文章编号:1000－2367(2018)05－0001－12　　**DOI:**10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.05.001

非线性强阻尼波动方程一个新的 H^1-Galerkin 混合有限元分析

石东洋，穆朋聪

(郑州大学 数学与统计学院,郑州 450001)

摘　要:利用不完全双二次元 Q_2^- 和一阶 BDFM 元,对一类非线性强阻尼波动方程建立了一个新的混合元逼近模式.借助这两个单元的插值算子的特殊性质和平均值技巧,对半离散和线性化 Euler 全离散格式,分别导出了原始变量在 H^1-模和中间变量在 $H(\mathrm{div})$-模意义下具有 $O(h^3)$ 和 $O(h^3+\tau^2)$ 阶的超逼近估计,比以往文献的最优误差估计高一阶.

关键词:非线性强阻尼波动方程;H^1-Galerkin 混合有限元方法;半离散;线性化全离散格式;超逼近估计

中图分类号:O242.21　　**文献标志码:**A

考虑如下非线性强阻尼波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-\nabla\cdot(\nabla u_{tt}+b(u)\nabla u_t+\nabla u)=f(u), & (X,t)\in\Omega\times(0,T],\\ u(X,t)=0, & (X,t)\in\partial\Omega\times(0,T],\\ u(X,0)=g(X),u_t(X,0)=h(X), & X\in\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中 ∇ 和 $\nabla\cdot$ 分别表示对实值函数求梯度和对向量函数求散度,$X=(x,y)$,$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,$g(X)$,$h(X)$ 是已知函数.$f(u)$ 和 $b(u)$ 是关于 u 满足 Lipschitz 条件的非线性函数,且存在正常数 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ 使得 $0<\alpha_0\leq b(u)\leq\alpha_1$,$0<\beta_0\leq b'(u)\leq\beta_1$.

非线性强阻尼波动方程式是从线性弹性杆中纵向形变传播及弱非线性作用下空间变换离子声波传播问题中提出的,具有强烈物理背景的非线性发展方程.对于问题(1)的半线性情形,文献[1]讨论了其整体解的存在性和唯一性,并研究了在一定条件下,解的渐近性质和 blow-up 现象.文献[2]利用时空混合偏导数 $\vec{q}=\nabla u_t$ 作为中间变量,在一维和二维情形下,借助 Ritz 和 Ritz-Volterra 投影,分别导出了半离散和全离散格式下的最优收敛阶的误差估计.文献[3]利用混合控制体积方法,借助于零阶 R-T 三角形元分别导出了原始变量的 L^2-模和中间变量的 $H(\mathrm{div})$-模的最优误差估计,文献[4]借助于 EQ_1^{rot} 非协调元在半离散和全离散格式下进行了超逼近和超收敛分析.

众所周知,混合有限元方法是求解偏微分方程数值解的有效方法之一,但它要求两个有限元逼近空间满足所谓的 Brezzi-Babuška(简记为 B-B)相容条件[5],而其往往难以实现.文献[6]对二阶椭圆问题给出了一种新的混合有限元格式并给出了最优误差估计.这个格式具有自由度少且能够满足 B-B 条件等特点.随后,文献[7]给出了其超收敛性分析.文献[8－10]又分别将其应用于线性的抛物型方程和 Sobolev 方程的超收敛性研究.最近,文献[11]对问题(1)的半线性情况(即 $b(u)\equiv 1$ 时),利用 $EQ_1^{\mathrm{rot}}+Q_{10}\times Q_{01}$ 非协调元研究了半离散和全离散格式下的超逼近和超收敛分析,分别导出了原始变量在 H^1-模和中间变量在 $H(\mathrm{div})$-模下具有 $O(h^2)$ 和 $O(h^2+\tau^2)$ 的超逼近和整体超收敛性质.该方法还被用到双向滞热传导方程[12]等.

为了克服 B-B 条件这一要求,文献[13]对抛物型积分微分方程提出了 H^1-Galerkin 混合有限元方法.由于该方法与以往传统有限元方法相比具有:(a)不需要空间对满足 B-B 相容条件;(b)不需要剖分满足拟一致性假设的两个明显优势.这为有限元逼近空间的选取提供了方便.例如,文献[14]通过引进时间混合偏导数

收稿日期:2018-01-29;**修回日期:**2018-04-27.

基金项目:国家自然科学基金(11671369)

作者简介(通信作者):石东洋(1961－),男,河南鲁山人,河南省特聘教授,博士生导师,主要从事有限元方法及其应用研究,E-mail:shi_dy@zzu.edu.cn.

$\vec{p}=\nabla u_t$ 对(1)利用协调线性三角形元给出了 H^1-Galerkin 混合有限元方法的半离散和全离散格式,并导出了超逼近和超收敛结果.文献[15-16]分别对 Sobolev 方程和拟线性粘弹性方程利用不完全双二次元 Q_2^- 和一阶 BDFM 元建立了新的 H^1-Galerkin 混合有限元格式,并得出了 $O(h^3)$ 的半离散和 $O(h^3+\tau^2)$ 全离散的超逼近结果.然而,研究都是针对线性或半线性问题的.

对非线性问题来说,文献[17]利用 $Q_{11}+Q_{01}\times Q_{10}$ 元对非线性 Sobolev 方程建立了一个新的混合元变分格式,研究了半离散格式下原始变量 u 和中间变量 $\vec{p}$ 的超逼近和超收敛性质.文献[18]对非线性对流扩散方程利用非协调 EQ_1^{rot} 元,给出了 L^2-模意义下关于摄动参数的一致收敛性分析,并导出了一个新的渐近展开式.文献[19]对非线性双曲方程,通过 Galerkin 线性化有限元方法和建立了一个时间离散系统,得到了无网格比的超逼近和超收敛结果.但到目前为止,有关非线性强阻尼波动方程的研究却很少报道.此外,由于本文所考虑的方程中出现了非线性项 $b(u)\nabla u_t$,整个问题就与文献[11,14]截然不同了,其误差分析过程更为复杂和困难.

本文主要目的是利用文献[16]中的有限元空间,对非线性问题(1),通过引入中间变量 $\vec{p}=\nabla u_{tt}+b(u)\nabla u_t+\nabla u$,建立一个新的 H^1-Galerkin 混合元逼近格式.利用单元插值的特性,对半离散格式,分别给出了原始变量 u 在 H^1-模和中间变量 $\vec{p}$ 在 $H(\mathrm{div})$-模意义下具有 $O(h^3)$ 的超逼近结果.对于全离散格式,通过引入一个线性化 Euler 全离散格式克服了非线性方程离散余项只达到 $O(\tau)$ 的问题,并得到 u 和中间变量 $\vec{p}$ 具有 $O(h^3+\tau^2)$ 的超逼近结果.

本文用 $W^{m,p}(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间,其半范和范数分别记为 $|\cdot|_{m,p}$ 和 $\|\cdot\|_{m,p}$.特别的,当 $p=2$ 时,$W^{m,p}(\Omega)$ 简记为 $H^m(\Omega)$,相应的半范和范数简记为 $|\cdot|_m$ 和 $\|\cdot\|_m$.记

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^k(\Omega))}\triangleq\sup_{0\le t\le T}\|\varphi\|_{H^k(\Omega)},\ \|\varphi\|_{L^2(0,T;H^k(\Omega))}\triangleq\left(\int_0^t\|\varphi\|_{H^k(\Omega)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

文中出现的 C 均表示与剖分尺寸无关的常数,在不同的地方取值可以不同.

1 有限元空间及性质

设 Ω 是一个矩形区域,其边界 $\partial\Omega$ 平行于 x 轴与 y 轴,T_h 是 Ω 一族正则矩形剖分族.设 $K\in T_h$,其 4 个顶点为 a_1,a_2,a_3,a_4,4 条边为 $l_i=\overline{a_ia_{i+1}},i=1,2,3,4((\mathrm{mod}\ 4)+1)$.其中,$l_1,l_3$ 和 l_2,l_4 分别平行于 x 轴和 y 轴.记 $h_K=\mathrm{diam}(K),h=\max\{h_K\}$.

