第 43 卷 第 3 期
2015 年 5 月
河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)
Vol. 43 No. 3
May 2015

文章编号:1000-2367(2015)03-0028-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.03.006

一类非线性 Sobolev-Galpern 型湿气迁移方程双线性元的超收敛和外推

白秀琴,屈 聪

(平顶山学院 数学与信息科学学院,河南 平顶山 467000)

摘 要:主要讨论了一类非线性 Sobolev-Galpern 型湿气迁移方程的双线性元逼近,利用积分恒等式和平均值技巧,导出了 H^1 模意义下 $O(h^2)$ 阶的超逼近性质. 同时借助于插值后处理技术,给出了整体超收敛结果. 在此基础上,通过构造合适的外推格式,得到了具有 $O(h^3)$ 阶的近似解.

关键词:非线性湿气迁移方程;双线性元;超收敛;外推

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A

考虑如下非线性 Sobolev-Galpern 型湿气方程[1]

$$\begin{cases} \nabla\cdot(a(X,t;u)\nabla u_t)-c(t)u_t+\nabla\cdot(f(X,t;u)\nabla u)-e(t)\nabla\cdot u=g(X,t;u),\ (X,t)\in(0,T], \\ u(X,t)=0,\ (X,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ u(X,0)=u_0(X),\ X\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $X=(x,y)$,$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为边界分段光滑的有界凸多边形区域,$a(X,t;u)=a(u)$,$c(t)$,$f(X,t;u)=f(u)$,$e(t)$,$g(X,t;u)=g(u)$ 为已知函数,且满足以下假设

(A) 存在正常数 $a_0,a_1,c_0,c_1,f_0,f_1,e_0,e_1$,使得 $\forall X\in\Omega,u\in\mathbf{R},t\in(0,T]$ 有

$$a_0\le a(X,t;u)\le a_1,\ c_0\le c(t)\le c_1,\ f_0\le f(X,t;u)\le f_1,\ e_0\le e(t)\le e_1.$$

(B) $a(X,t;u)$,$f(X,t;u)$,$g(X,t;u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 连续,即存在正常数 C_L,成立

$$|\varphi(X,u_1)-\varphi(X,u_2)|\le C_L|u_1-u_2|,\ \forall\ u_1,\ u_2\in\mathbf{R},\varphi=a,\ f,\ g.$$

并且 $a(X,t;u)$,$f(X,t;u)$ 关于 u 具有直至二阶连续有界的导数.

(C) 方程(1) 的精确解 $u\in C^2(\Omega\times[0,\ T])$ 存在且唯一.

土壤中的 Sobolev-Galpern 型湿气迁移方程(1) 是一类非经典扩散方程,它不仅可以描述土壤中的湿气迁移现象,也在不同介质中的热传导、多孔介质内液体渗透和均匀液体岩石裂缝的渗透理论等领域中出现,因此有极为重要的应用价值,从而引起了国内外数学、物理及生物工程方面的工作者的广泛关注. 例如文献[2-4]主要对方程解的性态进行了研究;文献[5]对方程给出了质量集中非协调有限元逼近格式,得到了 L^2 模的误差估计. 但据我们所知,关于方程(1) 的外推算法研究还未见详细报道.

众所周知,双线性元是矩形网格中自由度最少的四边形单元,已被广泛应用于偏微分方程数值求解中,并取得了一系列有价值的成果. 例如文献[6-7] 在正则网格下研究了二阶椭圆方程、Sobloev 方程和粘弹性方程的超收敛性和外推,均给出了 $O(h^3)$ 阶的外推结果;文献[8] 对二阶椭圆问题利用该元在各向异性网格下讨论了超收敛结果;文献[9] 在各向异性网格下将此元用于 Poisson 方程,利用其渐近展开式进行了外推,得到了 $O(h^3)$ 阶的近似解;文献[10] 进一步将此元应用于 Signorini 问题,导出了 $O(h^{\frac{3}{2}})$ 阶的超收敛性. 本文将主要讨论非线性问题(1) 的双线性有限元解的超收敛和外推. 通过使用积分恒等式与平均值技巧、插值后处理技术,导出了 $O(h^2)$ 阶的超逼近和超收敛结果,同时构造了合适的外推格式,得到了具有 $O(h^3)$ 阶的近似解.

收稿日期:2014-09-11;**修回日期**:2015-03-12.

基金项目:国家自然科学基金(11271340)

作者简介(通信作者):白秀琴(1965-),女,河南淇县人,平顶山学院教授,主要从事有限元方法及应用研究,E-mail:pmbxq@126.com.

