因为在抑制性耦合可激发神经元中,这些同步类型之间的转换对运动脑节律<sup>[19]</sup>非常重要.神经元中的振荡时间序列之间的相同步与反相同步的转换<sup>[20-21]</sup>对理解脑功能具有重要意义.然而,对于相位幅度耦合而产生振幅包络的同相同步与反相同步动力学以及它们之间的转换的机理和条件尚不清楚.吸引与排斥耦合的竞争在各种化学和生物过程中起着主导作用.例如,在心肌细胞采用兴奋-收缩(EC)偶联,YANAGITA 等分析了同时存在兴奋性(吸引力)和抑制性(排斥性)突触偶联的一对神经元的动力学行为<sup>[22]</sup>.此外,在基因调控网络中,正负反馈回路常被用于执行各种功能,如双稳态开关、振荡器和可激发器件<sup>[23]</sup>.在吸引耦合作用的神经元振子系统中,引入排斥耦合作用下,分析两者竞争作用对系统振幅包络的同相同步与反相同步动力学行为的影响.对于给定的某一吸引耦合作用强度,随着排斥耦合强度增加,振幅包络出现从同相同步到反相同步的转变.该转变也可以出现在具有不同时间尺度的耦合周期振子系统(Stuart-Landau 振子)中,说明吸引与排斥耦合作用竞争下,振幅包络从同相向反相同步转换现象具有普适性.研究成果不仅可丰富振幅包络的同步动力学行为,还有助于理解神经元信息处理和传递.

## 1 模型

构建具有吸引与排斥耦合作用竞争的神经元振子(FHN)模型如下,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \dot{u}_1 &= u_1 - u_1^3/3 - v_1 - \epsilon_1(u_2 - u_1), \dot{v}_1 = u_1 + a + \epsilon_2(v_2 - v_1), \\ \sigma_2 \dot{u}_2 &= u_2 - u_2^3/3 - v_2 - \epsilon_1(u_1 - u_2), \dot{v}_2 = u_2 + a + \epsilon_2(v_1 - v_2), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $u$  和  $v$  分别代表神经元的膜电位和神经元恢复的慢变量,控制参数  $a$  决定整个系统中振子的动力学特征,当时  $|a| < 1$  时,神经元振子系统为周期振荡态;当  $|a| > 1$  时,神经元振子系统为可激发态. $\sigma$  为振子的时间尺度.随着  $\sigma$  的增加,角频率  $\omega$  逐渐减小(见附录图 S1). $\epsilon_1, \epsilon_2$  分别为排斥耦合强度和吸引耦合强度.为简单起见,以耦合周期振荡态为对象(取  $a = 0$ ),研究具有不同时间尺度的耦合神经元振子系统的振幅包络动力学行为.

## 2 耦合非全同 FHN 神经元振子振幅包络同相同步向反相同步的转变

为了全面了解吸引与排斥耦合竞争作用下,耦合神经元振子的动力学行为,选择具有不同时间尺度的两个耦合神经元振子,即,  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$ .通过数值计算得到参数空间的相图(图 1).耦合神经元振子在吸引与排斥耦合竞争下,表现为相同步态(红色),非锁相态(绿色)和振荡死亡态(橙色).当固定某一吸引耦合强度和振子 1 的时间尺度参数  $\epsilon_2 = 0.07$  时,随着排斥耦合强度增加,耦合神经元振子会由非锁相态向相同步态过渡.