Q_2^- 元的定义为

$$\Sigma_K^1=\{v_i,i=1,2,\cdots,8\},P_K^1=\mathrm{span}\{1,x,y,xy,x^2,y^2,x^2y,xy^2\},$$
$$v_i=v(a_i),v_{i+4}=\frac{1}{|l_i|}\int_{l_i}v\mathrm{d}s,i=1,2,3,4.$$

一阶 BDFM 元的定义为

$$\Sigma_K^2=\{p_i{}^1,i=1,2,\cdots,5\},P_K^2=\mathrm{span}\{1,x,y,xy,x^2\},$$
$$\Sigma_K^3=\{p_i{}^2,i=1,2,\cdots,5\},P_K^3=\mathrm{span}\{1,x,y,xy,y^2\},$$
$$p_1^1=\frac{1}{|l_2|}\int_{l_2}p^1\mathrm{d}s,p_2^1=\frac{1}{|l_2|}\int_{l_2}yp^1\mathrm{d}s,p_3^1=\frac{1}{|l_4|}\int_{l_4}p^1\mathrm{d}s,p_4^1=\frac{1}{|l_4|}\int_{l_4}yp^1\mathrm{d}s,$$
$$p_5^1=\frac{1}{|K|}\int_K p^1\mathrm{d}x\mathrm{d}y,p_1^2=\frac{1}{|l_1|}\int_{l_1}p^2\mathrm{d}s,p_2^2=\frac{1}{|l_1|}\int_{l_1}xp^2\mathrm{d}s,p_3^2=\frac{1}{|l_3|}\int_{l_3}p^2\mathrm{d}s,$$
$$p_4^2=\frac{1}{|l_3|}\int_{l_3}xp^2\mathrm{d}s,p_5^2=\frac{1}{|K|}\int_K p^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

相应的有限元空间为:

$$V_h=\{v;v|_K\in P_K^1,\forall K\in T_h\},V_h^0=\{v;v\in V_h,v|_{\partial\Omega}=0\}\subset H_0^1(\Omega),$$
$$\vec{W}_h=\{\vec{w};\vec{w}|_K=(w^1,w^2)\in P_K^2\times P_K^3,\forall K\in T_h\}\subset H(\mathrm{div},\Omega).$$

设 I_h 和 Π_h 分别为由 V_h 及 $\vec{W}_h$ 所诱导的插值算子,满足

$$I_h v(a_i)=v_i,\int_{l_i}(v-I_h v)\mathrm{d}s=0,i=1,2,3,4,$$

$$\int_{l_i}(\vec{p}-\Pi\vec{p})\cdot\vec{n}q\,\mathrm{d}s=0,i=1,2,3,4,\int_K(\vec{p}-\Pi\vec{p})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

那么,对 $u\in H^4(\Omega)$,$\vec{p}=(p^1,p^2)\in(H^3(\Omega))^2$,$v\in V_h$,$\varphi\in V_h^0$,$\vec{w}\in\vec{W}_h$,文献[15]证明了如下结论:

$$(\nabla(u-I_h u),\nabla v)=O(h^3)\mid u\mid_4\|v\|_1,\tag{2}$$

$$(\vec{p}-\Pi_h\vec{p},\vec{w})=O(h^3)\mid\vec{p}\mid_3\|\vec{w}\|_0,\tag{3}$$

$$(\vec{p}-\Pi_h\vec{p},\nabla\varphi)=O(h^3)\mid\vec{p}\mid_3\|\nabla\varphi\|_0,\tag{4}$$

$$(\nabla\cdot(\vec{p}-\Pi_h\vec{p}),\nabla\cdot\vec{w})=0.\tag{5}$$

2 半离散格式下的超逼近分析

令 $\vec{p}=\nabla u_{tt}+b(u)\nabla u_t+\nabla u$,则问题(1)式等价于

$$\begin{cases}\vec{p}=\nabla u_{tt}+b(u)\nabla u_t+\nabla u, & (X,T)\in\Omega\times(0,T],\\ u_{tt}-\nabla\cdot\vec{p}=f(u), & (X,T)\in\Omega\times(0,T],\\ u(X,t)=0, & (X,T)\in\Omega\times(0,T],\\ u(X,0)=g(X),u_t(X,0)=h(X),\vec{p}(X,0)=\vec{p}_0(X), & X\in\Omega.\end{cases}\tag{6}$$

那么,(6)式的 H^1-Galerkin 混合变分问题为:求 $(u,\vec{p}):[0,T]\to H_0^1(\Omega)\times H(\mathrm{div},\Omega)$,使得

$$\begin{cases}(\nabla u_{tt},\nabla v)+(b(u)\nabla u_t,\nabla v)+(\nabla u,\nabla v)=(\vec{p},\nabla v), & \forall v\in H_0^1(\Omega),\\ (\vec{p},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{p},\nabla\cdot\vec{w})=(b(u)\nabla u_t,\vec{w})+(\nabla u,\vec{w})-(f(u),\nabla\cdot\vec{w}), & \forall\vec{w}\in H(\mathrm{div},\Omega).\end{cases}\tag{7}$$

与(7)式对应的半离散逼近格式为:求 $(u_h,\vec{p}_h):[0,T]\to V_0^h\times\vec{W}_h$,满足

$$\begin{cases}(\nabla u_{htt},\nabla v)+(b(u_h)\nabla u_{ht},\nabla v)+(\nabla u_h,\nabla v)=(\vec{p}_h,\nabla v), & \forall v\in {V_0}^h,\\ (\vec{p}_h,\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{p}_h,\nabla\cdot\vec{w})=(b(u_h)\nabla u_{ht},\vec{w})+(\nabla u_h,\vec{w})-(f(u_h),\nabla\cdot\vec{w}), & \forall\vec{w}\in\vec{W}_h,\\ u_h(X,0)=I_h g(X),u_{ht}(X,0)=I_h h(X),\vec{p}_h(X,0)=\Pi_h\vec{p}_0(X), & X\in\Omega.\end{cases}\tag{8}$$

定理 1 问题(8)式的解存在且唯一.

证明 设 V_0^h 的一组基为 $\psi_i(X)_{i=1}^{N_1}$,$\vec{W}_h$ 的一组基为 $\vec{\phi}_j(X)_{j=1}^{N_2}$. 令

$$u_h=\sum_{i=1}^{N_1}u_i(t)\psi_i(X),u_{ht}=\sum_{i=1}^{N_1}u_{it}(t)\psi_i(X),u_{htt}=\sum_{i=1}^{N_1}u_{itt}(t)\psi_i(X),\vec{p}_h=\sum_{j=1}^{N_2}p_j(t)\vec{\phi}_j(X),\tag{9}$$

$$u_h(X,0)=\sum_{i=1}^{N_1}\bar{u}_i(0)\psi_i(X),u_{ht}(X,0)=\sum_{i=1}^{N_1}\bar{u}_{it}(0)\psi_i(X),\vec{p}_h(X,0)=\sum_{j=1}^{N_2}\bar{p}_j(0)\vec{\phi}_j(X).$$

将(9)式代入(8)式,并取 $v=\psi_l,l=1,2,\cdots,N_1;\vec{w}=\vec{\phi}_m,m=1,2,\cdots,N_2$,则问题(8)式可写成如下形式:

$$\begin{cases}A(U''(t)+U(t))+E(U)U'(t)=BP(t),\\ CP(t)+DP(t)=B^{\mathrm{T}}U(t)+G(U)U'(t)-F(U).\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$A=((a_{i,j})_{N1\times N1})^{\mathrm{T}},B=((b_{i,j})_{N2\times N1})^{\mathrm{T}},C=((c_{i,j})_{N2\times N2})^{\mathrm{T}},$$

$$D=((d_{i,j})_{N2\times N2})^{\mathrm{T}},E(U)=((e_{i,j})_{N1\times N1})^{\mathrm{T}},G(U)=((g_{i,j})_{N1\times N2})^{\mathrm{T}},F(U)=(f_i(t))_{N2\times 1},$$

$$a_{i,j}=(\nabla\psi_i(X),\nabla\psi_j(X)),b_{i,j}=(\vec{\phi}_i(X),\nabla\psi_j(X)),c_{i,j}=(\vec{\phi}_i(X),\vec{\phi}_j(X)),$$

$$d_{i,j}=(\nabla\cdot\vec{\phi}_i(X),\nabla\cdot\vec{\phi}_j(X)),e_{i,j}=(b(\sum_{i=1}^{N_1}u_i(t)\psi_i(X))\nabla\psi_i(X),\nabla\psi_j(X)),$$

$$g_{i,j}=(b(\sum_{i=1}^{N_1}u_i(t)\psi_i(X))\nabla\psi_i(X),\vec{\phi}_j(X)),f_i(t)=(f(\sum_{j=1}^{N_2}u_j(t)\psi_j(X)),\nabla\cdot\psi_i(X)),$$

$$U(t)=(u_1(t),\cdots,u_{N_1}(t))^{\mathrm{T}},P(t)=(p_1(t),\cdots,p_{N_2}(t))^{\mathrm{T}}.$$

已知矩阵 A,C,D 对称正定,则由(10)式,得

$$AU''(t)+(E(U)-B(C+D)^{-1}G(U))U'(t)+(A-B(C+D)^{-1}B^{\mathrm{T}})U(t)=B(C+D)^{-1}F(U).\tag{11}$$

(11)式是关于 $U(t)$ 的微分方程.由于矩阵 A 可逆,$E(U)$,$G(U)$,$F(U)$ 满足 Lipschitz 连续条件,根据微分方程理论[20] 可知:当 $t\geq 0$ 时,(11) 式的解 $U(t)$ 存在且唯一.从而 $P(t)$ 存在唯一.进而可知,离散解 $\vec{p}_h$ 和 u_h 存在且唯一.

