文章编号:1000-2367(2020)04-0001-06　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.04.001

具有通胀因子的平衡分位回归信度模型

程纪,王金瑞,吴黎军

(新疆大学 数学与系统科学学院,乌鲁木齐 830046)

摘　要:保险数据经常表现为尖峰或厚尾的形态,而经典的信度模型并不能有效反映分布的上尾和下尾信息,同时考虑保费的安全负荷性以及通货膨胀对未来保险期间对保额的影响.在分位数视角下用平衡损失代替均方损失,通过利用样本分位数充分利用所有数据的信息,建立了具有通货膨胀因子的分位数信度模型,扩展了经典的信度模型,为保险公司提供了一种根据实际情况选择不同的权重,制定更符合实际保费的方法.

关键词:平衡损失函数;通货膨胀;分位数;回归信度模型

中图分类号:O211　　**文献标志码:**A

信度理论起源于 20 世纪初,精算师根据过去一段时间内单个或一组风险的历史索赔数据对未来保费的风险成本进行厘定.但是,在非寿险领域具体实践应用时,单个保单的历史索赔数据太少经常会影响预测值的优良性质,在这种情况下均值定价以及聚合保费定价都不尽如人意,都将可能引起保单流失、亏本经营等问题,为处理此类费率厘定问题,经典信度理论体系应运而生.

文献[1]在统计学背景框架下,得到了信度保费的计算公式,即信度保费$=Z*$样本均值$+(1-Z)*$集体保费,其中 Z 为信度因子,且随着经验数据的增加给予个体样本数据更多的信度;文献[2]在 Bühlmann 无分布信度模型的基础上,考虑风险量的大小变动引入信度权重,得到含有信度权重的信度保费;文献[3]建立了回归信度模型,用回归技术来反映时间效应对保费的影响.随着社会生活的逐步丰富上述三大经典信度模型对费率的厘定假设条件已不再适应实际案例.一方面,Bühlmann 信度保费、Bühlmann-Straub 信度保费及回归信度保费都是在均方损失函数下求解最优化问题得到的,均方损失的特殊性使得保费不具备正的安全负荷从而给保险公司带来风险.文献[4]首次发现保费正的安全负荷性问题,为解决此类问题提议将均方损失改为广义的加权损失,创造了 Esscher 保费原理并且研究了该保费原理下的信度估计;受文献[4]的启发,文献[5]在 Esscher 损失的基础上研究了贝叶斯保费,贝叶斯估计量,信度保费以及个人保费的信度估计;文献[6]在信度模型中使用 LINEX 损失函数,类似于大多数经典的信度模型中采用的对称二次损失函数来办法来解决保费问题;文献[7]在索赔数据分布信息完全未知时,利用最大熵方法推导了信度保费的表达式.另一方面,保险实际应用中,通货膨胀带来的物价波动会对索赔数据产生趋势性影响,文献[8]从个人风险和通货膨胀因素的角度出发,研究了风险间具有特殊相依结构及时间效应的平衡信度估计,确定未来保费时考虑通货膨胀对索赔额的影响,从而得到了更接近目标的保费.

传统的信度估计是通过最小二乘回归得到的,当数据呈现异方差或鲁棒性时,信度估计对尾部数据信息的利用率较低,而分位数能够通过不同分位点的选取全面描述分布信息.文献[9]首次在风险独立性的假设下,阐述了分位数与经典 Bühlmann 信度、Hachemeister 回归信度模型之间的联系,并将分位数纳入到这两大经典的信度模型中;2017 年文献[10]将经典信度模型引入风险度量 VAR,研究了分位回归信度结构下的风险度量.鉴于保险数据出现尖峰或厚尾的形态,本文将分位数思想引入信度理论,根据实际经济生活情况对经典信度模型加以创新.考虑保费正的安全负荷性及时间效应对经济物价水平的影响,将经典回归信度模

收稿日期:2019-04-23;**修回日期:**2020-05-25.