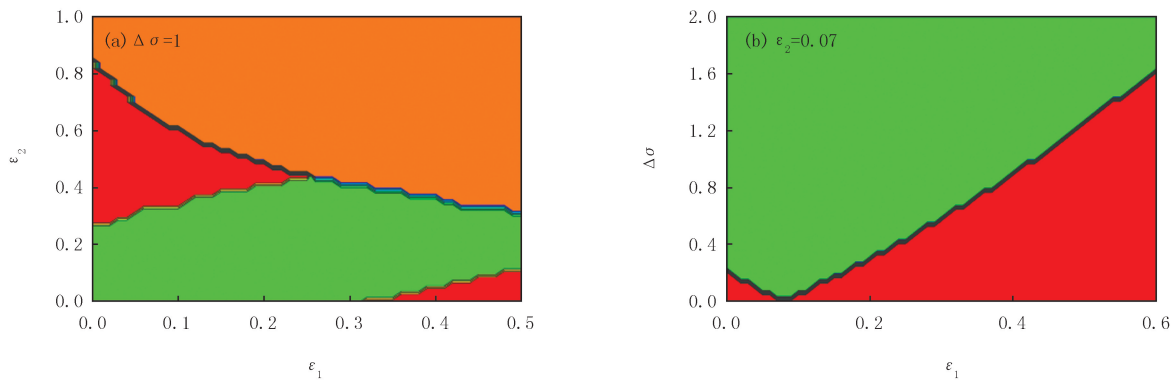


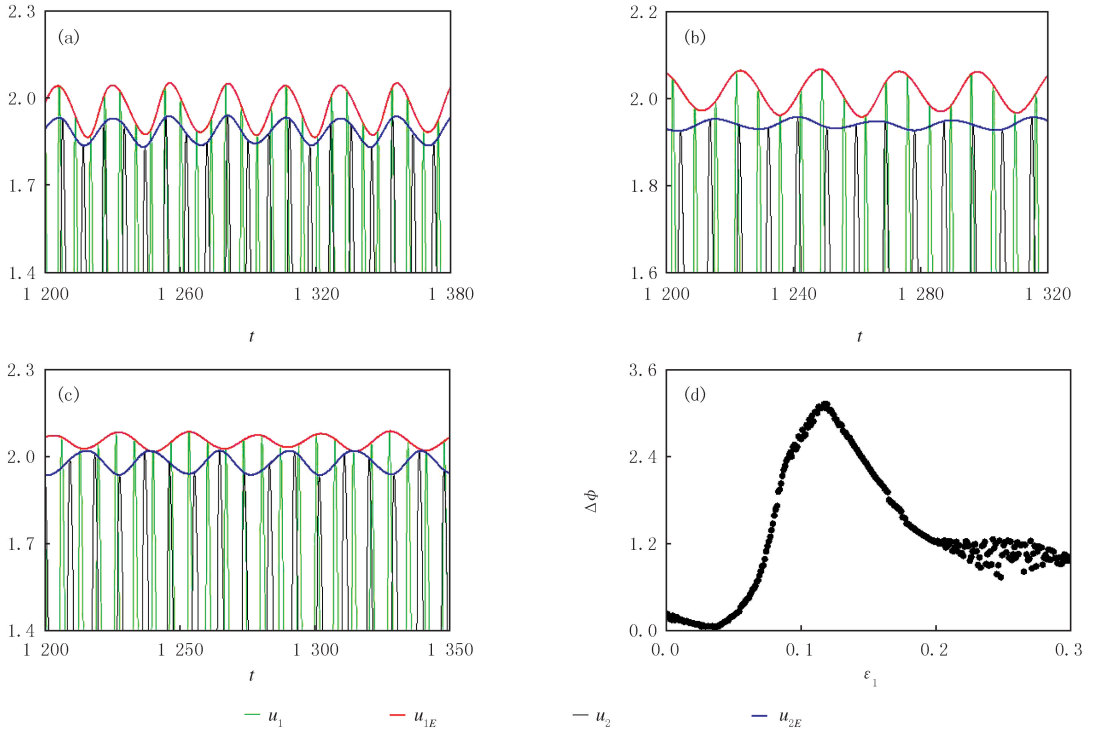
图 1  $\Delta\sigma=1$ 下,不同参数空间中耦合神经元振子系统中的动力学

Fig.1 Dynamical behaviors in the coupled neuron oscillators in different parameter spaces for  $\Delta\sigma=1$

通常,稳定的同步振幅包络存在于非锁相区域<sup>[4]</sup>,因此,取非锁相区参数  $\sigma_1 = 1, \Delta\sigma = 1, \epsilon_2 = 0.07$ ,并逐渐增加排斥耦合强度,观察随着排斥耦合强度增加,耦合振子系统的振幅包络的动力学行为.当排斥耦合强度较小(如  $\epsilon_1 = 0.03$ )时,变量  $u_1, u_2$  的振幅包络  $u_{E1}, u_{E2}$  保持同相同步,如图 2(a)所示.当排斥耦合强度增加到略大于吸引耦合强度(如  $\epsilon_1 = 0.082$ )时,振幅包络  $u_{E1}, u_{E2}$  变成相位差为  $\Delta\phi \approx \pi/2$  的相同步,如图 2(b)所示.当排斥耦合强度较大(如  $\epsilon_1 = 0.12$ )时,振幅包络  $u_{E1}, u_{E2}$  处于反相同步状态,如图 2(c)所示.因此,当固定吸引耦合强度,逐渐增加排斥耦合强度时,耦合神经元振子的振幅包络会从同相同步向反相同步转换.图 2(d)分析了给定吸引耦合强度( $\epsilon_2 = 0.07$ )时,振幅包络相位差  $\Delta\phi$  随排斥耦合  $\epsilon_1$  的变化关系,观察到振幅包络相位差  $\Delta\phi$  随着排斥耦合强度  $\epsilon_1$  的增加先从零增加到  $\pi$ ,然后又逐渐减小.当排斥耦合强度较大( $\epsilon_1 > 0.2$ )时,包络相位差受初值条件的影响.显然,对于振幅包络的同步,并非强的排斥耦合就有利于产生反相同步,而是适量的排斥耦合强度有利于耦合振子的振幅包络产生反相同步.