定理 2　设 $(u,\vec{p})$ 和 $(u_h,\vec{p}_h)$ 分别是(7) 式和(8) 式的解,$u,u_t,u_{tt}\in H^4(\Omega)$,$\vec{p}\in(H^3(\Omega))^2$,则有

$$\|u_h-I_hu\|_1\leq Ch^3\Big[\int_0^t(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\|u_{tt}\|_4^2+\|\vec{p}\|_3^2)\mathrm{d}\tau\Big]^{\frac{1}{2}},\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{p}_h-\Pi_h\vec{p}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}\leq{}& Ch^3\Big[\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2+\|\vec{p}\|_3^2+\\&\int_0^t(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\|u_{tt}\|_4^2+\|\vec{p}\|_3^2)\mathrm{d}\tau\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{13}$$

证明　记 $u-u_h=(u-I_hu)+(I_hu-u_h)\triangleq\eta+\xi$,$\vec{p}-\vec{p}_h=(\vec{p}-\Pi_h\vec{p})+(\Pi_h\vec{p}-\vec{p}_h)\triangleq\vec{r}+\vec{\theta}$.则对任意的 $v\in V_0^h$,$\vec{w}\in\overrightarrow{W}_h$,由(7)式、(8)式和(5)式,得下面的误差方程

$$\begin{cases}(\mathrm{a})(\nabla\xi_{tt},\nabla v)+(b(u_h)\nabla\xi_t,\nabla v)+(\nabla\xi,\nabla v)=-(\nabla\eta_{tt},\nabla v)-((b(u)-\\ b(u_h))\nabla u_t,\nabla v)-(b(u_h)\nabla\eta_t,\nabla v)-(\nabla\eta,\nabla v)+(\vec{r},\nabla v)+(\vec{\theta},\nabla v),\\ (\mathrm{b})(\vec{\theta},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{\theta},\nabla\cdot\vec{w})=-(\vec{r},\vec{w})+((b(u)-b(u_h))\nabla u_t,\vec{w})+\\ (b(u_h)\nabla\eta_t,\vec{w})+(b(u_h)\nabla\xi_t,\vec{w})+(\nabla\eta,\vec{w})+(\nabla\xi,\vec{w})-(f(u)-f(u_h),\nabla\cdot\vec{w}).\end{cases}\tag{14}$$

一方面,在(14a)中令 $v=\xi_t$,可得

$$\begin{aligned}&(\nabla\xi_{tt},\nabla\xi_t)+(b(u_h)\nabla\xi_t,\nabla\xi_t)+(\nabla\xi,\nabla\xi_t)=-(\nabla\eta_{tt},\nabla\xi_t)-((b(u)-b(u_h))\nabla u_t,\nabla\xi_t)-\\&(b(u_h)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)-(\nabla\eta,\nabla\xi_t)+(\vec{r},\nabla\xi_t)-(\vec{\theta},\nabla\xi_t),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\xi_t\|_0^2+\|\nabla\xi\|_0^2)+\|b^{\frac{1}{2}}(u_h)\nabla\xi_t\|_0^2=-(\nabla\eta_{tt},\nabla\xi_t)-(\nabla\eta,\nabla\xi_t)-\\&((b(u)-b(u_h))\nabla u_t,\nabla\xi_t)-(b(u_h)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)+(\vec{r},\nabla\xi_t)-(\vec{\theta},\nabla\xi_t)\triangleq\sum_{i=1}^6A_i.\end{aligned}\tag{15}$$

由(2)式、Schwarz 不等式和 ε-Young 不等式

$$\begin{aligned}|A_1|+|A_2|\leq{}& Ch^3\|u_{tt}\|_4\|\nabla\xi_t\|_0+Ch^3\|u\|_4\|\nabla\xi_t\|_0\leq\\& Ch^6(\|u_{tt}\|_4^2+\|u\|_4^2)+C\|\nabla\xi_t\|_0^2.\end{aligned}\tag{16}$$

由 $b(u)$ 关于 u 满足 Lipchitz 条件,可得

$$\begin{aligned}|A_3|\leq{}& C\|u-u_h\|_0\|\nabla\xi_t\|_0\leq C(\|\eta\|_0+\|\xi\|_0)\|\nabla\xi_t\|_0\leq\\& C\|\eta\|_0^2+C\|\xi\|_0^2+C\|\nabla\xi_t\|_0^2\leq Ch^6\|u\|_3^2+C\|\xi\|_0^2+C\|\nabla\xi_t\|_0^2.\end{aligned}\tag{17}$$

为了估计 A_4,需要如下假设并在随后给出证明.

假设 1　存在 $0\leq h_0\leq 1$,对 $0\leq h\leq h_0$ 和 $t\in[0,T]$,成立

$$\|\nabla(u(t)-u_h(t))\|_{0,\infty}\leq 1.\tag{18}$$

$\forall\phi\in W^{1,\infty}(\Omega)$,定义其在单元 K 上的平均值 $\bar{\phi}|_K=\frac{1}{K}\int_K\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,则有 $|\phi|_K-\bar{\phi}|_K|\leq Ch\|\phi\|_{1,\infty,K}$.利用假设 1、平均值技巧、插值理论和(2)式,可得

$$\begin{aligned}|A_4|={}&|\sum_K((b(u_h)-\overline{b(u_h)}+\overline{b(u_h)})\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)|\leq|\sum_K((b(u_h)-\overline{b(u_h)})\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)|+\\&|\overline{b(u_h)})\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)|\leq Ch\|\nabla\eta_t\|_0\|\nabla\xi_t\|_0+Ch^3\|u_t\|_4\|\nabla\xi_t\|_0\leq\\& Ch^3\|u_t\|_3\|\nabla\xi_t\|_0+Ch^3\|u_t\|_4\|\nabla\xi_t\|_0\leq Ch^6\|u_t\|_4^2+C\|\nabla\xi_t\|_0^2.\end{aligned}\tag{19}$$

再由(4)式,可知

$$|A_5|\leq Ch^3\|\vec{p}\|_3\|\nabla\xi_t\|_0\leq Ch^6\|\vec{p}\|_3^2+\|\nabla\xi_t\|_0^2,\tag{20}$$

$$|A_6|\leq C\|\vec{\theta}\|_0^2+C\|\nabla\xi_t\|_0^2.\tag{21}$$

把(16)~(17)式,(19)~(21)式与(15)式结合,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\xi_t\|_0^2+\|\nabla\xi\|_0^2)+\|b^{\frac{1}{2}}(u_h)\nabla\xi_t\|_0^2\leq Ch^6(\|u\|_4^2+$$

$$\|u_t\|_4^2+\|u_{tt}\|_4^2+\|\vec{p}\|_3^2)+C\|\nabla\xi_t\|_0^2+C\|\vec{\theta}\|_0^2.$$

对上式两边从 0 到 t 积分，并注意到 $\nabla\xi(X,0)=0$，得

$$\|\nabla\xi_t\|_0^2+\|\nabla\xi\|_0^2\le Ch^6\int_0^t(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\|u_{tt}\|_4^2+\|\vec{p}\|_3^2)\mathrm{d}\tau+$$
$$C\int_0^t(\|\nabla\xi_t\|_0^2+\|\nabla\xi\|_0^2+\|\vec{\theta}\|_0^2)\mathrm{d}\tau.$$

由 Gronwall 引理，得

$$\|\nabla\xi_t\|_0^2+\|\nabla\xi\|_0^2\le Ch^6\int_0^t(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\|u_{tt}\|_4^2+\|\vec{p}\|_3^2)\mathrm{d}\tau+C\int_0^t\|\vec{\theta}\|_0^2\mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

另一方面，在(14b)中，令 $\vec{w}=\vec{\theta}$，有

$$\|\vec{\theta}\|_0^2+\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2=-(\vec{r},\vec{\theta})+((b(u)-b(u_h))\nabla u_t,\vec{\theta})+(b(u_h)\nabla\eta_t,\vec{\theta})+(b(u_h)\nabla\xi_t,\vec{\theta})+$$
$$(\nabla\eta,\vec{\theta})+(\nabla\xi,\vec{\theta})-(f(u)-f(u_h),\nabla\cdot\vec{\theta})\triangleq\sum_{i=1}^7B_i. \tag{23}$$

由(3)式、Schwarz 不等式和 ε-Yonung 不等式，可得

$$|B_1|\le Ch^3\|\vec{p}\|_3\|\vec{\theta}\|_0\le Ch^6\|\vec{p}\|_3^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2. \tag{24}$$

再利用 $b(u)$ 关于 u 满足 Lipchitz 条件，可知

$$|B_2|\le C\|u-u_h\|_0\|\vec{\theta}\|_0\le C(\|\eta\|_0+\|\xi\|_0)\|\vec{\theta}\|_0\le C\|\eta\|_0^2+C\|\xi\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2\le$$
$$Ch^6\|u\|_3^2+C\|\xi\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2. \tag{25}$$

由于 $u|_{\partial\Omega}=0$，从而可知 $\eta|_{\partial\Omega}=\eta_t|_{\partial\Omega}=0$. 所以由假设 1 和 Green 公式，可得

$$|B_3|=|\sum\nolimits_K(\eta_t\nabla b(u_h),\vec{\theta})+\sum\nolimits_K(b(u_h)\eta_t,\nabla\cdot\vec{\theta})|\le\|\nabla b(u_h)\|_{0,\infty}\|\eta_t\|_0\|\vec{\theta}\|_0+$$
$$\|b(u_h)\|_{0,\infty}\|\eta_t\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0\le Ch^6\|u_t\|_3^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\nabla}\cdot\theta\|_0^2, \tag{26}$$

$$|B_5|=|-\sum\nolimits_K(\eta,\nabla\cdot\vec{\theta})|\le\|\eta\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0\le C\|\eta\|_0^2+\varepsilon\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2\le$$
$$Ch^6\|u\|_3^2+\varepsilon\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2. \tag{27}$$

由 Schwarz 不等式和 ε-Young 不等式，可得

$$|B_4|+|B_6|\le C\|\nabla\xi_t\|_0\|\vec{\theta}\|_0+\|\nabla\xi\|_0\|\vec{\theta}\|_0\le C\|\nabla\xi_t\|_0^2+C\|\nabla\xi\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}\|_0^2. \tag{28}$$

由 $f(u)$ 关于 u 满足 Lipchitz 条件，可得

$$|B_7|\le\|f(u)-f(u_h)\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0\le C\|u-u_h\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0\le C\|\eta+\xi\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0\le$$
$$C(\|\eta\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0+\|\xi\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0)\le C\|\eta\|_0^2+C\|\xi\|_0^2+\varepsilon\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2\le$$
$$Ch^6\|u\|_3^2+C\|\xi\|_0^2+\varepsilon\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2. \tag{29}$$

把(24)～(29)式与(23)式结合，并取适当小的 ε，有

$$\|\vec{\theta}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2\le Ch^6(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2+\|\vec{p}\|_3^2)+C\|\nabla\xi_t\|_0^2+C\|\nabla\xi\|_0^2. \tag{30}$$

把(30)式代入到(22)式，由 Gronwall 引理可得(12)式.再把(12)式代入到(30)式即得(13)式.定理 2 证毕.