基金项目:国家自然科学基金(11361058;11861064)

作者简介(通信作者):吴黎军(1961－),男,浙江海盐人,新疆大学教授,研究方向为保险精算,E-mail:xjmath@xju.edu.cn.

型扩展到具有通货膨胀因子的平衡分位回归信度模型,以此适应我国保险精算体系发展的内在经济规律和模型特征.

1 模型准备工作

1.1 平衡损失

文献[11]提出了一类非对称损失函数,从模型的拟合效果和估计的精确度出发,提出平衡损失函数,其形式为:

$$L(\hat{\theta},\theta)=\frac{\omega}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\theta})^2+(1-\omega)(\theta-\hat{\theta})^2, \tag{1}$$

作为(1)式的推广,如下形式的平衡损失函数:

$$L_{\rho,\omega,\delta_0}(\theta,\delta)=\omega\rho(\delta_0,\delta)+(1-\omega)\rho(\theta,\delta) \tag{2}$$

应用更为广泛,其中 δ_0 是 θ 的目标估计,如:极大似然估计、最小二乘估计.在(2)式下,文献[12]讨论了特定环境下包含共同效应的信度估计;文献[13]同时考虑风险及时间的相依关系,研究了具有双相依结构的齐次及非齐次信度估计.

1.2 分位数

身在数据时代,由均值回归得到的一条回归线所能反映的信息量是十分有限的.相对于均值而言,分位数能够挖掘更为丰富的信息量,通过度量自变量对因变量在每个特定分位数的边际影响,使得分位数回归能够有效刻画数据分布的尾部特征.下面给出本文研究过程中涉及的相关定义.

定义 1 对任意 $p\in(0,1)$,ξ 为概率空间(Ω,Γ,P)上的随机变量,令

$$\xi_p=F^{-1}(p)=\inf\{x:F(x)\geq p\}.$$

为 ξ 的 p-分位数.

定义 2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为概率空间(Ω,Γ,P)上的样本,容量为 n,将 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 按照大小排序为 $X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq\cdots\leq X_{(n)}$,则$(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$称为次序统计量.

定义 3 设 $F_n(x)$ 为样本$\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的经验分布函数,则样本 P-分位数可定义为:

$$\hat{\xi}_p=n\left(\frac{j}{n}-p\right)X_{(j-1)}+n\left(p-\frac{j-1}{n}\right)X_{(j)},$$

其中 $\frac{j-1}{n}\leq p\leq\frac{j}{n}$,$j=1,2,\cdots,n$.

1.3 信度估计-正交投影

信度估计通过求解样本线性函数类 $L(1,X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 在均方损失下的最优化问题,得到最优估计,若把 $L(X,1)=(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\mid c_0,c_i\in\mathbf{R})$ 看成一个线性空间,文献[14]把 X_{n+1} 的信度估计看作 X_{n+1} 在 $L(X,1)$ 上的正交投影.设 Γ 是 L^2 的闭子集,称 Y^* 是 $Y\in L^2$ 在 Γ 上的正交投影,记为 $Y^*=pro(Y\mid\Gamma)$.

Bühlmann 将信度估计限定在 $L(X,1)=(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\mid c_0,c_i\in\mathbf{R})$ 中,得到信度估计

$$\hat{X}_{n+1}=pro(X_{n+1}\mid L(X,1)).$$

本文利用正交投影的方法得到信度估计,下面给出相关引理,证明参见文献[12].