图 3 分析了振幅包络的振幅,平均振幅,周期随着参数变化的数值结果.对于给定的吸引耦合强度  $\epsilon_2 = 0.07$ ,时间尺度  $\sigma_1 = 1$  以及时间尺度差  $\Delta\sigma$ ,随着排斥耦合强度  $\epsilon_1$  增大,耦合神经元振子的振幅包络的幅度  $\bar{A}$  先减小后逐渐增大,存在使振幅包络的幅度取最小值的排斥耦合强度  $\epsilon_1 = 0.08$ ,如图 3(a)所示.振幅包络的平均振幅则会随着排斥耦合强度  $\epsilon_1$  的增大逐渐增大,即  $\bar{A}$  与  $\epsilon_1$  成正相关,  $\bar{A} \propto \epsilon_1$ ,其增长率随时间尺度差的增大而减小,如图 3(b)所示.进一步观察发现,对于给定的吸引与排斥耦合强度,耦合神经元振子的时间尺度差  $\Delta\sigma$  对振幅包络的幅度  $\bar{A}$  的影响较小,如图 3(c)所示,而会明显改变振幅包络的周期  $T$ .随着时间尺度差  $\Delta\sigma$  的增大,包络的周期  $T$  逐渐减小,即  $T$  与  $\Delta\sigma$  负相关,如图 3(d)所示.振幅包络的周期  $T$  几乎不受

排斥耦合强度的影响.



(a)  $\epsilon_1=0.03$ 时,  $\Delta\phi=0$ ; (b)  $\epsilon_1=0.082$ 时,  $\Delta\phi=\pi/2$ ; (c)  $\epsilon_1=0.12$ 时,  $\Delta\phi=\pi$ ; (d)  $\Delta\phi$ 随  $\epsilon_1$ 的变化.

图2  $\sigma_1=1, \Delta\sigma=1, \epsilon_2=0.07$ 时, 耦合振子在不同排斥耦合作用下的振幅包络 $u_{E1}, u_{E2}$ 及其相位差 $\Delta\phi$ 随排斥耦合强度 $\epsilon_1$ 的变化关系

Fig.2 The amplitude envelope  $u_{E1}, u_{E2}$  and their phase differences  $\Delta\phi$  versus repulsive coupling strength  $\epsilon_1$  in the coupled oscillators for  $\sigma_1=1, \Delta\sigma=1, \epsilon_2=0.07$