下面利用文献[21]中的思想来验证假设 1 的正确性.

首先，记 $\delta(t)\triangleq\nabla(u(t)-u_h(t))$.由初始逼近和插值理论可知 $\|\delta(0)\|_{0,\infty}<1$ 成立.由函数的连续性，在 $t=0$ 的一个小邻域$[0,\mu]$内假设 1 成立.若假设不在整个区间$[0,T]$上成立，设 $t_0=\inf\{t:\|\delta(t)\|_{0,\infty}\ge 1,t\in[0,T]\}$，则有 $\|\delta(t_0)\|_{0,\infty}=1,t_0>0$(事实上，若 $\|\delta(t)\|_{0,\infty}>1$，由函数的连续性，总可以找到一个点 $t_1<t_0$ 使得 $\|\delta(t_1)\|_{0,\infty}=1$，此时可记 t_1 为 t_0).此时假设 1 在$[0,t_0)$成立.

从定理 2 的证明过程中可以看出(12)式在 $[0,t_0]$ 上成立(当 $t=t_0$ 时结论显然成立).由逆不等式，对充分小的 h，有

$$\|\delta(t)\|_{0,\infty}\le\|\nabla(u(t)-I_hu(t))\|_{0,\infty}+\|\nabla(I_hu(t)-u_h(t))\|_{0,\infty}\le$$
$$Ch|u|_3+Ch^{-1}\|I_hu(t)-u_h(t)\|_1\le C_0h,t\in[0,t_0].$$

C_0 是与 h,t 无关的常数，故可选择合适的 h_0，使得 $C_0h\le\dfrac{1}{2}$.当 $0<h<h_0$ 时，有 $\|\delta(t)\|_{0,\infty}<\dfrac{1}{2}$，这与

$\|\delta(t)\|_{0,\infty}=1$ 矛盾.所以(18)式是正确的,假设 1 成立.

3 全离散格式下的超逼近分析

设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$ 为$[0,T]$的等距剖分,$\tau=\dfrac{T}{N}$,$t_n=n\tau$,$n=0,1,\cdots,N$,对任意光滑函数 ϕ,定义

$$\phi^n=\phi(t_n),\bar{\phi}^n=\frac{1}{2}(\phi^n+\phi^{n-1}),\partial_t\phi^n=\frac{1}{\tau}(\phi^n-\phi^{n-1}),$$

$$\phi^{n,\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}(\phi^{n+1}+2\phi^n+\phi^{n-1})=\frac{1}{2}(\bar{\phi}^{n+1}+\bar{\phi}^n),$$

$$\bar{\partial}_t\phi^n=\frac{1}{2\tau}(\phi^{n+1}-\phi^{n-1})=\frac{1}{\tau}(\bar{\phi}^{n+1}+\bar{\phi}^n)=\frac{1}{2}(\tilde{\partial}_t\phi^{n+1}+\tilde{\partial}_t\phi^n)=\tilde{\partial}_t\bar{\phi}^{n+1},$$

$$\bar{\partial}_{tt}\phi^n=\frac{1}{\tau^2}(\phi^{n+1}-2\phi^n+\phi^{n-1})=\frac{1}{\tau}(\tilde{\partial}_t\phi^{n+1}-\tilde{\partial}_t\phi^n),\hat{\phi}^n=\frac{1}{4}(3\phi^n+2\phi^{n-1}-\phi^{n-2}).$$

由(7)式,当 $n\geq 2$ 时,对 $v\in H_0^1(\Omega)$,$\vec{w}\in H(\mathrm{div},\Omega)$ 有

$$\begin{cases}(\bar{\partial}_{tt}\nabla u^n,\nabla v)+(b(\hat{u}^{)}\bar{\partial}_t\nabla u^n,\nabla v)+(\nabla u^{n,\frac{1}{4}},\nabla v)=\\(\vec{p}^{n,\frac{1}{4}},\nabla v)+(\nabla R_1^n,\nabla v)+(R_2^n,\nabla v),\\(\vec{p}^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{p}^{n,\frac{1}{4}},\nabla\cdot\vec{w})=(b(\hat{u}^n)\bar{\partial}_t\nabla u^n,\vec{w})+(\nabla u^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})-\\(f(\hat{u}^n),\nabla\cdot\vec{w})-(R_2^n,\vec{w})-(R_3^n,\nabla\cdot\vec{w}),\end{cases}\tag{31}$$

其中,并由泰勒展开式可得

$$R_1^n=\bar{\partial}_{tt}u^n-u_{tt}^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2),R_2^n=b(\hat{u}^n)\bar{\partial}_t\nabla u^n-(b(u)\nabla u_t)^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2),R_3^n=f^{n,\frac{1}{4}}-f(\hat{u}^n)=O(\tau^2).$$

与(7)式对应的线性化全离散逼近格式为:求 $(U^n,\vec{P}^n):[0,T]\to V_0^h\times\vec{W}_h(n\geq 2)$,对 $v\in V_0^h$,$\vec{w}\in\vec{W}_h$ 满足

$$\begin{cases}(\bar{\partial}_{tt}\nabla U^n,\nabla v)+(b(\hat{U}_n)\bar{\partial}_t\nabla U^n,\nabla v)+(\nabla U^{n,\frac{1}{4}},\nabla v)=(\vec{P}^{n,\frac{1}{4}},\nabla v),\\(\vec{P}^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{P}^{n,\frac{1}{4}},\nabla\cdot\vec{w})=(b(\hat{U}_n)\bar{\partial}_t\nabla U^n,\vec{w})+(\nabla U^{n,\frac{1}{4}},\vec{w})-(f(\hat{U}_n),\nabla\cdot\vec{w}),\\U^0=I_hu^0,\vec{P}^0=\Pi_h\vec{p}^0,X\in\Omega,\\U^1=I_h(u^0+\tau u_t^0+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}^0),P^1=\Pi_h(\vec{p}^0+\tau\vec{p}_t^0+\frac{\tau^2}{2}\vec{p}_{tt}^0),X\in\Omega.\end{cases}\tag{32}$$

当 $n=1$ 时,分两步对 U^2 进行估计.对 $v\in H_0^1(\Omega)$,$\vec{w}\in H(\mathrm{div},\Omega)$,第 1 步考虑

$$\begin{cases}(\bar{\partial}_{tt}\nabla u^1,\nabla v)+(b(\tilde{u}^2)\bar{\partial}_t\nabla u^1,\nabla v)+(\nabla u^{1,\frac{1}{4}},\nabla v)=(\vec{p}^{1,\frac{1}{4}},\nabla v)+\\(\nabla R_1^1,\nabla v)+(R_2^1,\nabla v),\\(\vec{p}^{1,\frac{1}{4}},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{p}^{1,\frac{1}{4}},\nabla\cdot\vec{w})=(b(\tilde{u}^2)\bar{\partial}_t\nabla u^1,\vec{w})+(\nabla u^{1,\frac{1}{4}},\vec{w})-\\(f(\tilde{u}^2),\nabla\cdot\vec{w})-(R_2^1,\vec{w})-(R_3^1,\nabla\cdot\vec{w}),\end{cases}\tag{33}$$

对 $v\in V_0^h$,$\vec{w}\in\vec{W}_h$ 满足

$$\begin{cases}(\bar{\partial}_{tt}\nabla U^1,\nabla v)+(b(\dfrac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar{\partial}_t\nabla U^1,\nabla v)+(\nabla U^{1,\frac{1}{4}},\nabla v)=(\vec{P}^{1,\frac{1}{4}},\nabla v),\\(\vec{P}^{1,\frac{1}{4}},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{P}^{1,\frac{1}{4}},\nabla\cdot\vec{w})=(b(\dfrac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar{\partial}_t\nabla U^1,\vec{w})+\\(\nabla U^{1,\frac{1}{4}},\vec{w})-(f(\dfrac{U^{2,0}+U^0}{2}),\nabla\cdot\vec{w}).\end{cases}\tag{34}$$

其中,并由泰勒展开式可得 $\tilde{u}^2\triangleq\dfrac{u^2+u^0}{2}$,$R_1^1=\bar{\partial}_{tt}u^1-u_{tt}{}^{1,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$,$R_2^1=b(\tilde{u}^2)\bar{\partial}_t\nabla u^1-(b(u)\nabla u_t)^{1,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$,$R_3^1=f^{1,\frac{1}{4}}-f(\tilde{u}^2)=O(\tau^2)$.

