文章编号:1000-2367(2016)06-0015-09 **DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.06.003

高阶色散方程的柯西问题

蒋敏杰,刘利敏

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:主要研究了高阶色散方程 $u_t+\partial_x^{2j+1}u=\partial_x^{j+1}(u^2)+\partial_x^{j-1}(u_x^2)$, $j\geq 2$, $j\in\mathbf{N}$, $x,t\in\mathbf{R}$ 的柯西问题. 使用修正傅里叶限制范数方法和 Strichartz 估计以及修正 Bourgain 空间,证明了这个问题在修正的 Sobolev 空间 $H^{(s,\frac{1}{2j})}$ $\left(s>-\frac{j}{2}+\frac{3}{4}\right)$ 上是局部适定的. 使用迭代技巧,也证明了这个问题在 $H^{(s,w)}$ $(0<w<\frac{1}{2j})$ 中,对于任意的 $s\in\mathbf{R}$,流映射不是 C^2 的.

关键词:柯西问题;局部适定;修正的 Sobolev 空间

中图分类号:O175.5 **文献标志码**:A

本文主要研究以下高阶色散方程的柯西问题

$$u_t+\partial_x^{2j+1}u=\partial_x^{j+1}(u^2)+\partial_x^{j-1}(u_x^2),j\geq 2,\ j\in\mathbf{N},x,t\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x). \tag{2}$$

(1)、(2) 式是下面的一种特殊的情况

$$u_t+\partial_x^{2j+1}u+P(u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^{2j}u)=0,j\in\mathbf{N},\ x,t\in\mathbf{R}, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{4}$$

其中 $P:\mathbf{R}^{2j+1}\to\mathbf{R}$ (或者 $P:C^{2j+1}\to C$) 是一种没有常数或线性项的多项式,并且

$$u_t+\partial_x^{2j+1}u=\sum_{0\leq j_1+j_2\leq 2j}a_{j_1,j_2}\partial_x^{j_1}u\partial_x^{j_2}u,\quad j\in\mathbf{N},\ x,t\in\mathbf{R}, \tag{5}$$

$$u(x,0)=u_0(x). \tag{6}$$

在规范变换的帮助下,文献[1]已经证明了(3) ~ (4) 式在一些加权 Sobolev 空间中对于一些小初值是适定的. 当 $s>-\frac{1}{4}$ 时文献[2]证明了(1)、(2) 式在 $j=2$ 时在修正的 Sobolev 空间 $H^{(s,\frac{1}{4})}$ 中是适定的. 文献[3]已经研究了(5)、(6) 式在 Besov 中的适定性并且证明了(5)、(6) 式在空间 $H^k(\mathbf{R})\cap H^{k-2j}(\mathbf{R};x^2\mathrm{d}x)$, $k>2j+\frac{1}{4}$ 中对于小初值是适定的. 文献[3]也证明了 $a_{0,k}\neq 0$ 时 $k>j$ 的情况下的一些不适定结果,在 $H^s(\mathbf{R})$ 中,对于任意的 $s\in\mathbf{R}$,(5)、(6) 式的流映射不是 C^2 的. 最近,文献[4]考虑在修正的 Sobolev 空间中

$$u_t-\partial_x^5u+c_1\partial_x(u^3)+c_2\partial_x(u_x^2)+c_3\partial_x(uu_{xx})=0, \tag{7}$$

对于 $c_j\in\mathbf{R}$, $j=1,2,3$ 并且 $c_3\neq 0$ 的柯西问题. 最近文献[5-6]借助短时间 $X^{s,b}$ 空间研究了(7) 式在 Sobolev 空间下的柯西问题.

受文献[2,7-9]的启发,本文证明了(1)、(2) 式在修正的 Sobolev 空间 $H^{(s,\frac{1}{2j})}$ 中,对于任意的 $s>-\frac{j}{2}+\frac{3}{4}$ 是局部适定的. 也证明了(1)、(2) 式在 $H^{(s,w)}$ 中,当 $0<w<\frac{1}{2j}$ 时,对于任意的 $s\in\mathbf{R}$,流映射不是 C^2 的.

收稿日期:2016-04-08;**修回日期**:2016-09-22.

基金项目:国家自然科学基金(11401180);河南省软科学项目(142400410424).

第 1 作者简介(通信作者):蒋敏杰(1992-),女,河南开封人,河南师范大学硕士研究生,主要从事偏微分方程的研究工作,E-mail:1764915956@qq.com.

在陈述一些主要结论之前，首先介绍一些符号和定义. 用 $X\sim Y$ 表示 $A_1|X|\leq|Y|\leq A_2|X|$，这里 $A_j>0(j=1,2)$，用 $|X|>C|Y|$ 表示 $X\gg Y$，这里 C 是一个大于 2 的正整数. 对于任意的 $\xi\in\mathbf{R}$，$\langle\xi\rangle^s=(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}$，$\mathscr{F}u$ 表示对 u 的所有变量的傅里叶变换. $\mathscr{F}_u^{-1}$ 表示对 u 的所有变量的傅里叶逆变换. $\mathscr{F}_x^u$ 表示对 u 的空间变量的傅里叶变换. $\mathscr{F}_x^{-1}u$ 表示对 u 的空间变量的傅里叶逆变换. 速降函数是 Schwartz 空间，缓增空间是它的对偶空间. $H^{(s,w)}(\mathbf{R})$ 是修正的 Sobolev 空间并且 $\|f\|_{H^{(s,w)}(\mathbf{R})}\triangleq\|\langle\xi\rangle^{s+w}|\xi|^{-w}\mathscr{F}_xf\|_{L_\xi^2(\mathbf{R})}$. 在本文中，总是假定 ψ 是一个光滑函数，$\psi_\delta(t)=\psi(\frac{t}{\delta})$，满足 $0\leq\psi\leq 1.\psi=1$，当 $t\in[0,1]$，$\mathrm{supp}\psi\subset[-1,2]$ 并且 $\sigma=\tau+(-1)^j\xi^{2j+1}$，$\sigma_k=\tau_k+(-1)^j\xi_k^{2j+1}(k=1,2)$，

$$W(t)u_0=\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{i(x\xi+t(-1)^j\xi^{2j+1})}\mathscr{F}_xu_0(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$\|f\|_{L_t^qL_x^p}=\left(\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}}|f(x,t)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},\ \|f\|_{L_t^pL_x^p}=\|f\|L_{xt}^p.$$