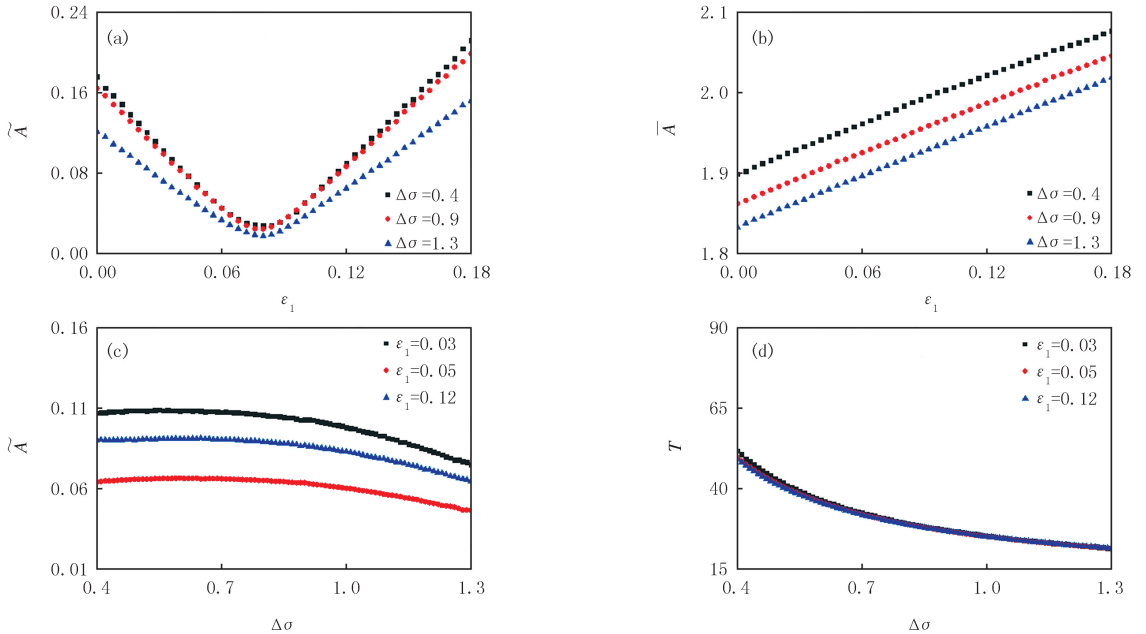


图3 振幅包络的3个关键参数振幅 $A$ , 平均振幅 $\bar{A}$ , 周期 $T$ 随不同参数的变化关系

Fig.3 The parameters of the amplitude envelope  $A, \bar{A}, T$  for different parameters

### 3 耦合非全同 Stuart-Landau 振子振幅包络同相同步向反相同步的转变

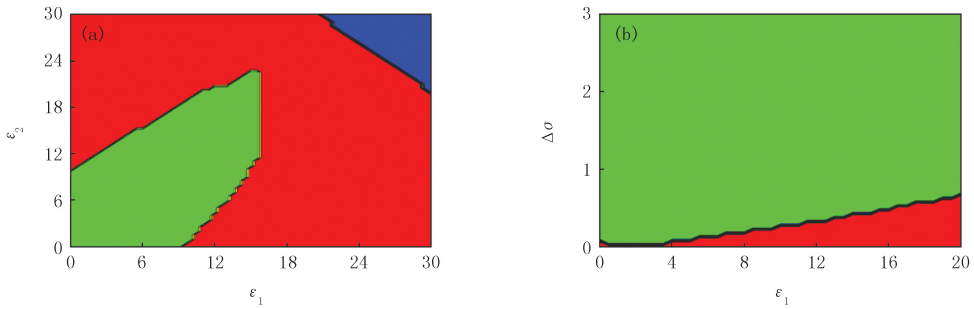
为了验证该现象的普遍性,进一步对具有时间尺度的耦合 Stuart-Landau 振子模型进行分析.耦合振子

模型如下,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \dot{x}_1 &= (a - x_1^2 - y_1^2)x_1 - \omega_0 y_1 - \varepsilon_1(x_2 - x_1), \dot{y}_1 = (a - x_1^2 - y_1^2)y_1 + \omega_0 x_1 + \varepsilon_2(y_2 - y_1), \\ \sigma_2 \dot{x}_2 &= (a - x_2^2 - y_2^2)x_2 - \omega_0 y_2 - \varepsilon_1(x_1 - x_2), \dot{y}_2 = (a - x_2^2 - y_2^2)y_2 + \omega_0 x_2 + \varepsilon_2(y_1 - y_2), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  分别为排斥耦合强度和吸引耦合强度,  $\omega_0$  为振子的固有频率, 任意取  $\omega_0 = 50, a = 5, \sigma_1, \sigma_2$  是 2 个振子的时间尺度, 时间尺度差  $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ ; 随着时间尺度  $\sigma$  的增加, 单个振子的频率  $\omega = \omega_0 / \sqrt{\sigma}$  会不断减小 (附录图 S2(a)), 而振子的  $x(t)$  时序的振幅会先增加后减小, 且减小的速度逐渐变慢 (见附图 S2(b)).