第 2 步，考虑

$$\begin{cases}(\bar\partial_{tt}\nabla u^1,\nabla v)+(b(\bar u^1)\bar\partial_t\nabla u^1,\nabla v)+(\nabla u^{1,\frac14},\nabla v)=(\vec p^{\,1,\frac14},\nabla v)+\\(\nabla R_1^1,\nabla v)+(R_4^1,\nabla v),\\(\vec p^{\,1,\frac14},\vec w)+(\nabla\cdot\vec p^{\,1,\frac14},\nabla\cdot\vec w)=(b(\bar u^1)\bar\partial_t\nabla u^1,\vec w)+(\nabla u^{1,\frac14},\vec w)-\\(f(\bar u^1),\nabla\cdot\vec w)-(R_4{}^1,\vec w)-(R_5{}^1,\nabla\cdot\vec w),\end{cases}\tag{35}$$

对 $v\in V_0^h,\vec w\in\vec W_h$ 满足

$$\begin{cases}(\dfrac{\nabla U^{2,0}-2\nabla U^1+\nabla U^0}{\tau^2},\nabla v)+(b(\bar U^1)\dfrac{\nabla U^{2,0}-\nabla U^0}{2\tau},\nabla v)+\\(\dfrac{\nabla U^{2,0}+2\nabla U^1+\nabla U^0}{4},\nabla v)=(\vec P^{1,\frac14},\nabla v),\\(\vec P^{1,\frac14},\vec w)+(\nabla\cdot\vec P^{1,\frac14},\nabla\cdot\vec w)=(b(\bar U^1)\dfrac{\nabla U^{2,0}-\nabla U^0}{2\tau},\vec w)+\\(\dfrac{\nabla U^{2,0}+2\nabla U^1+\nabla U^0}{4},\vec w)-(f(\bar U^1),\nabla\cdot\vec w).\end{cases}\tag{36}$$

其中，并由泰勒展开式可得 $R_4^1=b(\bar u^1)\bar\partial_t\nabla u^1-(b(u)\nabla u_t)^{1,\frac14}=O(\tau)$，$R_5^1=f^{1,\frac14}-f(\bar u^1)=O(\tau)$.

定理 3　设 $(u_h,\vec p_h)$ 和 $(U^n,\vec p^{\,n})$ 分别是(31)式和(32)式的解，$u,u_t,u_{tt}\in L^\infty(0,T;H^4(\Omega))$，$u_{ttt}$，$u_{tttt}\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$，$\vec p\in L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)$，则对任意的 $1\le n\le N$，有

$$\|\overline{I_hu}^n-\bar U^n\|_1\le Ch^3M+C\tau^2,\tag{37}$$

$$\|\Pi_h\vec p^{\,n,\frac14}-\vec P^{n,\frac14}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}\le Ch^3M+C\tau^2,\tag{38}$$

其中 $M^2=\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|\vec p\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}$.

证明　记 $u^n-U^n=(u^n-I_hu^n)+(I_hu^n-U^n)\triangleq\eta^n+\xi^n$，$\vec p^{\,n}-\vec P^n=(\vec p-\Pi_h\vec p^{\,n})+(\Pi_h\vec p^{\,n}-\vec P^n)\triangleq\vec r^{\,n}+\vec\theta^n$. 则由(31)式和(32)式和(5)式，当 $n\ge2$ 时，可得下面误差方程

$$\begin{cases}(\mathrm{a})(\bar\partial_{tt}\nabla\xi^n,\nabla v)+(b(\hat U_n)\bar\partial_t\nabla\xi^n,\nabla v)+(\nabla\xi^{n,\frac14},\nabla v)=-(\bar\partial_{tt}\nabla\eta^n,\nabla v)-\\((b(\hat u_n)-b(\hat U_n))\bar\partial_t\nabla u^n,\nabla v)-(b(\hat U_n)\bar\partial_t\nabla\eta^n,\nabla v)-(\nabla\eta^{n,\frac14},\nabla v)+\\(\vec r^{\,n,\frac14},\nabla v)+(\vec\theta^{n,\frac14},\nabla v)+(\nabla R_1{}^n,\nabla v)+(R_2{}^n,\nabla v),\\(\mathrm{b})(\vec\theta^{n,\frac14},\vec w)+(\nabla\cdot\vec\theta^{n,\frac14},\nabla\cdot\vec w)=-(\vec r^{\,n,\frac14},\vec w)+((b(\hat u_n)-b(\hat U_n))\bar\partial_t\nabla u^n,\vec w)+\\(b(\hat U_n)\bar\partial_t\nabla\eta^n,\vec w)+(b(\hat U_n)\bar\partial_t\nabla\xi^n,\vec w)+(\nabla\eta^{n,\frac14},\vec w)+(\nabla\xi^{n,\frac14},\vec w)-\\(f(\hat u^n)-f(\hat U^n),\nabla\cdot\vec w)-(R_2^n,\vec w)-(R_3{}^n,\nabla\cdot\vec w).\end{cases}\tag{39}$$

一方面，在(39a)式中，令 $v=\tilde\partial_t\bar\xi^{n+1}$，可得

$$\begin{aligned}&(\bar\partial_{tt}\nabla\xi^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})+(b(\hat U_n)\bar\partial_t\nabla\xi^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})+(\nabla\xi^{n,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})=-(\bar\partial_{tt}\nabla\eta^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})-\\&((b(\hat u_n)-b(\hat U_n))\bar\partial_t\nabla u^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})-(b(\hat U_n)\bar\partial_t\nabla\eta^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})-(\nabla\eta^{n,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})+\\&(\vec r^{\,n,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})+(\vec\theta^{n,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})+(\nabla R_1{}^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})+(R_2^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})\triangleq\sum_{i=1}^8I_i.\end{aligned}\tag{40}$$

(40)式的左端项可分别改写为

$$(\bar\partial_{tt}\nabla\xi^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})=\frac{1}{2\tau}(\|\tilde\partial_t\nabla\xi^{n+1}\|_0^2-\|\tilde\partial_t\nabla\xi^n\|_0^2),$$

$$(b(\hat U_n)\bar\partial_t\nabla\xi^n,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})=\|b(\hat U_n)^{\frac12}\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1}\|_0^2,$$

$$(\nabla\xi^{n,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^{n+1})=\frac{1}{2\tau}(\|\nabla\bar\xi^{n+1}\|_0^2-\|\nabla\bar\xi^n\|_0^2).$$

类似于半离散情形，同样需要如下假设并在后面予以证明.

假设 2 存在 $0<h_1<1$,对 $0<h<h_1,n=0,1,\cdots,N$ 成立

$$\|\nabla(u^n-U^n)\|_{0,\infty}<1. \tag{41}$$

此时,对(40)式右端各项来说,类似于半离散情形,由假设 2 及 ε-Young 不等式可依次估计为

$$|I_1|\leq Ch^3\|\overline{\partial}_{tt}u^n\|_4\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0\leq Ch^6\|\overline{\partial}_{tt}u^n\|_4^2+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2\leq$$
$$Ch^6\frac{1}{2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|u_{tt}\|_4^2\mathrm{d}t+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2,$$

$$|I_2|\leq C(\|\hat{\eta}_n\|_0+\|\hat{\xi}^n\|_0)\|\overline{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0\leq C(\|\eta^n\|_0^2+\|\eta^{n-1}\|_0^2+\|\eta^{n-2}\|_0^2)+C(\|\xi^n\|_0^2+$$
$$\|\xi^{n-1}\|_0^2+\|\xi^{n-2}\|_0^2)+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2\leq Ch^6(\|u^n\|_3^2+\|u^{n-1}\|_3^2+\|u^{n-2}\|_3^2)+$$
$$C(\|\xi^n\|_0^2+\|\xi^{n-1}\|_0^2+\|\xi^{n-2}\|_0^2)+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2\leq$$
$$Ch^6\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}^2+C\tau^2\sum_{k=1}^{n}\|\widetilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2,$$

$$|I_3|=|((b(\hat{U}_n)-\bar{b}(\hat{U}_n)+\bar{b}(\hat{U}_n))\overline{\partial}_t\nabla\eta^n,\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1})|\leq Ch\|\overline{\partial}_t\nabla\eta^n\|_0\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0+$$
$$Ch^3\|\overline{\partial}_tu^n\|_4\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0\leq Ch^3\|\overline{\partial}_tu^n\|_3\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0+Ch^3\|\overline{\partial}_tu^n\|_4\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0\leq$$
$$Ch^6\frac{1}{2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|u_t\|_3^2\mathrm{d}t+Ch^6\frac{1}{2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|u_t\|_4^2\mathrm{d}t+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2,$$

$$|I_4|\leq Ch^3(\|u^{n+1}\|_4+\|u^n\|_4+\|u^{n-1}\|_4)\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0\leq Ch^6\|u\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2,$$

$$|I_5+I_6|\leq Ch^3(\|\vec{p}^{n+1}\|_3+\|\vec{p}^n\|_3+\|\vec{p}^{n-1}\|_3)\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0+\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0\leq$$
$$Ch^6\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}^2+C\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2,$$

$$|I_7+I_8|\leq\|\nabla R_1^n\|_0\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0+C\|R_2^n\|_0\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0\leq C\tau^4+\varepsilon\|\widetilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2.$$