引理 1 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$,$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)'$ 为两个随机向量,若用 X 的线性组合

$$L(X,1)=\left\{A+BX:A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)'\in\mathbf{R}^m,B=\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1n}\\\vdots&&\vdots\\B_{m1}&\cdots&B_{mn}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{m\times n}\right\}$$

来预测 Y,则使

$$\min_{A\in\mathbf{R}^m,B\in\mathbf{R}^{m\times n}}E[(Y-A-BX)(Y-A-BX)']$$

达到最小化的最优解为

$$A=E[Y]-\mathrm{Cov}(Y,X)\mathrm{Cov}^{-1}(X,X)E(X);B=\mathrm{Cov}(Y,X)\mathrm{Cov}^{-1}(X,X).$$

即 Y 的最优线性估计为

$$\hat{Y}=E[Y]+\mathrm{Cov}(Y,X)\mathrm{Cov}^{-1}(X,X)[X-E(X)].$$

2 具有通胀因子的单合同平衡分位回归信度模型

考虑一份保单有 n 年的历史索赔,$i=1,2,\cdots,n$,则样本为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$,风险由风险参数 $\theta\in\Theta$ 进行描述,$Q_p(Y\mid X=x)=\inf\{y:F(y\mid x)\geq p\}$,$(0<p<1)$ 为给定 $X=x$ 时 Y 的条件 P 分位数,记 $\xi_{Y|X}(p)=Q_p(Y\mid X=x)=X'\beta_p$ 为样本分位数.本节用平衡损失替代均方损失,考虑满足如下假设条件的具有通胀因子的单合同分位回归信度模型.

2.1 模型假设与准备

假设 1 在给定参数 Θ 下,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 之间相互独立,且 $E[\xi_{Y_i|X_i}(p)\mid\Theta]=\tau^iX\beta_p(\Theta)$,$\mathrm{Cov}[\xi_{Y_i|X_i}(p)\mid\Theta]=\tau^{2i}\sigma^2(\Theta)V$,$i=1,2,\cdots,n+1$,其中 $\tau=(1+\gamma)^{-1}$,γ 为通货膨胀率.

假设 2 该保单有一个目标估计 $\delta_P(\Theta)$,且 $E[\delta_P(\Theta)]=E[\beta_P(\Theta)]=\beta_p$,$\mathrm{Cov}[\delta_P(\Theta),\xi_{Y_i|X_i}(p)]=\tau^id$,$i=1,2,\cdots,n+1$,$d$ 为常数.

同时,引入下列记号:

$$A_P=\mathrm{Cov}[\beta_P(\Theta)],X^2=E[\sigma^2(\Theta)].$$

在实际应用中,通常不知道样本 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的分布,通过选取不同样本分位点将其限定在下述最小化问题中求解第 $n+1$ 年的最优保费:

$$\min_{c_0,c_i}E[\omega(\delta_P(\Theta)-c_0-\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_{Y_i|X_i}(p))^2+(1-\omega)(\beta_P(\Theta)-c_0-\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_{Y_i|X_i}(p))^2].\tag{3}$$

其中,$\delta_P(\Theta)$ 为 $\beta_P(\Theta)$ 的目标估计.

2.2 定理及证明

定理 1 在假设 1 和假设 2 的条件下,求解最小化问题(3)可得 $\beta_P(\Theta)$的最优线性估计为

$$B_P^{\mathrm{cred}}=\beta_P+Z_p[\xi_{Y|X}(p)-E(\xi_{Y|X}(p))],$$

式中:$Z_p=(\omega\tau^id+(1-\omega)\tau^iA_PX')\Omega^{-1}$ 为信度因子,$\Omega^{-1}=(\tau^{2i}XA_pX'+\tau^{2i}S^2V)^{-1}$.

证明 由引理 1 信度估计与正交投影的关系可得:

$$\min_{c_0,c_i}E[\omega(\delta_P(\Theta)-c_0-\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_{Y_i|X_i}(p))^2+(1-\omega)(\beta_P(\Theta)-c_0-\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_{Y_i|X_i}(p))^2]\Leftrightarrow$$

$$B_p^{\mathrm{Cred}}=\omega pro[\delta_P(\Theta)\mid L(\xi_{Y_i|X_i}(p),1)]+(1-\omega)pro[\beta_P(\Theta)\mid L(\xi_{Y_i|X_i}(p),1)].\tag{4}$$