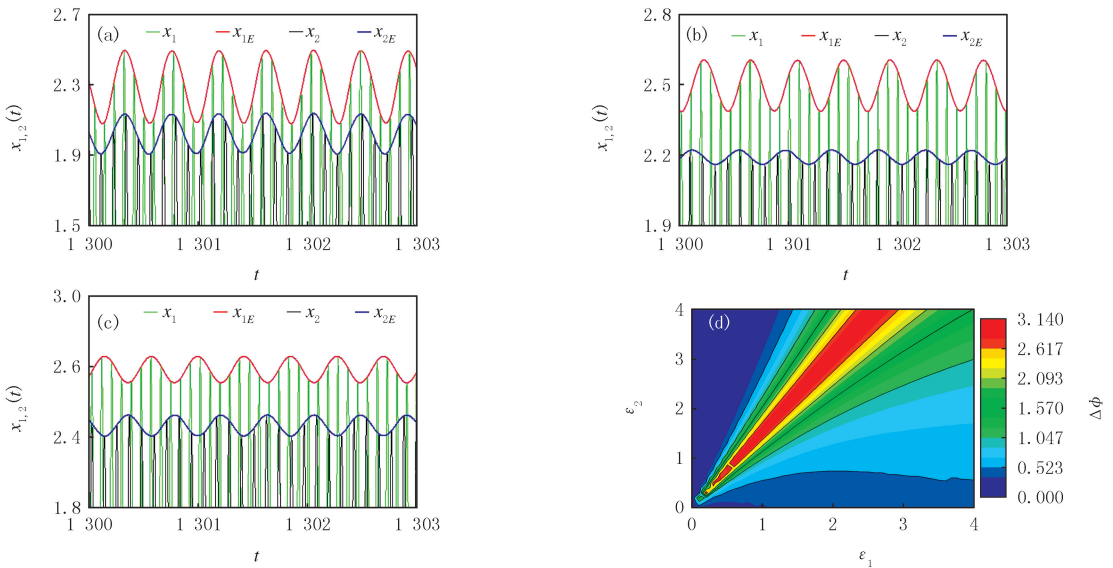
由于时间尺度会影响振子的固有频率, 当两个耦合振子存在时间尺度失配时, 会产生频率差, 从而可以在非锁相区出现振幅包络. 对于给定的时间尺度  $\sigma_1 = 0.51, \Delta\sigma = 0.31$ , 在吸引耦合强度与排斥耦合强度空间确定非锁相区 (绿色区) 如图 4(a). 同样地, 对于给定的吸引耦合强度, 可以得到时间尺度差和排斥耦合参数空间的非锁相区 (绿色区) 如图 4(b). 为了更好地观察吸引与排斥耦合竞争作用下, 耦合振子的振幅包络从同相同步向反相同步转变过程, 取非锁相区的参数, 并做出吸引与排斥耦合强度参数平面的振幅包络的相位分布, 如图 5(d) 所示. 结果表明, 对于给定的吸引耦合强度, 随着排斥耦合强度增加, 振幅包络相位差从 0 先增加到  $\pi$ , 然后又减小.



(a)  $\Delta\sigma = 0.31$  时,  $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_1$  参数空间中, 耦合周期振子系统中的不同动力学; (b)  $\varepsilon_2 = 3.4$  时,  $\Delta\sigma \sim \varepsilon_1$  参数空间中, 耦合周期振子系统中的不同动力学.

图4  $\sigma_1 = 0.51$  时, 不同参数空间中, 耦合周期振子耦合系统中的不同动力学

Fig.4 Dynamical behaviors in the coupled Stuart-Landau oscillator in different parameter spaces for  $\sigma_1 = 0.51$



(a)  $\varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 3.4$  时,  $\Delta\phi \approx 0$ ; (b)  $\varepsilon_1 = 1.66, \varepsilon_2 = 3.4$  时,  $\Delta\phi \approx \pi/2$ ; (c)  $\varepsilon_1 = 2.2, \varepsilon_2 = 3.4$  时,  $\Delta\phi \approx \pi$ ; (d) 相位差  $\Delta\phi$  分布.

图5  $\sigma_1 = 0.51, \Delta\sigma = 0.31$  时振幅包络的特征及相位差

Fig.5 Characteristics of the amplitude envelopes and phase differences for  $\sigma_1 = 0.51, \Delta\sigma = 0.31$

与耦合神经元振子相似, 对于给定的吸引耦合强度, 随着排斥耦合强度的增加, 耦合振子的振幅包络的

幅度会先减小后增加,而其平均振幅不断增加,如图 6(a-b)所示.随着时间尺度差  $\Delta\sigma$  的增大,包络的周期逐渐减小,如图 6(d)所示.振幅包络的周期  $T$  几乎不受排斥耦合强度的影响.与耦合神经元振子系统不同的是,相同的排斥耦合强度下,随着时间尺度差  $\Delta\sigma$  的增大,耦合振子的振幅包络的幅度逐渐减小,即与时间尺度差成负相关,如图 6(c).