1　超逼近和超收敛

为简单起见，设 Ω 是一个矩形区域，其边 $\partial\Omega$ 分别平行于 x 轴和 y 轴，Γ_h 是 Ω 的一个矩形网格剖分，满足正则假设或拟一致假设. $e \in \Gamma_h$，e 的中心点为(x_e, y_e)，4 个顶点分别为 $a_1 = (x_e - h_e, y_e - k_e)$，$a_2 = (x_e + h_e, y_e - k_e)$，$a_3 = (x_e + h_e, y_e + k_e)$，$a_4 = (x_e - h_e, y_e + k_e)$，边分别为 $l_1 = \overline{a_1a_2}$，$l_2 = \overline{a_2a_3}$，$l_3 = \overline{a_3a_4}$，$l_4 = \overline{a_4a_1}$.

设 V^h 为 Ω 上相应的双线性有限元空间[11]，$V^h = \{v \in C(\overline{\Omega}), v|_e \in Q_1(e), \forall e \in \Gamma_h\}$，其中 $Q_1(e) = \mathrm{span}\{1, x, y, xy\}$. 记 $V_0^h = \{v \mid v \in V^h, v|_{\partial\Omega} = 0\}$，设 I_h 为 $H^2\Omega \to V^h$ 的插值算子.

问题(1) 的变分形式为：求 $u \in H_0^1(\Omega)$，使

$$\begin{cases}(a(u)\nabla u_t, \nabla v) + (c(t)u_t, v) + (f(u)\nabla u, \nabla v) + (e(t)\nabla \cdot u, v) = -(g(u), v), \forall v \in H_0^1\Omega), \\ u(X,0) = u_0(X), X \in \Omega.\end{cases} \tag{2}$$

变分问题(2) 的有限元逼近格式为：求 $u^h \in V_0^h$，使

$$\begin{cases}(a(u^h)\nabla u_t{}^h, \nabla v) + (c(t)u_t{}^h, v) + (f(u^h)\nabla u^h, \nabla v) + (e(t)\nabla \cdot u^h, v) = -(g(u^h), v), \forall v \in V_0^h, \\ u^h(X,0) = \mathrm{I}_h u_0(X), X \in \Omega.\end{cases} \tag{3}$$

定理 1　问题(3) 存在唯一解.

证明　设$\{\phi_i\}_{i=1}^N$ 为 V^h 的一组基，令 $u^h = \sum\limits_{i=1}^N h_i(t)\phi_i$，$u^h(0) = \sum\limits_{i=1}^N \bar{u}_i(t)\phi_i$，将上式代入到(3)，并令 $v = \phi_j$，$j = 1, 2, \cdots, N$，则方程(3) 可变为如下等价形式，

$$\begin{cases}(A + B)\dfrac{\mathrm{d}\overline{H}(t)}{\mathrm{d}t} + (C + D)\vec{H}(t) = \overline{G}(t), \\ \vec{H}(0) = \vec{v}.\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$A = (a(\sum_{i=1}^N h_i(t)\phi_i)\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)_{N\times N}, B = (c(t)\phi_i, \varphi_j)_{N\times N}, C = (f(\sum_{i=1}^N h_i(t)\phi_i)\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)_{N\times N},$$

$$D = (e(t)\nabla \cdot \phi_i, \varphi_j)_{N\times N}, \vec{G} = (g_1, \cdots, g_N)', g_j = -(g(\sum_{l=1}^N h_l(t)\phi_l), \phi_j), j = 1, 2, \cdots, N,$$

$$\vec{H}(t) = (h_1(t), h_2(t), \cdots, h_N(t))', \vec{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_N)'.$$

由于 $A + B$ 是对称正定矩阵，$C + D$ 连续，$\vec{G}$ 满足 Lipschitz 连续，由文献[13] 知，初值问题(4) 有唯一解，即问题(3) 的解存在且唯一.

下面的引理在本文的分析中起着关键作用.

引理 1[6]　设 $u \in H^3(\Omega)$，$\forall v \in V^h$ 则有 $\int_\Omega \nabla(u - \mathrm{I}_h u)\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(h^2)\,|u|_3\,\|v\|_1$.

定理 2　设 u，u^h 分别为问题(2)，(3) 的解，$u, u_t \in H^3(\Omega)$，则有下面的超逼近性质：

$$\|u^h - \mathrm{I}_h u\|_1 + \|u_t^h - \mathrm{I}_h u_t\|_1 \le Ch^2[(\int_0^t(\|u\|_3{}^2 + \|u_t\|_3^2)\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} + (\|u\|_3^2 + \|u_t\|_3^2)^{\frac{1}{2}}]. \tag{5}$$

证明　$\forall v \in V_0{}^h$，由(2) 和(3) 可得误差方程

$$(a(u^h)\nabla u_t{}^h - a(u)\nabla u_t, \nabla v) + (c(t)(u_t{}^h - u_t), v) + (f(u^h)\nabla u^h - f(u)\nabla u, \nabla v) + (e(t)\nabla \cdot (u^h - u), v) = (g(u) - g(u^h), v).$$