对(4)式分项计算:

$$\begin{aligned}&pro[\delta_P(\Theta)\mid L(\xi_{Y_i|X_i}(p),1)]=E[\delta_P(\Theta)]+\mathrm{Cov}[\delta_P(\Theta),\xi_{Y_i|X_i}(p)]\mathrm{Cov}^{-1}[\xi_{Y_i|X_i}(p),\xi_{Y_i|X_i}(p)]\cdot\\&[\xi_{Y_i|X_i}(p)-E(\xi_{Y_i|X_i}(p))]=\beta_P+\tau^id(\tau^{2i}XA_pX'+\tau^{2i}S^2V)^{-1}[\xi_{Y_i|X_i}(p)-E(\xi_{Y_i|X_i}(p))].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&pro[\beta_P(\Theta)\mid L(\xi_{Y_i|X_i}(p),1)]=E[\beta_P(\Theta)]+\mathrm{Cov}[\beta_P(\Theta),\xi_{Y_i|X_i}(p)]\mathrm{Cov}^{-1}[\xi_{Y_i|X_i}(p),\xi_{Y_i|X_i}(p)]\cdot\\&[\xi_{Y_i|X_i}(p)-E(\xi_{Y_i|X_i}(p))]=\beta_P+\tau^iA_pX'(\tau^{2i}XA_pX'+\tau^{2i}S^2V)^{-1}[\xi_{Y_i|X_i}(p)-E(\xi_{Y_i|X_i}(p))].\end{aligned}$$

则有:

$$\begin{aligned}B_p^{\mathrm{Cred}}&=\omega pro[\delta_P(\Theta)\mid L(\xi_{Y_i|X_i}(p),1)]+(1-\omega)pro[\beta_P(\Theta)\mid L(\xi_{Y_i|X_i}(p),1)]=(\omega+1-\omega)\beta_P+\\&(\omega\tau^id+(1-\omega)\tau^iA_pX')\Omega^{-1}[\xi_{Y_i|X_i}(p)-E(\xi_{Y_i|X_i}(p))]=\beta_P+Z_p[\xi_{Y|X}(p)-E(\xi_{Y|X}(p))].\end{aligned}$$

综上,定理 1 得证.

注 1 当 $\omega=0,\tau=1$ 时,则 $Z_p=A_PX'(XA_pX'+S^2V)^{-1}$,由定理 1 得到的保费估计为文献[10]提出的 CrRVaR,即分位回归信度估计.

注 2 当参数 β 的维数为 1,且 $\omega=0,\tau=1,A_p=na,S^2=v,V=I_n,X=1_n$,则 $p=50\%$ 时,信度因子

$Z_p=\dfrac{na}{na+v}$,$\hat{\beta}_{GLS}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\bar{Y}$.由定理 1 得到的保费估计为 $\beta_p^{\text{cred}}=\dfrac{na}{na+v}\bar{Y}+\dfrac{v}{na+v}\beta_p$ 即经典 Bühlmann 信度估计.

3 具有通胀因子的多合同平衡分位回归信度模型

本节进一步将具有通胀因子的单合同分位回归信度模型扩展到多合同情形下,考虑 K 份保单,每份保单有 n_i 年的索赔,$j=1,2,\cdots,K$;$i=1,2,\cdots,n_i$,则样本为 $Y_{11},Y_{12},\cdots,Y_{K1},\cdots,Y_{Kn_i}$,第 j 个保单的风险由风险参数 Θ_j 进行描述,记 $\xi_{Y_j|X_j}(p)=[\xi_{y_{j1}|x_{j1}}(p),\xi_{y_{j2}|x_{j2}}(p),\cdots,\xi_{y_{jn_i}|x_{jn_i}}(p)]'=X'_j\beta_{pj}$ 为给定风险参数 Θ_j 时的样本分位数,其中 $\hat{\beta}_{pj}=(X'_jX_j)^{-1}X'_j\hat{\xi}_{Y_j|X_j}(p)$ 为 β_{pj} 的广义最小二乘估计.