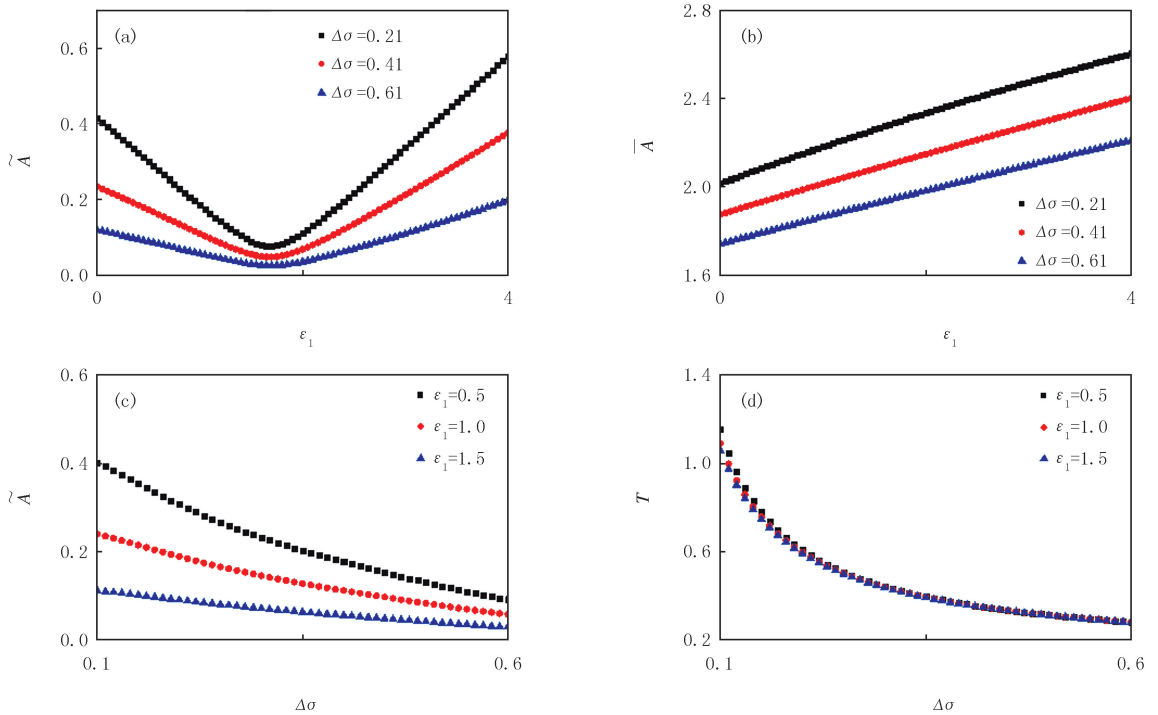


图6 耦合周期振子的振幅包络的主要特征参数振幅 $\tilde{A}$ ,平均振幅 $\bar{A}$ ,周期 $T$ 随不同参数的变化

Fig.6 The characteristics of the amplitude envelope  $\tilde{A}$ ,  $\bar{A}$ ,  $T$  for different parameters

## 4 结 论

在耦合神经元振子中,单个 FHN 神经元振子的振荡频率随着时间尺度的增加而逐渐减小,即时间尺度与振荡频率呈现负相关趋势.在吸引与排斥耦合作用竞争下,耦合非全同 FHN 振子会产生振幅包络,且振幅包络可以从同相同步向反相同步转变.对于给定的某一吸引耦合,随着引入的排斥耦合强度的增加,耦合振子的振幅包络之间的相位差会而由  $0$  逐渐增加到  $\pi$ ,然后又由  $\pi$  开始逐渐减小.吸引与排斥耦合作用竞争的引入可以实现振幅包络相位差的变化.具有时间尺度的耦合 Stuart-Landau 振子中的振幅包络由同相同步向反相同步的转变进一步说明了吸引与排斥耦合竞争下振幅包络相位相关性的普适性.神经元振子的时间尺度影响着神经元的放电模式和放电节律<sup>[24]</sup>.不同脑区的电信号频率分量相对较为丰富,一般集中在  $0.5 \sim 60.0$  Hz 之间,且不同的频率分量与大脑的活动状态密切相关,其中  $\alpha$  节律 ( $8 \sim 12$  Hz) 的频率、幅值等相关特征是反映人类大脑机能的重要指标.相位-振幅耦合引起的振幅包络携带了大量信息,其各种同步与相关性分析对理解脑功能和认知活动密切相关,如  $\theta$  慢波 ( $4 \sim 7$  Hz) 和  $\gamma$  快波 ( $31 \sim 60$  Hz) 活动之间的相位-振幅耦合引起的振幅包络同步可用于预测和感觉之间的匹配过程<sup>[25]</sup>,在学习过程中,  $\gamma$  波段 ( $30 \sim 60$  Hz) 的振幅被海马体 CA3 区域中的  $\theta$  相位更强烈地调制,并且在整个过度训练过程中保持了更高水平的  $\theta$ - $\gamma$  调制,  $\theta$ - $\gamma$  耦合的强度随着学习而增加,与学习相关的性能准确性的提高密切相关<sup>[26]</sup>,此外人脑中低频的  $\theta$  波 ( $4 \sim 8$  Hz) 与高频的  $\gamma$  波 ( $40 \sim 150$  Hz) 之间耦合相互作用下的同步程度与联想记忆能力密切相关<sup>[27]</sup>.因此,对具有不同时间尺度下,耦合振子系统的振幅包络同步动力学行为研究有助于理解人脑认知活动.