对于任意的 $s,b\in\mathbf{R}$，$X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 是具有相函数 $\emptyset(\xi)=(-1)^j\xi^{2j+1}$ 的 Bourgain 空间. 即缓增空间中的函数 $u(x,t)$ 属于 $X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 当且仅当

$$\|u\|_{X_{s,w,b}(\mathbf{R}^2)}\triangleq\|\langle\xi\rangle^{s-2jw}|\xi|^{-w}\langle|\tau|+|\xi|^{2j+1}\rangle^w\langle\sigma\rangle^b\mathscr{F}u(\xi,\tau)\|_{L_{\tau\xi}^2(\mathbf{R}^2)}<\infty.$$

对于任意给定的区间 L，$X_{s,b}(\mathbf{R}\times L)$ 是 $X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 对所有函数在 $\mathbf{R}\times L$ 上的限制，对于 $u\in X_{s,b}(\mathbf{R}\times L)$，满足

$$\|u\|_{X_{s,w,b}(\mathbf{R}\times L)}=\inf\{\|U\|_{X_{s,w,b}(\mathbf{R}^2)};U|_{\mathbf{R}\times L}=u\}.$$

当 $L=[0,T]$ 时，$X_{s,w,b}(\mathbf{R}\times L)$ 可以缩写为 $X_{s,w,b}^T$. $C=C(j)$ 一直在变化并且 C 依赖于 j. 在本文中，假定 $0<\epsilon<\frac{1}{16j}$.

下面是本文的主要结论.

定理 1 在(1)式中令 $j\geq 2$，$j\in\mathbf{N}$，$u_0(x)\in H^{(s,\frac{1}{2j})}(\mathbf{R})$ 且 $s>-\frac{j}{2}+\frac{3}{4}$. 那么柯西问题(1)是局部适定的.

注 1 方程(1)包含 $u\partial_x^{j+1}u$，从文献[3]中知道在某种意义下(1)、(2)式是不适定的，(1)、(2)式的流映射在 $H^s(\mathbf{R})$ 中对于 $s\in\mathbf{R}$ 不是 C^2 的.

定理 2 在(1)式中令 $j\geq 2$，$j\in N$，并且(1)式的柯西问题在 $H^{(s,w)}(\mathbf{R})$ 中对于 $0<w<\frac{1}{2j}$，$s\in\mathbf{R}$ 是适定的. 那么流映射不是 C^2 的.

注 2 定理 2 意味着在定理 1 中的低频条件分别最佳优化了(1)、(2)式的流映射的解析性.

1 预备知识

在这一节将为证明双线性估计做一些准备.

引理 1 令 $b>\frac{1}{2}$，那么

$$\|u\|_{L_{xt}^4}\leq C\|u\|_{X_{0,\frac{(j+1)b}{2j+1}}},\tag{8}$$

$$\|D_x^{\frac{2j-1}{4}}u\|_{L_t^4L_x^\infty}\leq C\|u\|_{X_{0,b}},\tag{9}$$

$$\|u\|_{L_t^4L_x^2}\leq C\|u\|_{X_{0,\frac{1}{2}b}},\tag{10}$$

$$\|u\|_{X_{0,-\frac{1}{2}b}}\leq C\|u\|_{L_t^{\frac{4}{3}}L_x^2},\tag{11}$$

$$\|D_x^{\frac{2j-1}{8}}u\|_{L_{xt}^4}\leq C\|u\|_{X_{0,\frac{3}{4}b}}.\tag{12}$$

证明 对于引理 1 中对(8)～(11)式的证明，读者可以参考文献[11]中引理 2.1. 结合文献[11]中(2.7)和一个标准的证明，有

$$\|D_x^{\frac{2j-1}{6}}u\|_{L_{xt}^6}\leq C\|u\|_{X_{0,b}}.$$

内插上述不等式和 $\| u \|_{L^2_{xt}} = C \| u \|_{X_{0,0}}$ 得到(12) 式.

已经完成了引理 1 的证明.

引理 2　令 $b = \frac{1}{2} + \epsilon$，那么

$$\| I^{\frac{1}{2}}(u_1, u_2) \|_{L^2_{xt}} \leq C \prod_{K=1}^{2} \| u_k \| X_{0,b}, \tag{13}$$

其中

$$\mathscr{F} I^{\frac{1}{2}}(u_1, u_2)(\xi, \tau) = \int_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \tau = \tau_1 + \tau_2}} | \xi_1^{2j} - \xi_2^{2j} |^{\frac{1}{2}} \mathscr{F} u_1(\xi_1, \tau_1) \mathscr{F} u_2(\xi_2, \tau_2) \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\tau_1.$$

对于引理 2 的证明，参见文献[11] 中引理 3. 1.

引理 3　对于任意的 $0 < \delta < \frac{1}{2}, 0 < w \leq \frac{1}{2}$ 和 $s \in \mathbf{R}$，当 $b > 0$ 时，有

$$\| \psi_\delta(t) W(t) u_0 \|_{X_{s,w,b}} \leq C\delta^{\frac{1}{2} - b - w} \| u_0 \|_{H^{(s,w)}}. \tag{14}$$

对于 $-\frac{1}{2} < b' \leq 0 \leq b' + 1$ 和 $b' + w \leq 0$，有

$$\| \psi_\delta(t) \int_0^t W(t - \tau) u \mathrm{d}\tau \|_{X_{s,w,b'}} \leq C\delta^{1 + b' - b} \| u \|_{X_{s,w,b}}. \tag{15}$$

对于引理 3 的证明，参见文献[2] 中的引理 2. 4.

引理 4　令 $j \in \mathbf{N}^+, \xi = \xi_1 + \xi_2$，那么

$$| \xi^{2j+1} - \xi_1{}^{2j+1} - \xi_2{}^{2j+1} | \sim | \xi_{\min} | | \xi_{\max} |^{2j}, \tag{16}$$

这里 $| \xi_{\min} | := \min\{ | \xi |, | \xi_1 |, | \xi_2 | \}$，$| \xi_{\max} | := \max\{ | \xi |, | \xi_1 |, | \xi_2 | \}$.

对于引理 4 的证明，可以参考文献[12].

注 3　从引理 4，可以得出，存在 $C > 0$ 使得

$$3\max\{ | \sigma |, | \sigma_1 |, | \sigma_2 | \} \geq | \sigma - \sigma_1 - \sigma_2 | = C | < | \xi_{\min} | | \xi_{\max} |^{2j}. \tag{17}$$

2　双线性估计

在这一节中，将建立两个重要的双线性估计.