记 $u^h - u = u^h - \mathrm{I}_h u + \mathrm{I}_h u - u = \theta + \omega$，则误差方程为

$$\begin{aligned}&(a(u^h)\nabla\theta_t, \nabla v) + (c(t)\theta_t, v) + (f(u^h)\nabla\theta, \nabla v) = -(a(u^h)\nabla\omega_t, \nabla v) - \\ &(c(t)\omega_t, v) - ((a(u^h) - a(u))\nabla u_t, \nabla v) - (f(u^h)\nabla, \nabla v) - ((f(u^h) - \\ &f(u))\nabla u, \nabla v) - (e(t)\nabla \cdot (\theta + \omega), v) + (g(u) - g(u^h), v).\end{aligned} \tag{6}$$

在(6) 式中令 $v = \theta_t$，则

$$\begin{aligned}&(a(u^h)\nabla\theta_t, \nabla\theta_t) + (c(t)\theta_t, \theta_t) = -(a(u^h)\nabla\omega_t, \nabla\theta_t) - (c(t)\omega_t, \theta_t) - ((a(u^h) - \\ &a(u))\nabla u_t, \nabla\theta_t) - (f(u^h)\nabla\theta, \nabla\theta_t) - (f(u^h)\nabla\omega, \nabla\theta_t) - ((f(u^h) -\end{aligned}$$

$$f(u)),\nabla u,\nabla_t)-(e(t))\nabla\cdot(\theta+\omega),\theta_t)+(g(u)-g(u^h),\theta_t)\doteq\sum_{i=1}^{8}A_i. \tag{7}$$

下面对(7)式的右端进行逐项估计.

一方面,对 $\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega)$,令 $\bar{\varphi}|_e=\frac{1}{|e|}\int_e\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $|e|$ 为单元 e 的面积,由文献[6]可以知,$|\varphi-\bar{\varphi}|\leq ch\,|\,|_{1,\infty,e}$,从而由 ε-Young 不等式得

$$|A_1|=((a(u^h)-a(u))\nabla\omega_t,\nabla\theta_t)+\sum_e((a(u)-\overline{a(u)})\nabla\omega_t,\nabla\theta_t)_e+\sum_e(\overline{a(u)}\nabla\omega_t,\nabla\theta_t)_e=$$

$$C|u_t|_{1,\infty}\|u-u^h\|_0\|\nabla\theta_t\|_0+\sum_e((a(u)-\overline{a(u)})\nabla\omega_t,\nabla\theta_t)_e+\sum_e(\overline{a(u)}\nabla\omega_t,\nabla\theta_t)_e\leq$$

$$Ch^4(\|u\|_2^2+\|u_{t3}^2)+C\|\theta\|_0^2+\varepsilon|\theta_t|_1^2.$$

同理,A_5 可估计为 $|A_5|\leq Ch^4\|u\|_3^2+C\|\theta\|_0^2+\varepsilon|\theta_t|_1^2$.

由插值理论易知,A_2 与 A_7 可分别估计为

$$|A_2|\leq c_1\|\omega_t\|_0\|\theta_t\|_0\leq Ch^2\|u_t\|_2\|\theta_t\|_0\leq Ch^4\|u_t\|_2^2+\varepsilon\|\theta_t\|_0^2,$$

$$|A_7|=|\int_\Omega|e(t)\nabla\cdot(\theta+\omega)\theta_t\leq c_1\|\theta\|_0\|\nabla\|_t\|_0+c_1\|\omega\|_0\|\nabla\theta_t\|_0\leq$$

$$Ch^4\|u\|_2^2+C\|\theta\|_0^2+\varepsilon|\theta_t|_1^2.$$

另一方面,由 $a(u),f(u),g(u)$ 满足 Lipschitz 条件及 ε-Young 不等式,A_3,A_6 与 A_8 可估计为

$$|A_3|=C|u_t|_{1,\infty}\|u-u^h\|_0\|\nabla\theta_t\|_0\leq Ch^4\|u\|_2^2+C\|\theta\|_0^2+\varepsilon|\theta_t|_1^2,$$

$$|A_6|\leq Ch^4\|u\|_2^2+C\|\theta\|_0^2+\varepsilon|\theta_t|_1^2,$$

$$|A_8|\leq C\|u-u^h\|_0\|\theta\|_0\leq Ch^4\|u\|_2^2+C\|\theta\|_0^2+\varepsilon\|\theta_t\|_0^2.$$

根据 $f(u)$ 的有界性,A_4 可估计为 $|A_4|\leq C|\theta|_1^2+\varepsilon|\theta_t|_1^2$,将 $A_i(i=1,2,\cdots,8)$ 代入(7)式,得

$$a_0|\theta_t|_1^2+c_0\|\theta_t\|_0^2\leq Ch^4(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)+C(\|\theta\|_0^2+|\theta|_1^2)+\varepsilon(\|\theta_t\|_0^2+|\theta_t|_1^2).$$

取充分小的 ε,有 $\|\theta_t\|_1^2\leq Ch^4(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)+C\|\theta\|_1^2$. 又由 $\theta(X,0)=0$ 时,公式 $\|\theta\|^2|_1\leq\int_0^t\|\theta_t\|_1^2\mathrm{d}s$ 成立,得 $\|\theta_t\|_1^2\leq Ch^4(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)+C\int_0^t\|\theta_t\|_1^2\mathrm{d}s$,从而由 Gronwall 不等式得 $\|\theta_t\|_1\leq Ch^2(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)^{\frac{1}{2}}$,故 $\|\theta\|_1\leq Ch^2(\int_0^t(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}$.