取适当小的 ε,有

$$\frac{1}{2\tau}(\|\widetilde{\partial}_t\nabla\xi^{n+1}\|_0^2-\|\widetilde{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2\|)+\frac{1}{2\tau}(\|\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2-\nabla\bar{\xi}^n\|_0^2)\leq Ch^6\frac{1}{2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(\|u_{tt}\|_4^2+$$
$$\|u_t\|_4^2)\mathrm{d}t+Ch^6(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2+\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}^2)+C\tau^4+C\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+C\tau^2\sum_{k=1}^{n}\|\widetilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2.$$

将上式两端同乘 2τ,并对 n 从 2 到 $m-1(2<m\leq N)$ 求和,可得

$$\|\widetilde{\partial}_t\nabla\xi^m\|_0^2+\|\nabla\bar{\xi}^m\|_0^2\leq Ch^6\int_{t_1}^{t_m}(\|u_{tt}\|_4^2+\|u_t\|_4^2)\mathrm{d}t+Ch^6\tau\sum_{n=2}^{m-1}(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2+$$
$$\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}^2)+C\tau^4+C\tau^2\sum_{k=1}^{m-1}\|\widetilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2+C\tau\sum_{n=2}^{m-1}\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+\|\widetilde{\partial}_t\nabla\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar{\xi}^2\|_0^2\leq$$
$$Ch^6(\|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2+\|u_t\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2+\|u\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2+\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}^2)+C\tau^4+$$
$$C\tau^2\sum_{k=1}^{m-1}\|\widetilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2+C\tau\sum_{n=1}^{m-1}\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+\|\widetilde{\partial}_t\nabla\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar{\xi}^2\|_0^2. \tag{42}$$

另一方面,在(39b)式中令 $\vec{w}=\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}$,则不难得到

$$(\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}},\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})+(\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}},\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})=-(\vec{r}^{n,\frac{1}{4}},\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})+((b(\hat{u}_n)-b(\hat{U}_n))\overline{\partial}_t\nabla u^n,\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})+$$
$$(b(\hat{U}_n)\overline{\partial}_t\nabla\eta^n,\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})+(b(\hat{U}_n)\overline{\partial}_t\nabla\xi^n,\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})+(\nabla\eta^{n,\frac{1}{4}},\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})+(\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}},\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})-$$
$$(f(\hat{u}^n)-f(\hat{U}^n),\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})-(R_2{}^n,\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})-(R_3{}^n,\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})\triangleq\sum_{i=1}^{9}J_i. \tag{43}$$

在此情形下,(43)式的右端依次可估计为

$$|J_1|\leq Ch^3(\|\vec{p}^{n+1}\|_3+\|\vec{p}^{\{n\}}\|_3+\|\vec{p}^{n-1}\|_3)\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\leq Ch^6(\|\vec{p}^{n+1}\|_3^2+\|\vec{p}^n\|_3^2+$$
$$\|\vec{p}^{n-1}\|_3^2)+\varepsilon\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2\leq Ch^6\|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}^2+\varepsilon\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2,$$

$$|J_2|\leq C(\|\hat{\eta}_n\|_0+\|\hat{\xi}^n\|_0)\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\leq C(\|\eta^n\|_0^2+\|\eta^{n-1}\|_0^2+\|\eta^{n-2}\|_0^2)+C(\|\xi^n\|_0^2+$$

$$\|\xi^{n-1}\|_0^2+\|\xi^{n-2}\|_0^2)+\varepsilon\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2\leq Ch^6\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+C\tau^2\sum_{k=1}^{9}\|\tilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2,$$

$$|J_3|=|(\bar{\partial}_t\eta^n\nabla b(\hat{U}_n),\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})+(b(\hat{U}_n)\bar{\partial}_t\eta^n,\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})|\leq Ch^3\|\bar{\partial}_t u^n\|_3(\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0+$$
$$\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0)\leq Ch^6\frac{1}{2\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|u_t\|_3^2\mathrm{d}t+\varepsilon(\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2)\leq$$
$$Ch^6\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\varepsilon(\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2),$$

$$|J_4+J_6|\leq C\|\bar{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0+\|\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}}\|_0\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\leq$$
$$C\|\bar{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2+C\|\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2,$$

$$|J_5|=|(\eta^{n,\frac{1}{4}},\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}})|\leq\|\eta^{n,\frac{1}{4}}\|_0\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\leq Ch^3(\|u^{n+1}\|_3+\|u^n\|_3+$$
$$\|u^{n-1}\|_3)\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\leq Ch^6(\|u^{n+1}\|_3^2+\|u^n\|_3^2+\|u^{n-1}\|_3^2)+\varepsilon\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2\leq$$
$$Ch^6\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\varepsilon\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2,$$

$$|J_7|\leq C(\|\hat{\eta}_n\|_0+\|\hat{\xi}^n\|_0)\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\leq Ch^6\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+C\tau^2\sum_{k=1}^{n}\|\tilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2+\varepsilon\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2,$$

$$|J_8+J_9|\leq C\|R_2{}^n\|_0\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0+C\|R_3{}^n\|_0\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0\leq C\tau^4+\varepsilon\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2+\varepsilon\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2.$$

取适当小的 ε,可得

$$\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)}\leq Ch^6(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)})+$$
$$C\tau^4+C\tau^2\sum_{k=1}^{n}\|\tilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2+C\|\bar{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2+C\|\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2.\tag{44}$$

由于

$$|(\tilde{\partial}_t\nabla\xi^{n+1},\tilde{\partial}_t\nabla\xi^n)|\leq\frac{1}{2}\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2,\ |(\nabla\bar{\xi}^{n+1},\nabla\bar{\xi}^n)|\leq$$
$$\frac{1}{2}\|\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|\nabla\bar{\xi}^n\|_0^2,$$

于是有

$$\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2=\|\tilde{\partial}_t\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2=\|\tilde{\partial}_t\frac{1}{2}(\nabla\xi^{n+1}+\nabla\xi^n)\|_0^2=\frac{1}{4}(\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^{n+1}\|_0^2+\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2)+$$
$$\frac{1}{2}(\tilde{\partial}_t\nabla\xi^{n+1},\tilde{\partial}_t\nabla\xi^n)\leq\frac{1}{2}\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2,\tag{45}$$

$$\|\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}}\|_0^2=\|\frac{1}{2}(\nabla\bar{\xi}^{n+1}+\nabla\bar{\xi}^n)\|_0^2=\frac{1}{4}(\|\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2+\|\nabla\bar{\xi}^n\|_0^2)+\frac{1}{2}(\nabla\bar{\xi}^{n+1},\nabla\bar{\xi}^n)\leq$$
$$\frac{1}{2}\|\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|\nabla\bar{\xi}^n\|_0^2.\tag{46}$$

将(45)～(46)式代入到(44)式,得

$$\|\vec{\theta}^{n,\frac{1}{4}}\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)}\leq Ch^6(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)})+C\tau^4+$$
$$C\tau^2\sum_{k=1}^{n}\|\tilde{\partial}_t\xi^k\|_0^2+C\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^{n+1}\|_0^2+C\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^n\|_0^2+C\|\nabla\bar{\xi}^{n+1}\|_0^2+C\|\nabla\bar{\xi}^n\|_0^2.\tag{47}$$

综上可知,只需估计 $\|\bar{\partial}_t\nabla\xi^2\|_0^2$,$\|\nabla\bar{\xi}^2\|_0^2$ 两项.

为了得到估计结果,记

$$u^2-U^{2,0}=u^2-I_hu^2+I_hu^2-U^{2,0}\triangleq\eta^2+\xi^{2,0}.$$

则由(33)式和(34)式可得如下的误差方程

$$\begin{cases}(\mathrm{a})(\bar\partial_{tt}\nabla\xi^1,\nabla v)+(b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar\partial_t\nabla\xi^1,\nabla v)+(\nabla\xi^{1,\frac14},\nabla v)=-(\bar\partial_{tt}\nabla\eta^1,\nabla v)-((b(\tilde u^2)-\\ b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2}))\bar\partial_t\nabla u^1,\nabla v)-(b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar\partial_t\nabla\eta^1,\nabla v)-(\nabla\eta^{1,\frac14},\nabla v)+\\ (\vec r^{1,\frac14},\nabla v)+(\vec\theta^{1,\frac14},\nabla v)+(\nabla R_1{}^1,\nabla v)+(R_2{}^1,\nabla v),\\ (\mathrm{b})(\vec\theta^{1,\frac14},\vec w)+(\nabla\cdot\vec\theta^{1,\frac14},\nabla\cdot\vec w)=-(\vec r^{1,\frac14},\vec w)+((b(\tilde u^2)-b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2}))\bar\partial_t\nabla u^1,\vec w)+\\ (b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar\partial_t\nabla\eta^1,\vec w)+(b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar\partial_t\nabla\xi^1,\vec w)+(\nabla\eta^{1,\frac14},\vec w)+(\nabla\xi^{1,\frac14},\vec w)-\\ (f(\tilde u^2)-f(\frac{U^{2,0}+U^0}{2}),\nabla\cdot\vec w)-(R_2^1,\vec w)-(R_3^1,\nabla\cdot\vec w).\end{cases}\tag{48}$$