引理 5　令 $s \geq s_0 = -\frac{j}{2} + \frac{3}{4} + (2j+1)\epsilon$，$b = \frac{1}{2} + \epsilon, j \in \mathbf{N}^+, j \geq 2$，$b' = -\frac{1}{2} + 2\epsilon$，那么

$$\| \partial_x^{j+1} \prod_{k=1}^{2} (u_k) \|_{X_{s,\frac{1}{2j},b'}} \leq C \prod_{k=1}^{2} \| u_k \|_{X_{s,\frac{1}{2j},b'}}. \tag{18}$$

定义

$$F_k(\xi_k, \tau_k) = \langle \xi \rangle^s \langle \sigma_k \rangle^b \mathscr{F} u_k(\xi_k, \tau_k),\ k = 1,2, F(\xi, \tau) = \langle \xi \rangle^{-s} \langle \sigma \rangle^b \mathscr{F} u(\xi, \tau),$$
$$\sigma = \tau + (-1)^j \xi^{2j+1}, \sigma_k = \tau_k + (-1)^j | \xi |^{2j+1}, \lambda = | \tau | + | \xi |^{2j+1},$$
$$\lambda_k = | \tau_k | + | \xi_k |^{2j+1},\ k = 1,2.$$

为了证明(18) 式，需要证明如下的不等式

$$\int_{\mathbf{R}^2} \int_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \tau = \tau_1 + \tau_2}} K_1(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) | F | \prod_{k=1}^{2} | F_k | \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \leq$$
$$C \| F \|_{L^2_{\xi\tau}} [\| F_1 \|_{L^2_{\xi\tau}} \| \langle \xi \rangle^{s - s_0} F_2 \|_{L^2_{\xi\tau}} + \| \langle \xi \rangle^{s - s_0} F_1 \|_{L^2_{\xi\tau}} \| F_2 \|_{L^2_{\xi\tau}}], \tag{19}$$

这里

$$K_1(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) = \frac{| \xi |^{j+1-\frac{1}{2j}} (\prod_{k=1}^{2} | \xi_k |^{\frac{1}{2j}}) \langle \sigma \rangle^{b'} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}} \langle \xi \rangle^{s-1}}{\prod_{k=1}^{2} \langle \xi_k \rangle^{s-1} \langle \sigma_k \rangle^b \langle \lambda_k \rangle^{\frac{1}{2j}}}. \tag{20}$$

不失一般性，设 $F \geq 0, F_k \geq 0 (k = 1,2)$. 为了证明(19) 式，只需证明

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_1(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F\prod_{k=1}^{2}F_k\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \le C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L^2_{\xi\tau}}, \tag{21}$$

这里

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)=\frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}}(\prod_{k=1}^{2}|\xi_k|^{\frac{1}{2j}})\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\lambda\rangle^{\frac{1}{2j}}\langle\xi\rangle^{s_0-1}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\xi_k\rangle^{s_0-1}\langle\sigma_k\rangle^{b}\langle\lambda_k\rangle^{\frac{1}{2j}}}. \tag{22}$$

并且$\langle\xi_1+\xi_2\rangle^{s-s_0}\le C[\langle\xi_1\rangle^{s-s_0}+\langle\xi_2\rangle^{s-s_0}]$. 由$|\xi_1|$和$|\xi_2|$之间的对称性，不失一般性，设$|\xi_1|\le|\xi_2|$. 显然$\{\xi=\xi_1+\xi_2,\tau=\tau_1+\tau_2,|\xi_2|\ge|\xi_1|\}\subset\bigcup_{k=1}^{6}\Omega_k$,这里

$\Omega_1=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\mathbf{R}^4,\xi=\xi_1+\xi_2,\tau=\tau_1+\tau_2,|\xi_1|\le|\xi_2|\le 6\}$,

$\Omega_2=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\mathbf{R}^4,\xi=\xi_1+\xi_2,\tau=\tau_1+\tau_2,|\xi_2|\ge 6,|\xi_2|\ge 4|\xi_1|,|\xi_1|\le 1\}$,

$\Omega_3=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\mathbf{R}^4,\xi=\xi_1+\xi_2,\tau=\tau_1+\tau_2,|\xi_2|\ge 6,|\xi_2|\ge 4|\xi_1|,|\xi_1|\ge 1\}$,

$\Omega_4=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\mathbf{R}^4,\xi=\sum_{k=1}^{2}\xi_k,\tau=\sum_{k=1}^{2}\tau_k,|\xi_2|\ge 6,|\xi_1|\le|\xi_2|\le 4|\xi_1|,|\xi|\le \frac{1}{2}|\xi_1|,\xi_1\xi_2\le 0\}$,

$\Omega_5=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\mathbf{R}^4,\xi=\xi_1+\xi_2,\tau=\tau_1+\tau_2,|\xi_2|\ge 6,|\xi_1|\le|\xi_2|\le 4|\xi_1|,|\xi_2|\ge\frac{|\xi|}{2}\}$,

$\Omega_6=\{(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\in\mathbf{R}^4,\xi=\xi_1+\xi_2,\tau=\tau_1+\tau_2,|\xi_2|\ge 6,|\xi_1|\le|\xi_2|\le 4|\xi_1|,\xi_1\xi_2\ge 0\}$.

在(21)式中相对应于$\Omega_k(1\le k\le 6)$的积分分别记做$J_k(1\le k\le 6)$. 定义$f=\mathscr{F}^{-1}\frac{F}{\langle\sigma\rangle^{-b'}}$, $f_k=\mathscr{F}^{-1}\frac{F_k}{\langle\sigma_k\rangle^{b}}$, $k=1,2$.

(Ⅰ)子区域Ω_1. 由于$|\xi_1|\le|\xi_2|\le 6$，那么$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\le\frac{C}{\langle\sigma\rangle^{-b'}\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}$.