定理 2 得证.

为了得到整体超收敛,采用文献[6]中的方法,构造如下插值后处理算子 Π_{2h}^2,设 $\bar{e}\in\Gamma^{2h}$ 是由 Γ^h 中相邻 4 个单元合并构成的一个大单元,记为 $\bar{e}=\bigcup_{i=1}^{4}e_i$,在大单元上 $\Pi_{2h}^2u|_{\bar{e}}\in Q_2(\bar{e}),\forall u\in C(\bar{e})$. $Q_2(\bar{e})$ 为 $\bar{e}$ 上双二次 Lagrange 多项式空间,$C(\bar{e})$ 为 $\bar{e}$ 上的连续函数空间,则有如下性质.

引理 2[11] 设 $u\in H^3(\Omega)$,则上面定义的插值算子 Π_{2h}^2 满足

$$\Pi_{2h}^2\mathrm{I}_hu=\Pi_{2h}^2u, \tag{8}$$

$$\|\Pi_{2h}^2u-u\|_1\leq Ch^2\|u\|_3, \tag{9}$$

$$\|\Pi_{2h}^2v\|_1\leq C\|v\|_1,\forall v\in S_2{}^h, \tag{10}$$

其中 $S_2{}^h$ 为双二次有限元空间.

综合定理 2 和上述引理 2,有如下超收敛结果.

定理 3 在定理 2 的条件下有 $\|\Pi_{2h}^2u^h-u\|_1\leq Ch^2\{[\int_0^t(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)\mathrm{d}s)]^{\frac{1}{2}}+\|u\|_3\}$.

证明 由引理 2 和定理 2 得

$$\|\Pi_{2h}^2u^h-u\|_1=\|\Pi_{2h}^2u^h-\Pi_{2h}^2\mathrm{I}_hu+\Pi_{2h}^2\mathrm{I}_hu-u\|_1\leq\|\Pi_{2h}^2u^h-\Pi_{2h}^2\mathrm{I}_hu\|_1+\|\Pi_{2h}^2\mathrm{I}_hu-u\|_1\leq$$

$$C\|u^h-\mathrm{I}_hu\|_1+\|\Pi_{2h}^2u-u\|_1\leq Ch^2\{[\int_0^t(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)\mathrm{d}s)]^{\frac{1}{2}}+\|u\|_3\}.$$

2 外 推

为了构造外推格式,首先引入下面的引理.

引理 3[11]　设 $u\in H^3(e)$,则对任意 $v\in V^h$,则有

$$\int_e(u-\mathrm{I}_h u)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=O(h^3)\mid u\mid_{3,e}\parallel v\parallel_{0,e}-\frac{1}{3}\int_e(h_e^2u_{xx}+k_e^2u_{yy})v\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

进一步地,若 $u\in H^4(e)$,$v\in V^h$,则有

$$\int_e(u-\mathrm{I}_h u)_x v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=O(h^3)\mid u\mid_{4,e}\mid v\mid_{1,e}-\frac{1}{3}\int_e k_e^2u_{xyy}v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引理 4[12]　设 $u\in H^4(e)$,则对任意 $v\in V^h$,有

$$\int_e(u-\mathrm{I}_h u)_x v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=O(h^3)\mid u\mid_{4,e}\parallel v\parallel_{0,e}+\frac{1}{3}\Big[\int_e(h_e^2u_{xx}v_x-k_e^2u_{xyy}v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big].$$

接下来,给出本文的另一个重要结论.

定理 4　设 u,u^h 分别是问题(2) 和(3) 的解,$u,u_t\in H^4(\Omega)$,则存在 $\varphi^h\in V_0^h$,使得

$$\parallel u^h-\mathrm{I}_h u-h^2\varphi^h\parallel_1\le Ch^3\Big[\int_0^t(\parallel u_t\parallel_4^2+\parallel u\parallel_4^2)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