一方面,在(48a)式中,取 $v=\tilde\partial_t\bar\xi^2$, 可得

$$(\bar\partial_{tt}\nabla\xi^1,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)+(b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar\partial_t\nabla\xi^1,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)+(\nabla\xi^{1,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)=-(\bar\partial_{tt}\nabla\eta^1,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)-$$
$$((b(\tilde u^2)-b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2}))\bar\partial_t\nabla u^1,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)-(b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})\bar\partial_t\nabla\eta^1,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)-(\nabla\eta^{1,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)+$$
$$(\vec r^{1,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)+(\vec\theta^{1,\frac14},\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)+(\nabla R_1^1,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)+(R_2^1,\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2)\triangleq\sum_{i=1}^8 E_i.\tag{49}$$

(49)式的左端项类似(40)式的左端估计,下面采用时间分裂法估计其右端各项

$$|E_1|=|(\bar\partial_{tt}\nabla\eta^1,\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau})|\le Ch^6\frac1\tau\|u_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\frac18\frac{\|\nabla\bar\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar\xi^1\|_0^2}{\tau},$$

$$|E_2|\le C\|\tilde u^2-\frac{U^{2,0}+U^0}{2}\|_0\|\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau}\|_0\le Ch^6\frac1\tau\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+$$
$$C\frac1\tau\|\xi^{2,0}\|_0^2+\frac18\frac{\|\nabla\bar\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar\xi^1\|_0^2}{\tau},$$

$$|E_3|=|((b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})-\bar b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2})+\bar b(\frac{U^{2,0}+U^0}{2}))\bar\partial_t\nabla\eta^1,\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau})|\le$$
$$Ch\|\bar\partial_t\nabla\eta^1\|_0\|\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau}\|_0+Ch^3\|\bar\partial_tu^1\|_4\|\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau}\|_0\le Ch^6\frac1\tau\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+$$
$$Ch^6\frac1\tau\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\frac18\frac{\|\nabla\bar\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar\xi^1\|_0^2}{\tau},$$

$$|E_4|\le Ch^3(\|u^2\|_4+\|u^1\|_4+\|u^0\|_4)\|\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau}\|_0\le$$
$$Ch^6\frac1\tau\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\frac18\frac{\|\nabla\bar\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar\xi^1\|_0^2}{\tau},$$

$$|E_5+E_6|\le Ch^3(\|\vec p^2\|_3+\|\vec p^1\|_3+\|\vec p^0\|_3)\|\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau}\|_0+\|\vec\theta^{1,\frac14}\|_0\|\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2\|_0\le$$
$$Ch^6\frac1\tau\|\vec p\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}+\frac18\frac{\|\nabla\bar\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar\xi^1\|_0^2}{\tau}+C\|\vec\theta^{1,\frac14}\|_0^2+\frac18\|\tilde\partial_t\nabla\bar\xi^2\|_0^2,$$

$$|E_7+E_8|\le\|\nabla R_1{}^1\|_0\|\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau}\|_0+C\|R_2^1\|_0\|\frac{\nabla\bar\xi^2+\nabla\bar\xi^1}{\tau}\|_0\le$$
$$C\tau^3+\frac18\frac{\|\nabla\bar\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar\xi^1\|_0^2}{\tau}.$$

将上式代入到(49)式并两端同乘以 2τ 得

$$\|\tilde\partial_t\nabla\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar\xi^2\|_0^2\le Ch^6(\|u_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+$$

$$\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)})+C\tau^4+C\|\xi^{2,0}\|_0^2+C\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^1\|_0^2+C\|\nabla\bar{\xi}^1\|_0^2+C\tau\|\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}\|_0^2. \tag{50}$$

另一方面，在(48b)式中令 $\vec{w}=\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}$，则类似(43)式证明易知

$$\|\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)}\le Ch^6(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}+\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)})+$$
$$C\tau^4+C\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^2\|_0^2+C\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^1\|_0^2+C\|\nabla\bar{\xi}^2\|_0^2+C\|\nabla\bar{\xi}^1\|_0^2+C\|\xi^{2,0}\|_0^2. \tag{51}$$

结合(50)式和(51)式并取充分小的 τ，使 $1-C\tau>0$，可得

$$\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^2\|_0^2+\|\nabla\bar{\xi}^2\|_0^2\le Ch^6(\|u_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+$$
$$\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)})+C\tau^4+C\|\xi^{2,0}\|_0^2+C\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^1\|_0^2+C\|\nabla\bar{\xi}^1\|_0^2. \tag{52}$$

显然，定理归结为对 $\|\xi^{2,0}\|_0$，$\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^1\|$ 以及 $\|\nabla\bar{\xi}^1\|_0$ 的估计.

由(35)式和(36)式可得如下的误差方程

$$\begin{cases}
(\mathrm{a})(\dfrac{\nabla\xi^{2,0}-2\nabla\xi^1+\nabla\xi^0}{\tau^2},\nabla v)+(b(\bar{U}^1)\dfrac{\nabla\xi^{2,0}-\nabla\xi^0}{2\tau},\nabla v)+(\dfrac{\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1+\nabla\xi^0}{4},\nabla v)= \\
-(\bar{\partial}_{tt}\nabla\eta^1,\nabla v)-((b(\bar{u}^1)-b(\bar{U}^1))\bar{\partial}_t\nabla u^1,\nabla v)-(b(\bar{U}^1)\bar{\partial}_t\nabla\eta^1,\nabla v)-(\nabla\eta^{1,\frac{1}{4}},\nabla v)+ \\
(\vec{r}^{1,\frac{1}{4}},\nabla v)+(\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}},\nabla v)+(\nabla R_1^1,\nabla v)+(R_4^1,\nabla v), \\
(\mathrm{b})(\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}},\nabla\cdot\vec{w})=-(\vec{r}^{1,\frac{1}{4}},\vec{w})+((b(\bar{u}^1)-b(\bar{U}^1))\bar{\partial}_t\nabla u^1,\vec{w})+ \\
(b(\bar{U}^1)\bar{\partial}_t\nabla\eta^1,\vec{w})+(b(\bar{U}^1)\dfrac{\nabla\xi^{2,0}-\nabla\xi^0}{2\tau},\vec{w})+(\nabla\eta^{1,\frac{1}{4}},\vec{w})+(\dfrac{\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1+\nabla\xi^0}{4},\vec{w})- \\
(f(\bar{u}^1)-f(\bar{U}^1),\nabla\cdot\vec{w})-(R_4^1,\vec{w})-(R_5^1,\nabla\cdot\vec{w}).
\end{cases} \tag{53}$$

一方面，在(53a)式中，取 $v=\xi^{2,0}+2\xi^1$，并注意到 $\xi^0=0$，得

$$(\frac{\nabla\xi^{2,0}-2\nabla\xi^1}{\tau^2},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)+(b(\bar{U}^1)\frac{\nabla\xi^{2,0}}{2\tau},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)+(\frac{\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1}{4},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)=$$
$$-(\bar{\partial}_{tt}\nabla\eta^1,\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)-((b(\bar{u}^1)-b(\bar{U}^1))\bar{\partial}_t\nabla u^1,\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)-(b(\bar{U}^1)\bar{\partial}_t\nabla\eta^1,\nabla\xi^{2,0}+$$
$$2\nabla\xi^1)-(\nabla\eta^{1,\frac{1}{4}},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)+(\vec{r}^{1,\frac{1}{4}},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)+(\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}},\nabla\xi^{2,0}+$$
$$2\nabla\xi^1)+(\nabla R_1^1,\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)+(R_4^1,\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1), \tag{54}$$

(54)式的左端各项估计为

$$(\frac{\nabla\xi^{2,0}-2\nabla\xi^1}{\tau^2},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)=\frac{1}{\tau^2}(\|\nabla\xi^{2,0}\|_0^2-\|2\nabla\xi^1\|_0^2),$$
$$(b(\bar{U}^1)\frac{\nabla\xi^{2,0}}{2\tau},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)=\frac{1}{2\tau}\|b(\bar{U}^1)\nabla\xi^{2,0}\|_0^2+(b(\bar{U}^1)\frac{\nabla\xi^{2,0}}{2\tau},2\nabla\xi^1),$$
$$(\frac{\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1}{4},\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1)=\|\frac{\nabla\xi^{2,0}+2\nabla\xi^1}{2}\|_0^2.$$

注意到 $\xi^1=I_hu^1-U^1=O(\tau^3)$，$\|\tilde{\partial}_t\nabla\xi^1\|_0^2=\|\nabla\xi^1/\tau\|_0^2=O(\tau^4)$，$\|\nabla\bar{\xi}^1\|_0^2=\|\nabla\xi^1/2\|_0^2=O(\tau^3)$，则类似于(40)式的证明可得

$$\frac{1}{\tau^2}(\|\nabla\xi^{2,0}\|_0^2-\|2\nabla\xi^1\|_0^2)\le Ch^6(\|u_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+$$
$$\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)})+C\tau^2+C\|\xi^1\|_0^2+C\|\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}\|_0^2-(b(\bar{U}^1)\frac{\nabla\xi^{2,0}}{2\tau},2\nabla\xi^1)\le$$
$$Ch^6(\|u_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}+$$
$$\|\vec{p}\|^2_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)})+C\tau^2+C\|\xi^1\|_0^2+C\|\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}\|_0^2+$$
$$C\frac{1}{\tau}\|\nabla\xi^{2,0}\|_0^2+\frac{1}{\tau}\|\nabla\xi^1\|_0^2. \tag{55}$$

另一方面，在(53b)式中取 $\vec{w}=\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}$，则类似(43)式证明易知

$$\|\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2 \le Ch^6(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}^2) + C\tau^2 + C\|\nabla\xi^1\|_0^2 + C\frac{1}{\tau}\|\nabla\xi^{2,0}\|_0^2 + C\frac{1}{\tau}\|\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}\|_0^2 + C\|\nabla\xi^{2,0}\|_0^2. \tag{56}$$

结合(55)式和(56)式并取充分小的 τ,使 $1-C\tau>0$,并结合(52)式得到

$$\|\bar{\partial}_t\nabla\xi^2\|_0^2 + \|\nabla\bar{\xi}^2\|_0^2 \le Ch^6(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2 + \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;H^4(\Omega))}^2 + \|\vec{p}\|_{L^\infty(0,T;(H^3(\Omega))^2)}^2) + C\tau^4 + C\tau\|\vec{\theta}^{1,\frac{1}{4}}\|_0^2. \tag{57}$$

将(57)式,代入到(42)式,并结合(47)式,并取充分小的 τ,使 $1-C\tau^2>0$,由离散的 Gronwall 引理,可证(37)式.然后再次结合(47)式,可得(38)式.定理证毕.