因此，由 Plancherel 恒等式，Hölder 不等式和$\frac{j+1}{2j+1}b<b$,得出

$$J_1\le C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F\prod_{k=1}^{2}F_k\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\le C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{F\prod_{k=1}^{2}F_k}{\langle\sigma\rangle^{-b'}\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\le$$

$$C\int_{\mathbf{R}^2}f_1f_2f\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\|f\|_{L^2_{xt}}\prod_{k=1}^{2}\|f_k\|_{L^4_{xt}}\le C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|f_k\|_{X_{0,\frac{j+1}{2j+1}b}}\le C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

(Ⅱ)子区域Ω_2. 在这个子区间中，

$$|\xi_2|\sim|\xi|,|\xi|\le|\xi_1|^{-\frac{1}{2j}}\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}^{\frac{1}{2j}}. \tag{23}$$

显然,$\langle\lambda\rangle\le C\max\langle\lambda_1\rangle,\langle\lambda_2\rangle\}$. 由于$\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}\ge 1$,那么

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\le C\frac{|\xi|^{j+1}|\xi_1|^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\lambda\rangle^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}\langle\lambda_k\rangle^{\frac{1}{2j}}}\le C\frac{|\xi|^{j}\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\le$$

$$C\frac{|\xi|^{j}\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}.$$

(i) 当$\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma|$或者$\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma_1|\le 2|\sigma|$时，由于$\frac{1}{2j}+b'<0$，那么$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\le C\frac{|\xi|^{j}\langle\sigma\rangle^{b'+\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\le C\frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}$. 因此，从 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 2 得出

$$J_2 \leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F\prod_{k=1}^{2}F_k\,d\xi_1\,d\tau_1\,d\xi\,d\tau \leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}F\prod_{k=1}^{2}F_k\,d\xi_1\,d\tau_1\,d\xi\,d\tau \leq$$

$$C\left\|\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} |\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}\frac{\prod_{k=1}^{2}F_k}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}d\xi_1\,d\tau_1\right\|_{L^2_{\xi\tau}} \|F\|_{L^2_{\xi\tau}} \leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

(ii) 当 $\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma_1|>2|\sigma|$ 时，令 $|\sigma_1|\leq C\lambda_2$. 事实上，通过用(17) 式，得出

$$|\sigma_1|=|\tau_1+(-1)^j\xi_1^{2j+1}=|\tau+(-1)^j\xi^{2j+1}-(\tau_2+(-1)^j\xi_2^{2j+1})+(-1)^{j+1}\xi^{2j+1}+(-1)^j\xi_1^{2j+1}+$$

$$(-1)^j\xi_2^{2j+1}\leq|\tau+(-1)^j\xi^{2j+1}|+|\tau_2|+|\xi_2|^{2j+1}+|\xi^{2j+1}-\xi_1^{2j+1}-\xi_2^{2j+1}|\leq$$

$$|\sigma|+\lambda_2+C|\xi_1||\xi|^{2j}\leq\frac{|\sigma_1|}{2}+C\lambda_2,$$

因此，有 $|\sigma_1|\leq C\lambda_2$. 由于 $|\sigma_1|\leq C\lambda_1$ 且 $|\lambda|\leq C\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}$，那么 $|\sigma_1|\leq C\min\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}$，通过(23) 式，得出

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j+1}|\xi_1|^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\lambda\rangle^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b\langle\lambda_k\rangle^{\frac{1}{2j}}}\leq C\frac{|\xi|^j|\sigma_1|^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^j}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}\leq C\frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}.$$

因此，利用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 2 可得出

$$J_2\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F\prod_{k=1}^{2}F_k\,d\xi_1\,d\tau_1\,d\xi\,d\tau\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}F\prod_{k=1}^{2}F_k}{\prod_{j=1}^{2}\langle\sigma_j\rangle^b}d\xi_1\,d\tau_1\,d\xi\,d\tau\leq$$

$$C\left\|\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^{2}\langle\sigma_j\rangle^b}F_1F_2\,d\xi_1\tau_1\right\|_{L^2_{\xi\tau}}\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

(ⅲ) 当 $\max=\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma_2|$ 时，运用 $\min\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}\geq1$ 和 (23) 式，由于 $b'+\frac{1}{2j}<0$，得出

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^j\langle\sigma\rangle^{b'}|\sigma_2|^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}}\leq C\frac{|\xi|^j\langle\sigma_2\rangle^{\frac{1}{2j}-b}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^j\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2j}-b}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\leq C\frac{|\xi|^j\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2j}+b'}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b}\leq C\frac{|\xi|^j}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b}\leq C\frac{|\xi^{2j}-\xi_1^{2j}|^{1/2}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^b}.$$

设 $\xi_1'=-\xi_1,\xi_2'=\xi,\xi'=\xi_2,\tau_1'=-\tau_1,\tau_2'=\tau,\tau'=\tau_2$. 那么 $\xi_1+\xi_2'=\xi'$，$\tau_1'+\tau_2'=\tau'$ 并且

$$|\sigma|=|\tau+(-1)^j\xi^{2j+1}|=|\tau_2'+(-1)^j\xi_2'^{2j+1}|=|\sigma_2'|,$$

$$|\sigma_1|=|\tau_1+(-1)^j\xi_1^{2j+1}|=|-\tau_1'+(-1)^{j+1}\xi_1'^{2j+1}|=|\sigma_1'|,$$

$$|\sigma_2|=|\tau_2+(-1)^j\xi_2^{2j+1}|=|-\tau'+(-1)^{j+1}\xi'^{2j+1}|=|\sigma'|.$$

设 $F_1(\xi_1,\tau_1)=G_1(\xi_1',\tau_1')$，$F_2(\xi_2,\tau_2)=F_2(\xi',\tau')=G(\xi',\tau')$，$F(\xi,\tau)=F(\xi_2',\tau_2')=G_2(\xi_2',\tau_2')$. 则

$$J_2\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F(\xi,\tau)\prod_{k=1}^{2}F_k(\xi_k,\tau_k)\,d\xi_1\,d\tau_1\,d\xi\,d\tau\leq$$

$$C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi'=\xi_1'+\xi_2'\\ \tau'=\tau_1'+\tau_2'}}\frac{|\xi_1'^{2j}-\xi_2'^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1'\rangle^b\langle\sigma_2'\rangle^b}G_1(\xi_1',\tau_1')G_2(\xi_2',\tau_2')G(\xi',\tau')\,d\xi_1'\,d\tau_1'\,d\xi'\,d\tau'\leq$$

$$C\|G\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|G_k\|_{L^2_{\xi\tau}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L^2_{\xi\tau}}.$$

(Ⅲ) 子区域 Ω_3. 在这个子区间中，有 $|\xi|\sim|\xi_2|$.