证明　利用引理 3 和引理 4 的结论,方程(6) 可化为

$$\begin{aligned}(a(u^h)\nabla\theta_t,\nabla v)+(c(t)\theta_t,v)+(f(u^h)\nabla\theta,\nabla v)=&-\frac{1}{3}\sum_e\Big[k_e^2\int_e(\overline{a(u)}u_{txyy}+\overline{f(u)}u_{xyy})v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\&h_e^2\int_e(\overline{a(u)}u_{txxy}+f(u)u_{xxy})v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+c(t)\int_e(h_e^2u_{txx}+k_e^2u_{tyy})v\mathrm{d}x\mathrm{d}y-e(t)\int_e[h_e^2(u_{xx}v_x-\\&u_{xxy}v)-k_e^2(u_{xyy}v-u_{yy}v_y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]+\Big[((a(u^h)-\overline{a(u)})\nabla(u_t-\mathrm{I}_h u_t),\nabla v)+(((a(u)-\\&a(u^h))\nabla u_t,\nabla v)+((f(u^h)-\overline{f(u)})\nabla(u-\mathrm{I}_h u),\nabla v)+((f(u)-f(u^h))\nabla u,\nabla v)-\\&(e(t)\nabla\cdot\theta,v)+((g(u)-g(u^h)),v)\Big]+O(h^3)\mid u_t\mid_{4,e}\mid v\mid_{1,e}+\\&O(h^3)\mid u_t\mid_{3,e}\parallel v\parallel_{0,e}+O(h^3)\mid u\mid_{4,e}\mid v\mid_{1,e}+O(h^3)\mid u\mid_{4,e}\parallel v\parallel_{0,e}.\end{aligned}$$

设 $\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 为下列辅助问题的精确解,

$$\begin{cases}(a(u^h)\nabla\varphi_t,\nabla v)+(c(t)_t,v)+(f(u^h)\nabla\varphi,\nabla v)=L(v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega),\\ \varphi(X,0)=0,X\in\Omega,\end{cases}\tag{11}$$

这里

$$\begin{aligned}L(v)=&-\frac{1}{3h^2}\sum_e\Big[k_e^2\int_e(\overline{a(u)}u_{txyy}+\overline{f(u)}u_{xyy})v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+h_e^2\int_e(\overline{a(u)}u_{txxy}+\overline{f(u)}u_{xxy})v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\&c(t)\int_e(h_e^2u_{txx}+k_e^2u_{tyy})v\mathrm{d}x\mathrm{d}y-e(t)\int_e[h_e^2(u_{xx}v_x-u_{xxy}v)-k_e^2(u_{xyy}v-u_{yy}v_y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]+\\&\frac{1}{h^2}\Big[((a(u^h)-\overline{a(u)})\nabla(u_t-\mathrm{I}_h u_t),\nabla v)+(((a(u)-a(u^h))\nabla u_t,\nabla v)+((f(u^h)-\\&\overline{f(u)})\nabla(u-\mathrm{I}_h u),\nabla v)+((f(u)-f(u^h))\nabla u,\nabla v)-(e(t)\nabla\cdot\theta,v)+\\&((g(u)-g(u^h)),v)\Big]=L_1(v)+L_2(v).\end{aligned}$$

因为 $L_1(v)\le C(\parallel u_t\parallel_3+\parallel u\parallel_3)\parallel v\parallel_1$,

$$\begin{aligned}L_2(v)=&\frac{1}{h^2}\Big[((a(u^h)-\overline{a(u)})\nabla(u_t-\mathrm{I}_h u_t),\nabla v)+((a(u)-a(u^h))\nabla u_t,\nabla v)+\\&((f(u^h)-\overline{f(u)})\nabla(u-\mathrm{I}_h u),\nabla v)+((f(u)-f(u^h)\nabla u,\nabla v)-\\&(e(t)\nabla\cdot\theta,v)+((g(u)-g(u^h)),v)\Big]\doteq\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^6 B_i.\end{aligned}$$

下面对上式中右端各项进行估计.

利用平均值技巧和 Schwartz 不等式,B_1 可估计为

$$\begin{aligned}\mid B_1\mid=&((a(u^h)-a(u))\nabla(u_t-\mathrm{I}_h u_t),\nabla v)+\sum_e((a(u)-a(u))\nabla(u_t-\mathrm{I}_h u_t),\nabla v)\mid_e\le\\&C\parallel u-u^hV_0\parallel u_t-\mathrm{I}_h u_t\parallel_{1,\infty}\mid v\mid_1+Ch^2\parallel a(u)\parallel_{1,\infty}\mid u_t\mid_2\mid v\mid_1\le\\&Ch^2\Big[\parallel u\parallel_2+\Big(\int_0^t(\parallel u\parallel_3^2+\parallel u_t\parallel_3^2)\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\mid v\mid_1+Ch^2\mid u_t\mid_2\mid v\mid_1.\end{aligned}$$

同理,B_3 可估计为 $\| B_3 \| \leq Ch^2[\| u \|_2 + (\int_0^t (\| u \|_3^2 + \| u_t \|_3^2)ds)^{\frac{1}{2}}] | v |_1 + Ch^2 | u |_2 | v |_1$.