附录见电子版(DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.12.08.0001).

## 参 考 文 献

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] SHAHVERDIEV E M, SIVAPRAKASAM S, SHORE K A. Lag synchronization in time-delayed systems[J]. *Physics Letters A*, 2002, 292(6): 320-324.
- [3] GONZALEZ-MIRANDA J M. Amplitude envelope synchronization in coupled chaotic oscillators[J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2002, 65(3): 036232.
- [4] QIU Q, ZHOU B Z, WANG P, et al. Origin of amplitude synchronization in coupled nonidentical oscillators[J]. *Physical Review E*, 2020, 101: 022210.
- [5] LIU W Q, DENG J F, XIAO J H. Experimental observation of a multirhythmic pattern in chains of Rossler circuits[J]. *Chinese Physics B*, 2012, 21(12): 556-560.
- [6] LIU H C, LIU W Q, FU C X, et al. Sinusoidal and nonsinusoidal patterns in amplitude envelope synchronization[J]. *Physical Review E*, 2022, 105: 044209.
- [7] LIU W Q, XIE J N, LIU H C, et al. Heterogeneity induced splay state of amplitude envelope in globally coupled oscillators[J]. *Chaos*, 2022, 32(12): 123117.
- [8] KLIMESCH W, FREUNBERGER R, SAUSENG P, et al. A short review of slow phase synchronization and memory: evidence for control processes in different memory systems? [J]. *Brain Research*, 2008, 1235: 31-44.
- [9] ATAY F M. Distributed delays facilitate amplitude death of coupled oscillators[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(9): 094101.
- [10] ZAMM A, DEBENER S, BAUER A K R, et al. Amplitude envelope correlations measure synchronous cortical oscillations in performing musicians[J]. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 2018.
- [11] TORT A B L, KOMOROWSKI R, EICHENBAUM H, et al. Measuring phase-amplitude coupling between neuronal oscillations of different frequencies[J]. *Journal of Neurophysiology*, 2010, 104(2): 1195-1210.
- [12] CANOLTY R T, KNIGHT R T. The functional role of cross-frequency coupling[J]. *Trends in Cognitive Sciences*, 2010, 14(11): 506-515.
- [13] FELL J, AXMACHER N. The role of phase synchronization in memory processes[J]. *Nature Reviews Neuroscience*, 2011, 12: 105-118.
- [14] KURAMOTO Y. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*[M]. Berlin: Courier Corporation, 1984.
- [15] ACEBRÓN J A, BONILLA L L, PÉREZ VICENTE C J, et al. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2005, 77(1): 137-185.
- [16] ABRAMS D M, PECORA L M, MOTTER A E. Introduction to focus issue: patterns of network synchronization[J]. *Chaos*, 2016, 26(9): 094601.
- [17] LEVY R, HUTCHISON W D, LOZANO A M, et al. High-frequency synchronization of neuronal activity in the subthalamic nucleus of parkinsonian patients with limb tremor[J]. *The Journal of Neuroscience*, 2000, 20(20): 7766-7775.
- [18] SALINAS E, SEJNOWSKI T J. Correlated neuronal activity and the flow of neural information[J]. *Nature Reviews Neuroscience*, 2001, 2: 539-550.
- [19] JIA B, WU Y C, HE D, et al. Dynamics of transitions from anti-phase to multiple in-phase synchronizations in inhibitory coupled bursting neurons[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 93(3): 1599-1618.
- [20] SONG Y L, XU J. Inphase and antiphase synchronization in a delay-coupled system with applications to a delay-coupled FitzHugh-Nagumo system[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(10): 1659-1670.
- [21] BASHKIRTSEVA I, RYASHKO L, PISARCHIK A N. Stochastic transitions between in-phase and anti-phase synchronization in coupled map-based neural oscillators[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 95: 105611.
- [22] YANAGITA T, ICHINOMIYA T, OYAMA Y. Pair of excitable FitzHugh-Nagumo elements: synchronization, multistability, and chaos [J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2005, 72(5): 056218.
- [23] TIAN X J, ZHANG X P, LIU F, et al. Interlinking positive and negative feedback loops creates a tunable motif in gene regulatory networks[J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2009, 80(1): 011926.
- [24] QI G Y, WU Y. Firing pattern analysis and circuit implementation of morris-lecar neuron model with memristor[J]. *Open Journal of Circuits and Systems*, 2020, 9(4): 61-77.
- [25] BIEL A L, MINARIK T, SAUSENG P. EEG cross-frequency phase synchronization as an index of memory matching in visual search[J]. *NeuroImage*, 2021, 235: 117971.
- [26] TORT A B L, KOMOROWSKI R W, MANN S J R, et al. Theta-gamma coupling increases during the learning of item-context associations [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2009, 106(49): 20942-20947.