接下来,利用文献[18]中的思想,利用数学归纳法验证假设 2 的正确性.

记 $\delta^n \triangleq \nabla(u^n-U^n)$.首先,当 $n=0$ 时,$\|\delta^0\|_{0,\infty}\le C_1h\le 1$,成立.

假设当 $n=k$ 时成立,即 $\|\delta^{k-1}\|_{0,\infty}<1$.由定理 3 的证明过程可得 $\|U^{k-1}-I_hu^{k-1}\|_1\le C(h^3+\tau^2)$.

则当 $n=k$ 时,需要验证 $\|\delta^k\|_{0,\infty}<1$ 成立.事实上,因为 $\|\delta^k\|_{0,\infty}$ 关于时间 t 为连续函数,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\mu>0$,使得当 $|t_{k-1}-t_k|=\tau<\mu$ 时,有 $|\,\|\delta^{k-1}\|_{0,\infty}-\|\delta^k\|_{0,\infty}|<\varepsilon$.因此,取 $\varepsilon=\tau$,则有

$$\|\delta^k\|_{0,\infty}\le\|\delta^{k-1}\|_{0,\infty}+\tau\le\|\nabla(u^{k-1}-I_hu^{k-1})\|_{0,\infty}+\|\nabla(I_hu^{k-1}-U^{k-1})\|_{0,\infty}+\tau\le Ch|u|_3+Ch^{-1}\|I_hu^{k-1}-U^{k-1}\|_1+\tau\le Ch+C(h^{-1}\tau+h^2)+\tau<1.$$

在上述证明中,需要条件 $\tau=O(h^{1+\alpha})(\alpha>0)$,因此可选取合适的 h_1 使得 $C(h_1+h_1^{\alpha})<1$,则假设 2 得证.假设成立.

注 1 在 I_2,J_2 和 J_7 这三项估计中,用到了不等式 $\|\xi^n\|_0^2=\|\xi^n-\xi^{n-1}+\cdots+\xi^1-\xi^0+\xi^0\|_0^2\le\tau^2\sum_{k=1}^n\|\frac{\xi^k-\xi^{k-1}}{\tau}\|_0^2=\tau^2\sum_{k=1}^n\|\bar{\partial}_t\xi^k\|_0^2$.这是取得超逼近性质的关键所在.

注 2 由于方程本身非线性项的限制,若采用以往二阶 Euler 全离散[11,14],而不利用本文中的线性化全离散格式无法得到定理 3 的结果.同时,值得注意的是定理 3 证明中所用的的时间分裂技巧在证明中尤为重要.

注 3 本文借助于文献[22-23]中插值及投影相结合的思想,定理 2 及定理 3 中关于 $u_t,u_{tt}\in L^\infty(0,T;H^4(\Omega))$ 的光滑度要求可以降低为 $u_t,u_{tt}\in L^\infty(0,T;H^3(\Omega))$.

参 考 文 献

[1] 尚亚东. 方程 $u_{tt}-\Delta u_{tt}-\Delta u_t-\Delta u=f(u)$ 的初边值问题[J].应用数学学报,2000,23(3):385-392.

[2] 刘洋,李宏. 四阶强阻尼波动方程的新的混合有限元方法[J].计算数学,2010,32(2):157-170.

[3] 方志朝,刘洋,李宏. 四阶强阻尼波动方程的混合控制体积法[J].计算数学,2011,33(4):409-422.

[4] 张亚东,李新祥,石东洋. 强阻尼波动方程的非协调有限元超收敛分析[J].山东大学学报(理学版),2014,49(5):28-35.

[5] 罗振东. 混合有限元方法基础及其应用[M].北京:科学出版社,2006.

[6] 陈绍春,陈红如. 二阶椭圆问题新的混合元格式[J].计算数学,2010,32(2):213-218.

[7] 石东洋,李明浩. 二阶问题一种新格式的高精度分析[J].应用数学学报,2014,37(1):45-58.

[8] 石东洋,张亚东. 抛物型方程一个新的非协调混合元超收敛性分析及外推[J].计算数学,2013,35(4):337-352.

[9] Shi D Y,Zhang Y D. High accuracy analysis of a new nonconforming mixed finite element scheme for Sobolev equation[J].Appl Math Comput,2011,218(7):3176-3186.

[10] 史艳华,石东洋. Sobolev 方程新混合元方法的高精度分析[J].系统科学与数学,2014,34(4):452-463.

[11] 毛凤梅,刁群. 强阻尼波动方程的非协调混合有限元分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(2):22-28.

[12] 刘倩,石东洋. 双相滞热传导方程的一个非协调混合有限元方法[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(2):15-21.

[13] Pani A K. An H^1-Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial differential equations[J].SIAM J Numer Anal,1998,35(2):712-727.

[14] 石东洋,唐启立,董晓靖. 强阻尼波动方程的 H^1-Galerkin 混合有限元超收敛分析[J].计算数学,2012,34(3):317-328.

[15] 刁群,石东洋,张芳. Sobolev 方程一个新的 H^1-Galerkin 混合有限元分析[J].高校应用数学学报,2016,31(2):215-224.

(下转第 32 页)

accurate basic parameters and abundances of chemical elements. The success of these above-mentioned survey projects mainly depends on the high-precision stellar parameters provided by the efficient spectral analysis technology in the shortest calculation time, from the spectral data. One can get the effective temperature, surface gravitational acceleration, metal abundance and the chemical abundance of some elements. In addition, one can use these stellar parameters to estimate the mass and radius of the stars. In addition, the accurate stellar mass and radius are of great significance for the study of exoplanets and their host stars. The comparison between two different datasets will help evaluating the quality of those data. One can also update those pipelines based on the feedback of the results.

Keywords: LAMOST; K2; sky surveys; stellar parameters

[责任编校 杨浦]

(上接第 12 页)

[16] 刁群,石东洋. 拟线性粘弹性方程一个新的 H^1-Galerkin 混合有限元分析[J].山东大学学报(理学版),2016,51(4):90-98.

[17] 刁群,郭丽娟,王俊俊. 非线性 Sobolev 方程低阶混合元方法的超收敛分析及外推[J].应用数学,2015,28(3):586-595.

[18] 石东洋,董晓靖. 非线性对流扩散方程的非协调 EQ_1^{rot} 元解的渐近展开[J].计算数学,2012,40(3):1-5.

[19] Shi D Y, Wang J J. Unconditional superconvergence analysis of a linearized Galerkin FEM for nonlinear hyperbolic equations[J]. Comput. Math Appl, 2017, 74: 634-651.

[20] Hale J K. Ordinary Differential Equations[M]. New York: Willey Inter Science, 1969.

[21] 王乐乐. 若干偏微分方程的混合有限元方法研究[D].郑州:郑州大学,2017.

[22] Shi D Y, Wang P L, Zhao Y M. Superconvergence analysis of anisotropic linear triangular finite element for nonlinear Schrödinger equation[J]. Appl Math Letters, 2014, 38: 129-134.

[23] 石东洋,王芬玲,赵艳敏. 非线性 sine-Gordon 方程的各向异性线性元高精度分析新模式[J].计算数学,2014,36(3):245-256.

A new H^1-galerkin mixed finite element analysis for nonlinear strong damped wave equations

Shi Dongyang, Mu Pengcong

(College of Mathematics and Statistics, ZhengZhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: In this paper, H^1-Galerkin mixed finite element method for a kind of nonlinear strongly damped wave equations was studied. A new mixed finite element pattern was developed with incomplete biquadratic element Q_2^- and first order BDFM element. With the help of the special properties of the interpolation operators of these two elements and mean-value technique, the superclose estimates for the primitive variable in H^1-norm and the intermediate variable in H(div)-norm were deduced respectively for the semi-discrete and the linearized fully discrete schemes, which were one order higher than the corresponding optimal error estimations in the existing literature published before.

Keywords: nonlinear strongly damped wave equations; H^1-Galerkin mixed finite element method; semi-discrete; linearized fully discrete scheme; superclose estimates

[责任编校 陈留院]