再利用函数的有界性及 ε-Young 不等式,有 $B_2, B_j (j = 4,5,6)$ 可估计为

$$| B_2 | + \sum_{i=4}^{6} | B_i | \leq Ch^2[\| u \|_2 + (\int_0^t (\| u \|_3^2 + \| u_t \|_3^2)ds)^{\frac{1}{2}}] | v |_1,$$

所以 $L_2(v) \leq Ch^2\{[\int_0^t (\| u \|_3^2 + \| u_t \|_3^2)ds]^{\frac{1}{2}} + (\| u \|_3^2 + \| u_t \|_3^2)^{\frac{1}{2}}\} \| v \|_1$.

当 $u \in H^4(\Omega)$ 时,所以 $L(v)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函,由偏微分方程解的正则性理论,知

$$\| \varphi \|_2 + \| \varphi_t \|_2 \leq C\{\| u \|_4 + \| u_t \|_4 + [\int_0^t (\| u \|_4^2 + \| u_t \|_4^2)ds]^{\frac{1}{2}}\}. \tag{12}$$

设 $\varphi^h \in V_0^h$ 为对应于上面辅助问题的有限元解,则问题(11) 的有限元逼近方程为:求 $\varphi^h \in V_0^h$,满足

$$\begin{cases}(a(u^h)\nabla \varphi_t^h, \nabla v) + (c(t)\varphi_t^h, v) + (f(u^h)\nabla \varphi^h, \nabla v) = L(v), \forall \in V_0^h, \\ \varphi^h(X,0) = 0, X \in \Omega.\end{cases} \tag{13}$$

采用和定理 2 类似的证明方法,可得

$$\| \mathrm{I}_h\varphi - \varphi^h \|_1 \leq Ch(\int_0^t t(\| \varphi \|_2^2 + \| \varphi_t \|_2^2)ds)^{\frac{1}{2}}.$$

从而有

$$\begin{aligned}&(a(u^h)\nabla \theta_t, \nabla v) + (c(t)\theta_t, v) + (f(u^h)\nabla \theta, \nabla v) \leq Ch^3(\| u_t \|_4 + \| u \|_4) \| v \|_1 + h^2L(v) \leq \\ &\quad Ch^3(\| u_t \|_4 + \| u \|_4) \| v \|_1 + h^2[(a(u^h)\nabla \varphi_t^h, \nabla v) + (c(t)_t^h, v) + (f(u^h)\nabla \varphi^h, \nabla v)].\end{aligned} \tag{14}$$

于是

$$\begin{aligned}&(a(u^h)\nabla(\theta_t - h^2\varphi_t^h), \nabla v) + (c(t)(\theta_t - h^2\varphi_t^h), v) + (f(u^h)\nabla(\theta - \\ &\quad h^2\varphi^h), \nabla v) \leq Ch^3(\| u_t \|_4 + \| u \|_4) \| v \|_1.\end{aligned} \tag{15}$$

令 $v = \theta_t - h^2\varphi_t^h$,(15) 变形为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(f(u^h)\nabla(\theta - h^2\varphi^h), \nabla(\theta - h^2\varphi^h)) \leq Ch^6(\| u_t \|_4^2 + \\ &\quad \| u \|_4^2) + (f_u(u^h)u_t^h\nabla(\theta - h^2\varphi^h), \nabla(\theta - h^2\varphi^h)),\end{aligned}$$

对上式两端积分,并注意到 $\theta(0) - h^2\varphi^h(0) = 0$,得

$$\begin{aligned}&(f(u^h)\nabla(\theta - h^2\varphi^h), \nabla(\theta - h^2\varphi^h)) \leq Ch^6\int_0^t (\| u_t \|_4^2 + \| u \|_4^2)ds + \\ &\quad \int_0^t (f_u(u^h)u_t^h\nabla(\theta - h^2\varphi^h), \nabla(\theta - h^2\varphi^h))ds,\end{aligned} \tag{16}$$

又 $\int_0^t (f_u(u^h)u_t{}^h\nabla(\theta - h^2\varphi^h), \nabla(\theta - h^2\varphi^h))ds \leq C(\| \theta \|_{L^\infty(L^\infty)} + 1)\int t_0 | \theta - h^2\varphi^h |_1^2 ds \leq C\int_0^t | \theta - h^2\varphi^h |_1{}^2 ds$,

根据 $f(u)$ 的有界性及上式,将(16) 变形为

$$\| \theta - h^2\varphi^h \|_1^2 \leq Ch^6\int_0^t (\| u_t \|_4^2 + \| u \|_4^2)ds + C\int_0^t | \theta - h^2\varphi^h |_1^2 ds.$$

根据 Gronwall 引理,得 $\| \theta - h^2\varphi^h \|_1 \leq Ch^3[\int_0^t (\| u_t \|_4^2 + \| u \|_4^2)ds]^{\frac{1}{2}}$,

定理 4 得证.