(i) 当 $\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma|$ 或者 $\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma_1|\leq2|\sigma|$ 时，由于

$$\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}\geq\min\{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}},|\xi_2|^{1+\frac{1}{2j}}\},$$

运用(17)式和 $1-s_0+(2j+1)b'\leq 0$，可以得出

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0}|\xi|^{j+1}\langle\lambda\rangle^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\lambda_k\rangle^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0}|\xi|^{j+1}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\leq$$

$$C\frac{|\xi_1|^{-s_0}|\xi|^{j+1}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi_1|^{-s_0+b'}|\xi|^{j+1+2jb'}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\leq$$

$$C\frac{|\xi_1|^{1-s_0+(2j+1)b'}|\xi|^{j}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}.$$

(ii) 当 $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}\geq 2|\sigma|$ 时，显然 $|\sigma_1|\leq C\min\{\langle\lambda_1\rangle,\langle\lambda_2\rangle\}$. 从(17)式中可以得出 $|\sigma_1|\geq C|\xi_1||\xi|^{2j}$，因此

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j+1}|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi|^{j+1}|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_1\rangle^{b+\frac{1}{2j}}\langle\sigma_2\rangle^{b}}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^{j(1-2b)}|\xi_1|^{1-s_0-b}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_2\rangle^{b}}.$$

当 $1-s_0-b\geq 0$ 时，因为 $j+1-s_0-(2j+1)b\leq\frac{2j-1}{4}$，那么

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j+1-s_0-(2j+1)b}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_2\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi_2|^{\frac{2j-1}{4}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_2\rangle^{b}}.$$

当 $1-s_0-b<0$ 时，因为 $j(1-2b)\leq\frac{2j-1}{4}$，那么

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j(1-2b)}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_2\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi_2|^{\frac{2j-1}{4}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_2\rangle^{b}}.$$

因此，通过运用 Plancherel 恒等式，Hölder 不等式，$b'<-\frac{b}{2}$ 和(9)～(11)式，得出

$$J_3\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F\prod_{k=1}^{2}F_k\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\xi_2|^{\frac{2j-1}{4}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\langle\sigma_2\rangle^{b}}F\prod_{k=1}^{2}F_k\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\|\mathscr{F}^{-1}(F_1)D_x^{\frac{2j-1}{4}}\mathscr{F}^{-1}(f_2)\|_{X_{0,b'}}\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\leq C\|\mathscr{F}^{-1}(F_1)D_x^{\frac{2j-1}{4}}\mathscr{F}^{-1}(f_2)\|_{L_t^{4/3}L_x^2}\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\leq$$

$$C\|\mathscr{F}^{-1}F_1\|_{L^2_{xt}}\|D_x^{\frac{2j-1}{4}}f_2\|_{L_t^4L_x^\infty}\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\leq C\|F\|_{L^2_{\xi\tau}}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L^2_{\xi\tau}}.\tag{24}$$

当 $|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 时，因为 $\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\sigma_2\rangle^{-b}\leq\langle\sigma\rangle^{-b}\langle\sigma_2\rangle^{b'}$，运用

$$\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}\geq\min\{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}},|\xi_2|^{1+\frac{1}{2j}}\},$$

可以得出 $K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j+1}|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0}\langle\sigma_2\rangle^{b'}}{\langle\sigma\rangle^{b}\langle\sigma_1\rangle^{b}\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}}\leq C\frac{|\xi|^{j+1+2jb'}|\xi_1|^{-s_0+b'}\langle\sigma_2\rangle^{b'}}{\langle\sigma\rangle^{b}\langle\sigma_1\rangle^{b}}.$

如果 $-s_0+b'\leq 0$，因为 $1+2jb'\leq 0$，那么 $K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j}}{\langle\sigma\rangle^{b}\langle\sigma_1\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi^{2j}-\xi_1^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{b}\langle\sigma_1\rangle^{b}}.$

如果 $-s_0+b'\geq 0$，因为 $1-s_0+(2j+1)b'\leq j$，那么

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{1-s_0+(2j+1)b'}}{\langle\sigma\rangle^{b}\langle\sigma_1\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi|^{j}}{\langle\sigma\rangle^{b}\langle\sigma_1\rangle^{b}}\leq C\frac{|\xi^{2j}-\xi_1^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^{b}\langle\sigma_1\rangle^{b}}.$$

这种情况可以用类似于 Ω_2 中 $|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 的情况证明.

(Ⅳ) 子区域 Ω_4. 在这个子区间中，$|\xi_1|\sim|\xi_2|$，并且很容易得到

$$|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|\geq C|\xi||\xi_1|^{2j-1},\ |\xi^{2j}-\xi_1^{2j}|\geq C|\xi_1|^{2j},\ |\xi^{2j}-\xi_2^{2j}|\geq C|\xi_2|^{2j}.$$

这些可以在文献[11]中得出.

(i) 当 $|\sigma|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 时，通过 $|\xi_1|\sim|\xi_2|$，可以得到

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}}|\xi_1|^{\frac{1}{j}-2(s_0-1)}\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\lambda\rangle^{\frac{1}{2j}}}{|\xi_1|^{2+\frac{1}{j}}\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}\leq C\frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}}|\xi_1|^{-2s_0}\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\lambda\rangle^{\frac{1}{2j}}\langle\xi\rangle^{s_0-1}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}.$$

注意到 $|\lambda|=|\tau|+|\xi|^{2j+1}\leq|\tau+(-1)^j\xi^{2j+1}|+2\xi^{2j+1}=|\sigma|+2|\xi|^{2j+1}\leq|\sigma|+C\langle\xi\rangle^{2j+1}\chi_{|\xi|\geq1}$. 从(17) 式中可以得到

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}}|\xi_1|^{-2s_0}\langle\sigma\rangle^{b'+\frac{1}{2j}}\langle\xi\rangle^{s_0-1}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}+C\frac{|\xi|^{j+s_0-\frac{1}{2j}}|\xi_1|^{-2s_0}\langle\xi\rangle^{1+\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^{j+1+b'}|\xi_1|^{1+2jb'-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0-1}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}+C\frac{|\xi|^{1+j+s_0+b'}|\xi_1|^{-2s_0+2jb'}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^{\frac{1}{2}+b'}|\xi_1|^{\frac{3}{2}+2jb'-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0-1}|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}+C\frac{|\xi|^{s_0+\frac{1}{2}+b'}|\xi_1|^{\frac{1}{2}-2s_0+2jb'}|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{\langle\xi\rangle^{s_0-\frac{1}{2}+b'}|\xi_1|^{\frac{3}{2}+2jb'-2s_0}|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}+C\frac{|\xi|^{s_0+\frac{1}{2}+b'}|\xi_1|^{\frac{1}{2}-2s_0+2jb'}|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}.$$

由 $s_0+\frac{1}{2}+b'\geq0$, $s_0-\frac{1}{2}+b'\leq0$, $\frac{3}{2}+2jb'-2s_0\leq0$ 和 $1+(2j+1)b'-s_0\leq0$，可以得到

$$K_2(\xi,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}+C\frac{|\xi_1|^{1+(2j+1)b'-s_0}|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq C\frac{|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}.$$

这个情况可以用类似于 $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 的情况证明.