3.1 模型假设与准备

假设 3 对保单 j,$j=1,2,\cdots,K$,给定风险参数 Θ_j,则 $Y_{j1},Y_{j2},\cdots,Y_{jn_i}$ 之间相互独立,且 $E[\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p)|\Theta_j]=\tau^iX_j\beta_p(\Theta_j)$,$\mathrm{Cov}[\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p)\mid\Theta_j]=\tau^{2i}\sigma^2(\Theta_j)V_j$,其中,$i=1,2,\cdots,n_i+1$,$\tau=(1+\gamma)^{-1}$,$\gamma$ 为通货膨胀率.

假设 4 第 j 份保单有一个目标估计 $\delta_P(\Theta_j)$,且 $E[\delta_P(\Theta_j)]=E[\beta_P(\Theta_j)]=\beta_{Pj}$,$\mathrm{Cov}[\delta_P(\Theta_j),\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p)]=\tau^id^*$,$i=1,2,\cdots,n_i+1$,$d^*$ 为常数.

同时,引入下列记号:

$$A_{Pj}=\mathrm{Cov}[\beta_P(\Theta_j)],S_{pj}^2=E[\sigma^2(\Theta_j)].$$

同理,将第 $n+1$ 年的保费估计限定在样本分位数 $\xi_{Y_j|X_j}(p)$ 的线性组合中求解下述问题:

$$\min_{a_0,a_{ij}}E[\omega(\delta_P(\Theta_j)-a_0-\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_i}a_{ij}\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p))^2+$$
$$(1-\omega)(\beta_P(\Theta_j)-a_0-\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_i}a_{ij}\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p)^2]. \tag{5}$$

3.2 定理及证明

定理 2 在假设 3 和假设 4 条件下,求解最小化问题(5)可得 $\beta_P(\Theta)$的最优线性信度估计为

$$B_{Pj}^{\text{cred}}=Z_{pj}\hat{\beta}_{Pj}+(I-Z_{pj})\beta_{Pj}.$$

式中,$Z_{pj}=(\omega\tau^id^*+(1-\omega)\tau^iA_{Pj}X'_j)\Omega^{-1}X_j$ 为信度因子,且 $\Omega^{-1}=(\tau^{2i}X_jA_{pj}X'_j+\tau^{2i}S_{pj}^2V_j)^{-1}$.

证明 利用正交投影可得:

$$\min_{a_0,a_{ij}}E[\omega(\delta_P(\Theta_j)-a_0-\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_i}a_{ij}\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p))^2+$$
$$(1-\omega)(\beta_P(\Theta_j)-a_0-\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_i}a_{ij}\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p))^2]\Leftrightarrow$$
$$B_{pj}^{\text{Cred}}=\omega pro[\delta_P(\Theta_j)\mid L(\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p),1)]+(1-\omega)pro[\beta_P(\Theta_j)\mid L(\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p),1)]. \tag{6}$$

对(6)式分项计算:

$$pro[\delta_P(\Theta_j)\mid L(\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p),1)]=E[\delta_P(\Theta_j)]+\mathrm{Cov}[\delta_P(\Theta_j),\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p)]\mathrm{Cov}^{-1}[\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p),\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p)]\cdot$$
$$[\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p)-E(\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p))]=\beta_{Pj}+\tau^id^*(\tau^{2i}X_jA_{pj}X'_j+\tau^{2i}S_{pj}^2V_j)^{-1}[X_j\hat{\beta}_{Pj}-\tau^iX_j\beta_{Pj}]=$$
$$\tau^id^*\Omega^{-1}X_j\hat{\beta}_{Pj}+(I-\tau^id^*\Omega^{-1}\tau^iX_j)\beta_{Pj}.pro[\beta_P(\Theta_j)\mid L(\xi_{Y_{ij}|X_{ij}}(p),1)]=$$
$$\beta_{Pj}+\tau^iA_{pj}X'_j(\tau^{2i}X_jA_{pj}X'_j+\tau^{2i}S_{pj}^2V_j)^{-1}[X_j\hat{\beta}_{Pj}-\tau^iX_j\beta_{Pj}]=$$
$$\tau^iA_{pj}X'_J\Omega^{-1}X_j\hat{\beta}_{Pj}+(I-\tau^iA_{pj}X'_j\Omega^{-1}\tau^iX_j)\beta_{Pj}.$$