为了得到更高阶的外推结果,与前面的定义方式类似,用 $\tilde{e} \in \Gamma^{3h}$ 表示将 Γ^h 中相邻 9 个单元合并构成的一个大单元,记为 $\tilde{e} = \bigcup_{i=1}^{9} e_i$,在大单元上:$\Pi_{3h}^3 u |_{\tilde{e}} \in Q_3(\tilde{e}), \forall u \in C(\tilde{e})$,且

$$\Pi_{3h}^3 u(z_i) = u(z_i), i = 1,2,\cdots,16,$$

其中 $z_i, i = 1,2,\cdots,16$ 为小单元的所有顶点,$Q_3(\tilde{e})$ 为 $\tilde{e}$ 上的双 3 次 Lagrange 多项式空间,$C(\tilde{e})$ 为 $\tilde{e}$ 上的连续函数空间,有如下性质.

引理 5[6] 设 $u \in H^4(\Omega)$,则上面定义的插值算子 Π_{3h}^3,满足

$$\Pi_{3h}^3 \mathrm{I}_h u = \Pi_{3h}^3 u, \tag{17}$$

$$\| \Pi_{3h}^{3} u - u \|_1 \leq Ch^3 \| u \|_4, \tag{18}$$

$$\| \Pi_{3h}^{3} v \|_1 \leq C \| v \|_1, \forall v \in S_3{}^h, \tag{19}$$

其中 $S_3{}^h$ 为双 3 次有限元空间.

结合定理 4 和引理 5，有如下结论.

定理 5　设 $\Gamma_{\frac{h}{2}}, \Gamma_{\frac{3h}{2}}$ 分别是 Γ_h, Γ_{3h} 中点加密后得到的网格，在定理 4 的条件下，设 $\tilde{u}^h = \frac{4}{3}\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} u^{\frac{h}{2}} - \frac{1}{3}\Pi_{3h}^{3} u^h$ 为外推解，有 $\| u - \tilde{u}^h \|_1 = O(h^3)$.

证明　根据定理 4 有

$$\begin{aligned}
\| u - \tilde{u}^h \|_1 = {} & \| \frac{4}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} u^{\frac{h}{2}} - \Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u) + \frac{4}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - u) - \frac{1}{3}(\Pi_{3h}^{3} u^h - \Pi_{3h}^{3} \mathrm{I}_h u) - \frac{1}{3}(\Pi_{3h}^{3} \mathrm{I}_h u - \\
& u) \|_1 = \| \frac{4}{3}\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} (u^{\frac{h}{2}} - \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - (\frac{h}{2})^2) + \frac{4}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - u) - \frac{1}{3}\Pi_{3h}^{3}(u^h - \mathrm{I}_h u - h^2 \varphi) - \\
& \frac{1}{3}(\Pi_{3h}^{3} \mathrm{I}_h u - u) + \frac{h^2}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \varphi - \Pi_{3h}^{3} v) \|_1 = \| \frac{4}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} (u^{\frac{h}{2}} - \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - (\frac{h}{2})^2 \Pi^{\frac{h}{2}} + (\frac{h}{2})^2 \varphi^{\frac{h}{2}} - \\
& (\frac{h}{2})^2 \varphi) + \frac{4}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - u) - \frac{1}{3}\Pi_{3h}^{3}(u^h - \mathrm{I}_h u - h^2 \Pi^h + h^2 \Pi^h - h^2 \varphi) - \frac{1}{3}(\Pi_{3h}^{3} \mathrm{I}_h u - \\
& u) + \frac{h^2}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \varphi - \Pi_{3h}^{3} \varphi) \|_1 \leq \| \frac{4}{3}\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} (u^{\frac{h}{2}} - \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - (\frac{h}{2})^2 \varphi^{\frac{h}{2}}) \|_1 + \| \frac{h^2}{3}\varphi_{\frac{3h}{2}}^{3} (\varphi^{\frac{h}{2}} - \\
& \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} \varphi) \|_1 + \| \frac{4}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - u) \|_1 + \| \frac{1}{3}\Pi_{3h}^{3}(u^h - \mathrm{I}_h u - h^2 \varphi^h) \|_1 + \| \frac{h^2}{3}\Pi_{3h}^{3}(u^h - \\
& \mathrm{I}_h \varphi) \|_1 + \| \frac{1}{3}(\Pi_{3h}^{3} \mathrm{I}_h u - u) \|_1 + \| \frac{h^2}{3}(\Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \varphi - \varphi) \|_1 + \| \frac{h^2}{3}(\Pi_{3h}^{3} \varphi - \varphi) \|_1,
\end{aligned}$$

利用插值后处理算子性质(17) ~ (19)，得

$$\begin{aligned}
\| u - \tilde{u}^h \|_1 \leq {} & C[\| u^{\frac{h}{2}} - \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} u - (\frac{h}{2})^2 \varphi^{\frac{h}{2}} \|_1 + h^2 \| \varphi^{\frac{h}{2}} - \mathrm{I}_{\frac{h}{2}} \varphi \|_1 + Ch^3 \| u \|_4 + \| u^h - \mathrm{I}_h u - \\
& h^2 \varphi \|_1 + h^2 \| \varphi^h - \mathrm{I}_h \varphi \|_1 + Ch^3 \| u \|_4 + h^2 \| \Pi_{\frac{3h}{2}}^{3} \varphi - \varphi \|_1 + h^2 \| \Pi_{3h}^{3} \varphi - \varphi \|_1],
\end{aligned}$$

由正则性结果(12) 及定理 4，有 $\| u - \tilde{u}^h \|_1 = O(h^3)$.