(ii) 当 $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 时，那么 $|\sigma_1|\geq|\xi||\xi_2|^{2j}$，$\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\sigma_1\rangle^{-b}\leq\langle\sigma\rangle^{-b}\langle\sigma_1\rangle^{b'}$，

$$\lambda\leq\langle\sigma\rangle+C\langle\xi\rangle^{2j+1}\chi_{|\xi|\geq1}\leq\langle\sigma_1\rangle+C\langle\xi\rangle^{2j+1}\chi_{|\xi|\geq1}.$$

由于$\langle\lambda_k\rangle^{\frac{1}{2j}}\geq C|\xi_k|^{1+\frac{1}{2j}}(k=1,2)$，通过运用(17) 式，得出

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{1-\frac{1}{2j}}|\xi_1|^{j-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0-1}\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}+C\frac{|\xi_1|^{j-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0+1}\langle\sigma\rangle^{b'}\chi_{|\xi|\geq1}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^{1-\frac{1}{2j}}|\xi_1|^{j-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0-1}\langle\sigma_1\rangle^{b'+\frac{1}{2j}}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}+C\frac{|\xi_1|^{j-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0+1}\langle\sigma_1\rangle^{b'}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi|^{1+b'}|\xi_1|^{j+1+2jb'-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0-1}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}+C\frac{|\xi_1|^{j-2s_0+2jb'}|\xi|^{s_0+1+b'}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi_1|^{j+1+2jb'-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0+b'}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}+C\frac{|\xi_1|^{j-2s_0+2jb'}|\xi|^{s_0+1+b'}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}\leq$$

$$C\frac{|\xi_1|^{1+2jb'-2s_0}\langle\xi\rangle^{s_0+b'}|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}+C\frac{|\xi_1|^{-2s_0+2jb'}|\xi|^{s_0+1+b'}|\xi_1^{2j}-\xi_2^{2j}|^{1/2}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b}.$$

当 $-1\leq s_0+b'\leq0$ 时，由于 $1+2jb'-2s_0\leq0$，$1-s_0+(2j+1)b'\leq0$，得出

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}+C\frac{|\xi_1|^{1-s_0+(2j+1)b'}\chi_{|\xi|\geq1}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}\leq C\frac{|\xi^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}.$$

当 $s_0+b'+1<0$ 时，由于 $1+2jb'-2s_0\leq0$，可以得出 $K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\dfrac{|\xi^{2j}-\xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}$.

这个情况可以用类似于 Ω_2 中 $|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 的情况证明.

(iii) 当 $\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma_2|$ 时，整个情况可以用类似于 $\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}=|\sigma_1|$ 的情况证明.

(Ⅴ) 子区域 Ω_5. 在这个子区间中，$|\xi|\sim|\xi_1|\sim|\xi_2|$，$\min\{\langle\lambda_1\rangle^{\frac{1}{2j}},\langle\lambda_2\rangle^{\frac{1}{2j}}\}\geq C|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}}$，因此，得出

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\leq C\frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}}\langle\xi\rangle^{s_0-1}\prod_{k=1}^{2}|\xi_k|^{\frac{1}{2j}}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\min\{|\lambda_1|^{\frac{1}{2j}},|\lambda_2|^{\frac{1}{2j}}\}\prod_{k=1}^{2}\langle\xi_k\rangle^{s_0-1}\langle\sigma_k\rangle^b}\leq C\frac{|\xi|^{j+1-s_0}\langle\sigma\rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}.$$

(i) 当 $|\sigma|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 时，通过运用(17) 式，可以得出

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau) \le C\frac{|\xi|^{j+1-s_0+(2j+1)b'}}{\prod\limits_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b} \le C\frac{\prod\limits_{k=1}^{2}|\xi_k|^{\frac{2j-1}{8}}}{\prod\limits_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}.$$

通过运用 Plancherel 恒等式，Hölder 不等式，$\frac{3}{4}b<b$ 和(12) 式,可以得出

$$J_5 \le C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F\prod_{k=1}^{2}F_k\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \le C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{2}|\xi_k|^{\frac{2j-1}{8}}}{\prod\limits_{k=1}^{2}\langle\sigma_k\rangle^b}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \le$$

$$C\int_{\mathbf{R}^2}\mathscr{F}^{-1}F\prod_{k=1}^{2}D_x^{\frac{2j-1}{8}}f_k\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\|\mathscr{F}^{-1}F\|_{L_{xt}^2}\prod_{k=1}^{2}\|D_x^{\frac{2j-1}{8}}f_k\|_{L_{xt}^4} \le$$

$$C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{k=1}^{2}\|f_k\|_{X_{0,\frac{3}{4}b}} \le C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L_{\xi\tau}^2}.$$

(ii) 当 $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 时,$\langle\sigma\rangle^{b'}\langle\sigma_1\rangle^{-b}\le\langle\sigma_1\rangle^{b'}\langle\sigma\rangle^{-b}$. 通过运用 (17) 式，可以得到

$$K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau) \le C\frac{|\xi|^{j+1-s_0}\langle\sigma_1\rangle^{b'}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b} \le C\frac{|\xi|^{j+1-s_0+(2j+1)b'}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma\rangle^b} \le C\frac{|\xi|^{\frac{2j-1}{8}}|\xi_2|^{\frac{2j-1}{8}}}{\langle\sigma\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}.$$