则有:

$$B_p^{\text{Cred}}=(\omega\tau^id^*+(1-\omega)\tau^iA_{pj}X'_j)\Omega^{-1}X_j\hat{\beta}_{Pj}+[I-[(\omega\tau^id^*+$$

$$(1-\omega)\tau^i A_{pj}X'_j)\Omega^{-1}X_j]\beta_{Pj}]=Z_{pj}\hat{\beta}_{Pj}+(I-Z_{pj})\beta_{Pj}.$$

综上,定理 2 得证.

4　参数估计

在多合同模型中,可以得到参数 A_{Pj},S^2_{pj} 的无偏估计.

命题 1　S^2_{pj} 的无偏估计为

$$\hat{S}^2_{pj}=\frac{1}{N-K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_i}[\xi_{y_{ij}|x_{ij}}(p)-\bar{\xi}_{Y_j|X_j}(p)][(\xi_{y_{ij}|x_{ij}}(p)-\bar{\xi}_{Y_j|X_j}(p))]',$$

其中,$\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n_i}\xi_{y_{ij}|x_{ij}}(p)$,$N=\sum_{i=1}^{K}n_i$.

证明　$E[(\xi_{y_{ij}|x_{ij}}(p)-\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p))(\xi_{y_{ij}|x_{ij}}(p)-\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p))']=S^2_{pj}+\frac{S^2_{pj}}{n_i}-2\frac{S^2_{pj}}{n_i}=\frac{n_i-1}{n_i}S^2_{pj}$. 则

$$E[\hat{S}^2_{pj}]=\frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{K}(\sum_{i}^{n_i}\frac{n_i-1}{n_i}S^2_{pj})=\frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{K}(n_i-1)S^2_{pj}=S^2_{pj}.$$

命题 2　A_{pj} 的无偏估计为

$$\hat{A}_{pj}=\frac{N}{N^2-\sum_{j=1}^{K}n_i^2}[\sum_{j=1}^{K}n_i[(\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)-\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p))(\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)-\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p))']-(K-1)\hat{S}^2_{pj}],$$

其中,$\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n_i}\xi_{y_{ij}|x_{ij}}(p)$,$\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K}n_i\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)$,$N=\sum_{i=1}^{K}n_i$.

证明

$$\mathrm{Var}[\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)]=\frac{S^2_{pj}}{n_i}+A_{pj},\mathrm{Var}[\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p)]=\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{K}n_i^2[\frac{S^2_{pj}}{n_i}+A_{pj}]=\frac{S^2_{pj}}{N}+\frac{\sum_{j=1}^{K}n_i^2}{N^2}A_{pj},$$

$$\mathrm{Cov}[\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p),\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p)]=\frac{n_i}{N}[\frac{S^2_{pj}}{n_i}+A_{pj}]=\frac{1}{N}S^2_{pj}+\frac{n_i}{N}A_{pj}.$$

则

$$\sum_{j=1}^{K}n_i[(\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)-\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p))(\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)-\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p))']=\sum_{j=1}^{K}n_i[\mathrm{Var}(\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p)+$$

$$\mathrm{Var}(\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p))-2\mathrm{Cov}(\bar{\xi}_{y_j|x_j}(p),\bar{\bar{\xi}}_{y|x}(p)))]=(K-1)S^2_{pj}+(N-\frac{\sum_{j=1}^{K}n_i^2}{N})A_{pj}.$$

即 $E[\hat{A}_{pj}]=\frac{N}{N^2-\sum_{j=1}^{K}n_i^2}[(K-1)S^2_{pj}+(N-\frac{\sum_{j=1}^{K}n_i^2}{N})A_{pj}-(K-1)S^2_{pj}]=A_{pj}$.