定理 5 得证.

参 考 文 献

[1] Aifantis E C. On the Problem of Diffusion in Solids[J]. Acta Mechanica, 1980, 37(3/4): 265-296.

[2] 施德明. 非线性湿气迁移方程的初边值问题[J]. 应用数学学报, 1990, 13(1): 31-38.

[3] 陈　宁，李崇新. 具有 Sobolev-Galpern 型湿气迁移方程解的渐近性和 Blow-up[J]. 生物数学学报, 2002, 17(3): 305-310.

[4] 刘亚成，王　峰. 一类非线性多维 Sobolev-Galpern 方程[J]. 应用数学学报, 1994, 17(4): 569-577.

[5] 周家全，许　超，裴丽芳，等. 一类非线性 Sobolev-Galpern 型湿气迁移方程的质量集中非协调有限元方法[J]. 生物数学学报, 2013, 28(2): 324-330.

[6] 林　群，严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定：河北大学出版社, 1996.

[7] Lin Q, Zhang S H, Yan N N. Asymptotic error expansion and defect correction for Sobolev and viscoelasticity type equations[J]. J Comput Math, 1998, 16(1): 51-62.

[8] Shi D Y, Zhu H Q. The superconvergence analysis of an anisotropic finite element[J]. J Syst Sci complexity, 2005, 18(4): 478-487.

[9] Lin Q, Lin J F. Extrapolation of the bilinear element approximation for Poisson equation on anisotropic meshes[J]. Numer Meth PDEs, 2007, 23(5): 960-967.

[10] Li M X, Lin Q. superconvergence of finite element metod of Signorini problem[J]. J comput Appl Math, 2008, 222(2): 284-292.

[11] Lin Q, Lin J F. Finite element methods: Accuracy and Improvement[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[12] 史艳华，石东洋. 非对称不定问题双线性元的收敛和外推[J]. 应用数学, 2013, 26(1): 220-227.

[13] Hale J K. Ordinary differential equations[M]. New York: Wiley-Inter Science, 1969.

(下转第 42 页)

New Substation Voltage and Reactive Power Control Algorithm

ZHAO Guosheng[1], SHU Na[2], ZHOU Zhiyong[2], WANG Yi[2]

(1. School of Electrical Engineering, Zhenzhou University, Zhengzhou 450001, China;
2. Shandong Electric Power Engineering Consulting Institute corp. Ltd, Jinan 250013, China)

Abstract: The substation voltage and reactive power control method based on nine-zone diagram has no good anti-interference capability in short-term load fluctuations situation. A substations voltage and reactive power control algorithm are put forward in order to solve the problem. The algorithm consists of the activated criterion, correcting algorithm of load forecasting result, operating criterion and regional power grid substations choice scheme of setting value. The mathematical expression of the algorithm is proposed in the paper. The association schemes of the algorithm combined the super short-term load forecast result is given in order to implement regional power grid substations voltage and reactive power control. The operation result of the developed equipment using this algorithm indicates the proposed algorithm is good and it has an excellent performance than the nine area control method.

Keywords: voltage and reactive power control; load forecasting; control algorithm

(上接第 33 页)

[14] 石东洋,周家全.广义神经传播方程一个新的 H^1-Galerkin 非协调混合有限元格式[J].河南师范大学学报:自然科学版,2010,38(5):1-6.

[15] 史艳华,石东洋.粘弹性方程 Hermite 型有限元新的超收敛分析和外推[J].河南师范大学学报:自然科学版,2009,37(3):148-151.

[16] 王芬玲,李新祥,樊明智,等.非线性双曲方程的类 Wilson 元超收敛分析[J].河南师范大学学报:自然科学版,2013,41(5):29-33.

Superconvergence and Extrapolation of Bilinear FiniteElement Method for A kind of Nonlinear Sobolev-Galpern TypeEquations of Moisture Migration

BAI Xiuqin, QU Cong

(School of Mathematics and Information Science, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China)

Abstract: In this paper, the approximation of bilinear finite element for a kind of nonlinear Sobolev-Galpern type equations of moisture migration is discussed. By use ofthe integral identities and the mean value technique, the superclose property of order $O(h^2)$ in H^1-norm is obtained. A global super-convergence result is derived by interpolatedpost-processing method. Then higher accuracy of order $O(h^3)$ for approximation solution is given by constructing a proper extrapolation scheme.

Keywords: nonlinear Sobolev-Galperntype equations; bilinear element; superconvergence; extrapolation