运用 Plancherel 恒等式、Hölder 不等式、(12) 式和$\frac{3}{4}b<b$，可以得出

$$J_5 \le C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)F\prod_{k=1}^{2}F_k\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \le C\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi|^{\frac{2j-1}{8}}|\xi_2|^{\frac{2j-1}{8}}}{\langle\sigma_2\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b}F\prod_{k=1}^{2}F_k\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \le$$

$$C\int_{\mathbf{R}^2}(\mathscr{F}^{-1}F_1)\left(D_x^{\frac{2j-1}{8}}\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{F}{\langle\sigma\rangle^b}\right)\right)D_x^{\frac{2j-1}{8}}f_2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C\|\mathscr{F}^{-1}F_1\|_{L_{xt}^2}\|D_x^{\frac{2j-1}{8}}f_2\|_{L_{xt}^4}\left\|D_x^{\frac{2j-1}{8}}\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{F}{\langle\sigma\rangle^b}\right)\right\|_{L_{xt}^4} \le$$

$$C\|F_1\|_{L_{\xi\tau}^2}\|f_2\|_{X_{0,\frac{3}{4}b}}\left\|\frac{F}{\langle\sigma\rangle^b}\right\|_{X_{0,\frac{3}{4}b}} \le C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{k=1}^{2}\|F_k\|_{L_{\xi\tau}^2}.$$

(iii) 当 $|\sigma_2|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 时.

这种情况可以用类似于情形 $|\sigma_1|=\max\{|\sigma|,|\sigma_1|,|\sigma_2|\}$ 的方法证明.

(Ⅵ) 子区域 Ω_6. 在这个子区间中，有 $|\xi|\sim|\xi_1|\sim|\xi_2|$.

这种情况可以用类似于子区间 Ω_5 的情况证明.

已经完成了引理 5 的证明.

引理 6 令 $s\ge s_0=-\frac{j}{2}+\frac{3}{4}+(2j+1)\epsilon$, $b=\frac{1}{2}+\epsilon, j\ge 2$, $j\in N$, $b'=-\frac{1}{2}+2\epsilon$. 那么

$$\|\partial_x^{j-1}\prod_{k=1}^{2}(u_{kx})\|_{X_{s,\frac{1}{2j},b'}} \le C\prod_{k=1}^{2}\|u_k\|_{X_{s,\frac{1}{2j},b}}. \tag{25}$$

引理 6 可以用类似于引理 5 的情况证明.

3 证明定理 1

证明 (1)、(2) 式在 $j\ge 1$, $j\in\mathbf{N}^+$ 时等价于下面的积分方程:

$$u(t)=W(t)u_0+\int_0^t W(t-\tau)[\partial_x^{j+1}(u^2)+\partial_x^{j-1}(u_x^2)]\mathrm{d}\tau. \tag{26}$$

定义

$$\Phi(u)=\Psi(t)W(t)u_0+\Psi_\delta(t)\int_0^t W(t-\tau)[\partial_x^{j+1}(u^2)+\partial_x^{j-1}(u_x^2)]\mathrm{d}\tau. \tag{27}$$

在这里，可以运用 引理 3、5、6 和不动点定理来构建局部解. 对于细节，建议读者参考文献[8] 中的定理 2.6.

4 证明定理 2

证明 受文献[8,10] 启发,由 $\mathscr{F}_x\phi_N(\xi):=N^{(2j+\epsilon)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2j})}\chi_1(\xi)+N^{\frac{2j+\epsilon}{2}-s}\chi_2(\xi)$ 定义了一系列的初始值，这

里 $\chi_1(\xi)=\chi_{\frac{1}{2}N^{-2j-\epsilon}\le\xi\le N^{-2j-\epsilon}}(\xi)$，$\chi_2(\xi)=\chi_{N\le\xi\le N+N^{-2j-\epsilon}}(\xi)$. 通过直接计算，得出

$$\|\phi_N\|^2_{H^{(s,\frac{1}{2j})}}=\int_{\mathbf{R}}\langle\xi\rangle^{2s+\frac{1}{j}}|\xi|^{-\frac{1}{j}}|\mathscr{F}_x\phi_N(\xi)|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbf{R}}\langle\xi\rangle^{2s+\frac{1}{j}}|\xi|^{-\frac{1}{j}}N^{(2j+\epsilon)(1-\frac{1}{j})}\chi_{\frac{1}{2}N^{-2j-\epsilon}\le\xi\le N^{-2j-\epsilon}}(\xi)\mathrm{d}\xi+$$

$$\int_{\mathbf{R}}\langle\xi\rangle^{2s+\frac{1}{j}}|\xi|^{-\frac{1}{j}}N^{2j+\epsilon-s}\chi_{N\le\xi\le N+N^{-2j-\epsilon}}(\xi)\mathrm{d}\xi\le 4,$$

因此，得出 $\|\phi_N\|_{H^{(s,\frac{1}{2j})}}\le 2$. 通过文献[10]中的证明，可以得出

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau)[\partial_x^{j+1}(W(\tau)\phi_N)^2+\partial_x^{j-1}(W(\tau)\phi_{Nx})^2]\mathrm{d}\tau\right\|_{H^s}\ge C\|F(t)\|_{H^s}.$$

这里 $\mathscr{F}_xF(t)=\dfrac{N^{2j+\epsilon}\xi^{j+1}\,\mathrm{e}^{it(-1)^{j+1}\xi^{2j+1}}}{N^{s+(2j+\epsilon)w}}\displaystyle\int_{\mathbf{R}}[\chi_1(\xi_1)\chi_2(\xi-\xi_1)+\chi_2(\xi_1)\chi_1(\xi-\xi_1)]\dfrac{\mathrm{e}^{itr}(\xi_1,\xi)-1}{r(\xi_1,\xi)}\mathrm{d}\xi_1$ 且 $r(\xi_1,\xi)=(-1)^j[\xi_1^{2j+1}+\xi_2^{2j+1}-\xi^{2j+1}]$. 通过运用(17)式，得出 $|r(\xi_1,\xi)|\le CN^{-2j-\epsilon}N^{2j}\le CN^{-\epsilon}$. 很容易检查出 $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{itr(\xi_1,\xi)-1}}{r(\xi_1,\xi)}\right|\ge|t|-C|t|^2N^{-\epsilon}$.