- [27] DÍAZ J, BASSI A, COOLEN A, et al. Envelope analysis links oscillatory and arrhythmic EEG activities to two types of neuronal synchronization[J]. *NeuroImage*, 2018, 172: 575-585.

## Amplitude envelope transition from in-phase to anti-phase synchronization in coupled oscillators system

Liu Weiqing, Shi Shipin

(School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

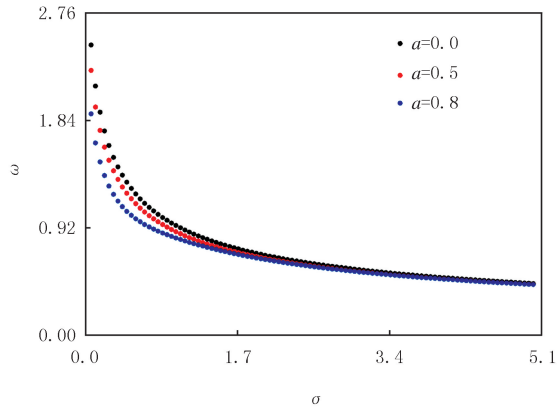
**Abstract:** Envelope synchronization behavior of coupled oscillator system reflects the interaction between amplitude and phase of coupled oscillator system. Introducing a repulsive coupling interaction in attractively coupled neuron oscillator system, the amplitude envelope of coupled system will transit from in-phase to anti-phase synchronization as the repulsive coupling strength increases. As a given attractively coupled strength, the phase difference between amplitude envelopes of coupled neuron oscillators increase from 0 to  $\pi$  and then decrease with the increment of repulsive coupling strength. Meanwhile, the amplitude of amplitude envelope will first decrease and then increase with the increment of repulsive coupling strength, and there is a repulsive coupling strength that minimized the amplitude of amplitude envelope. The transition from in-phase to anti-phase synchronization of amplitude envelope is induced by the competition of attractive and repulsive coupling can also be obtained in coupled Stuart-Landau oscillators with different time-scales. This study is not only of great significance to enrich the relevant dynamics study of amplitude envelope, but also the basis and key to study the processing and transmitting information in brain science.

**Keywords:** amplitude envelope; attractive coupling; repulsive coupling; time scale; phase synchronization; anti-phase synchronization

[责任编辑 杨浦 刘洋]

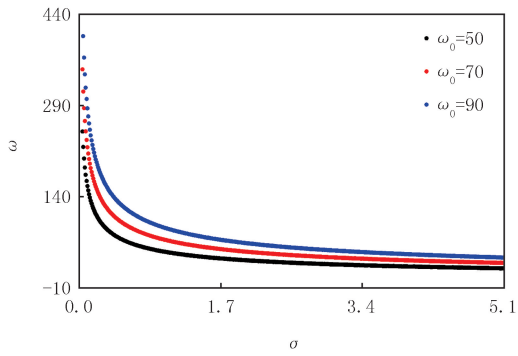


附录

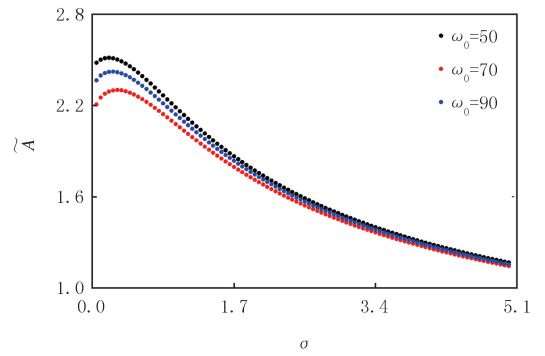


图S1 单个FHN振子的振荡角频率  $\omega$  随时间尺度参数  $\sigma$  的变化关系图

Fig.S1 The oscillation frequency  $\omega$  of a single FHN oscillator versus the time scale parameter  $\sigma$



(a) 振荡角频率  $\omega$  与时间尺度  $\sigma$  的关系图



(b) 时序  $x(t)$  的振幅  $\tilde{A}$  与时间尺度  $\sigma$  的关系图

图S2 时间尺度  $\sigma$  对单个Stuart-Landau振子的影响

Fig.S2 The effects of time scale parameters  $\sigma$  on the characteristics of one Stuart-Landau oscillator