5　小　结

本文将分位数引入信度理论,克服经典信度模型只有一条回归线的弊端,自由选择分位点,充分利用数据尾部所反映的信息,利用平衡损失保证信度估计具有安全负荷,以通货膨胀因子反映通货膨胀对保额的影响,在分位数的背景下建立具有通胀因子的单合同及多合同分位回归信度模型.保险公司通过实际问题选取相应的权重,从而制订更与实际相符的保费,取特定值 $\omega=0$,$\tau=1$,$A_p=na$,$S^2=v$,$V=I_n$,$X=1_n$,$p=50\%$ 时,即为经典信度模型,且文献[10]提出的 CrRVaR($\omega=0$,$\tau=1$)为本文模型的特例.

参 考 文 献

[1] BüHLMANN H.Experience rating and credibility[J].Astin Bulletin,1967,5(2):199-207.

[2] BüHLMANN H,STRAU E.Glaubwürdigkeit für schadensätze[J].Bulletin of the Swiss Association of Actuaries,1970,70(1):111-133.

[3] HACHEMEISTER C A.Credibility for regression models with application to trend[M].New York:Credibility,1975.

[4] GERBER H U.Credibility for Esscher premiums[J].Mitt.verein.schweiz.versicherungsmath,1980(3):307-312.

[5] WANG W,WEN L M,ZHANG Y.Comparisons among credibility estimators under Esscher premium principle[J].Journal of East China Normal University,2010(3):126-133.

[6] WEN L M,ZHANG X K,et al.The Credibility Models under LINEX Loss Functions[J].Chinese Quarterly Journal of Mathematics,2012,27(3):397-402.

[7] 胡莹莹,吴黎军,孙毅.最大熵方法下的纯稳健信度估计[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(1):15-20.
HU Y Y,WU L J,SUN Y.Estimation of pure robust reliability with maximum entropy method[J].Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition),2016,44(1):15-20.

[8] ZHANG Q,WU L J,CUI Q Q.The balanced credibility estimators with correlation risk and inflation factor[J].Statistical Papers,2015,58(3):1-14.

[9] PITSELIS G.Quantile credibility models[J].Insurance Mathematics & Economics,2013,52(3):477-489.

[10] PITSELIS G.Risk measures in a quantile regression credibility framework with Fama/French data applications[J].Insurance Mathematics & Economics,2017,74:122-134.

[11] RODRIGUES J,ZELLNER A.Weighted balanced loss function and estimation of the mean time to failure[J].Communications in Statistics,1994,23(12):8.

[12] WEN L M,WU X Y,ZHOU X.The credibility premiums for models with dependence induced by common effects[J].Insurance Mathematics & Economics,2009,44(1):19-25.

[13] ZHANG Q,CHEN P.Credibility estimators with dependence structure over risks and time under balanced loss function[J].Statistica Neerlandica,2018,72(2):157-173.

[14] VIJLDER F D.Geometrical Credibility[J].Scandinavian Actuarial Journal,1976,1976(3):121-149.

Balanced quantile regression credibility models with inflation factor

Cheng Ji,Wang Jinrui,Wu Lijun

(College of Mathematics and System Sciences,Xinjiang University,Urumqi 830046,China)

Abstract: Insurance data often appear as spikes or thick tails, but the classical reliability model does not effectively reflect the distribution of upper and lower-end information. Consider the safety load of premiums and the impact of inflation on the amount of coverage for future insurance periods. From the quantile perspective, the mean square loss is replaced by the balanced loss, by using the sample quantile to make full use of the information of all data, a quantile reliability model with inflation factor is established. Moreover, it extends the classical reliability model and provides insurance companies with different weights according to the actual situation. Finally, a more realistic premium approach can be developed.

Keywords: balance loss function; inflation; quantile; regression credibility model

[责任编校 陈留院 赵晓华]