因此，对于 $t>0$，有

$$\|F(t)\|_{H^s}\ge CN^{j+1}N^sN^{-2j-\epsilon}N^{-\frac{2j+\epsilon}{2}}N^{2j+\epsilon}N^{s-(2j+\epsilon)w}=CN^{j+1-\frac{2j+\epsilon}{2}-(2j+\epsilon)w}. \tag{28}$$

在(28)式中，如果 $j+1-\dfrac{2j+\epsilon}{2}-(2j+\epsilon)w>0$ 且令 $w<\dfrac{1-\frac{\epsilon}{2}}{2j+\epsilon}$，可以得出 $N^{j+1-\frac{2j+\epsilon}{2}-(2j+\epsilon)w}\to+\infty$，当 $\epsilon\to 0$ 时，可以得出 $w<\dfrac{1}{2j}$. 上面的计算意味着

$$\left\|\int_0^t W(t-\tau)[\partial_x^{j+1}(W(\tau)\phi_N)^2+\partial_x^{j-1}(W(\tau)\phi_{Nx})^2]\mathrm{d}\tau\right\|_{H^s}\to+\infty. \tag{29}$$

这相当于一个二阶导数在原点处随着 $N\to\infty$ 在 ϕ_N 方向是无界的. 然而 $\|\phi_N\|_{H^{(s,w)}}\le 2$ 与流映射是 C^2 的相矛盾.

完成了定理 2 的证明.

致谢：这篇论文是在我的导师闫威副教授的悉心指导下完成的，在此表示深深的感谢！

参 考 文 献

[1] Kenig C E, Ponce G, Vega L. Higher-order nonlinear dispersive equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 122: 157-166.

[2] Wang H, Cui S. Well-posedness of the Cauchy problem of a water wave equation with low regularity initial data[J]. mathematical Computer Modelling, 2007, 45: 1118-1132.

[3] Pilod D. On the Cauchy problem for higher-order nonlinear dispersive equations[J]. J Diff Eqns, 2008, 245: 2055-2077.

[4] Kato T. Well-posedness for the fifith order KdV equation[J]. Funkcial Ekvac, 2012, 55: 17-53.

[5] Guo Z H, Kwak C, Kwon S. Rough solutions of the fifth-order KdV equations[J]. J Funct Anal, 2013, 265: 2791-2829.

[6] Kenig C E, Pilod D. Well-posedness for the fifth-order KdV equation in the energy space[J]. Tran Amer math Soc, 2015, 367: 2551-2612.

[7] Bourgain J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part II: The KdV equation[J]. Geom Funct Anal, 1993, 3: 209-262.

[8] Herr S. Well-posedness for equations of Benjamin-Ono type[J]. Illinois J Math, 2007, 51: 951-976.

[9] 王红军，闫　威. 高阶修正 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(3): 1-4.

[10] Molinet L, Saut J C, Tzvetkov N. Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations[J]. SIAM J Math Anal, 2001, 33: 982-988.

[11] Li Y, Yan W, Yang X. Well-posedness of a higher order modified Camassa-Holm equation in spaces of low regularity[J]. J Evol Eqns, 2010, 10: 465-486.

[12] Yan W, Li Y, Li S. Sharp well-posedness and ill-posedness of a higher-order modified Camassa-Holm equation[J]. Diff Int Eqns, 2012, 25: 1053-1074.

(下转第 42 页)

[6] Liu Ling, Shen Bingliang. Radford's biproducts and Yetter-Drinfeld modules for monoidal Hom-Hopf algebras[J]. J Math Phys,2014,55:031701.

[7] Hartwig J T, Larsson D, Silvestrov S D. Deformations of Lie algebras using σ-derivations[J]. J Algebra,2006,295:314-361.

[8] Ma Tianshui, Li Haiying, Yang Tao. Cobraided smash product Hom-Hopf algebras[J]. Colloq Math,2014,134(1):75-92.

[9] Makhlouf A, Panaite F. Hom-L-R-smash products, Hom-diagonal crossed products and the Drinfeld double of a Hom-Hopf algebra[J]. J Algebra,2015,441:314-343.

[10] Yau D. Hom-quantum groups I: Quasitriangular Hom-bialgebras[J]. J Phys A,2012,45(6):065203.

[11] Yau D. The Hom-Yang-Baxter equation and Hom-Lie algebras[J]. J Math Phys,2011,52:053502.

[12] Li Haiying, Ma Tianshui. A construction of Hom-Yetter-Drinfeld category[J]. Colloq Math,2014,137(1):43-65.

[13] Caenepeel S, Goyvaerts I. Monoidal Hom-Hopf algebras[J]. Comm Algebra,2011,39(6):2216-2240.

[14] Graziani G, Makhlouf A, Menini C, et al. BiHom-associative algebras, BiHom-Lie algebras and BiHom-bialgebras[J]. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl,2015,11:086.

[15] Radford D E. Hopf Algebras[M]. New Jersey: World Scientic,2012.

Radford Biproduct Monoidal BiHom-Hopf Algebra

ZHENG Huihui[1], WANG Yongzhong[2], MA Tianshui[1]

(1. School of Mathematics and Information Science, HenanNormal University, Xinxiang 453007, China;
2. School of Mathematics and Information Science, Xinxiang University, Xinxiang 453003, China)

Abstract: Firstly, we introduce the notions of a smash product monoidal BiHom-algebra $(B\# H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ and a smash coproduct monoidal BiHom-coalgebra$(B\times H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$. Furthermore, we get sufficient and necessary conditions for $(B\# H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ and $(B\times H,\alpha_B\otimes\alpha_H,\beta_B\otimes\beta_H)$ to be a monoidal BiHom-bialgebra.

Keywords: Radford biproduct; Monoidal BiHom-Hopf algebra; Hopf algebra

(上接第 23 页)

The Cauchy Problem for the Higher-Order Dispersive Equation

JIANG Minjie, LIU Limin

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007,China)

Abstract: In this paper, we consider the Cauchy problem for the higher-order dispersive equation $u_t+\partial_x^{2j+1}u=\partial_x^{j+1}(u^2)+\partial_x^{j-1}(u_x^2)$, $j\geq 2$, $j\in\mathbf{N}$, $x,t\in\mathbf{R}$. By using the modified Fourier restriction norm method and Strichartz estimate and the modified Bourgain space, we prove that the problem is locally well-posed in modified Sobolev space $H^{(s,\frac{1}{2j})}$ with $s>-\frac{j}{2}+\frac{3}{4}$. By using the iteration technique, we also prove that the flow map is not C^2 at the origin if we assume that the problem is well-posed in $H^{(s,w)}$ with $0<w<\frac{1}{2j}$ for any $s\in\mathbf{R}$.

Keywords: Cauchy problem; local well-posedness; modified Sobolev spaces