文章编号:1000-2367(2018)02-0017-05 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.02.003

一类带 $p(t)$-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题解的存在性

张迪, 刘文斌, 张伟

(中国矿业大学 数学学院,江苏 徐州 221116)

摘　要:研究了一类带 $p(t)$-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题，利用 Schaefer 不动点定理得到了解的存在性,并举例验证其主要结论. p-Laplacian 算子是 $p(t)$-Laplacian 算子的特殊形式,所得结果推广和丰富了已有结果.

关键词:分数阶微分方程;边值问题;$p(t)$-Laplacian 算子;Schaefer 不动点定理

中图分类号:O175.8 **文献标志码**:A

分数阶微分方程是微分方程理论的重要分支之一,它在热学、光学、生物组织学、黏弹性力学及材料学都有重要的应用,因此研究这类问题有重要的理论意义和实际意义.近年来,很多学者对分数阶微分方程解存在性进行了广泛的研究,得到许多结果[1-4].

在文献[4]中,用锥不动点定理及 Leggett-Williams 不动点定理得到了如下分数阶微分方程边值问题解的存在性与多解性:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t)=f(t,u(t)),t\in(0,1) \\ u(0)+u'(0)=0,u(1)+u'(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 D_{0+}^{α} 是 Caputo 分数阶导数，$1<\alpha\leq 2,f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的.

近年来,关于带 p-Laplacian 算子分数阶微分方程边值问题解的研究受到人们的关注,且得到很多优秀的成果[5-9]. 例如,文献[6]用 Schaefer 不动点定理得到了如下带 p-Laplacian 算子的反周期边值问题解的存在性:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(t))=f(t,x(t)),t\in(0,1), \\ x(0)=-x(1),D_{0+}^{\alpha}x(0)=-D_{0+}^{\alpha}x(1), \end{cases} \tag{2}$$

其中 D_{0+}^{α} 是 Caputo 分数阶导数，$0<\alpha,\beta\leq 1,1<\alpha+\beta\leq 2,f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的,$\varphi_p(\cdot)$ 是 p-Laplacian 映射.

$p(t)$-Laplacian 算子作为 p-Laplacian 算子的推广形式,在物理学及图像处理等领域有着广泛的应用[10-12],从而引起了人们的研究兴趣.当 $p(t)$ 为一个常数时 $p(t)$-Laplacian 算子就转化为所熟悉的 p-Laplacian 算子,相比 p-Laplacian 算子 $p(t)$- Laplacian 算子不是标准的增算子,不具有标准增算子的一些性质,所以研究这类问题有一定的复杂性. 同时,对于整数阶带 $p(t)$-Laplacian 算子微分方程解的存在性研究已有一些成果[13-14],但关于分数阶带 $p(t)$-Laplacian 算子微分方程解的存在性研究成果较少[15-16].

文献[15]用 Leggett-Williams 不动点定理及锥不动点得到如下带 $p(t)$-Laplacian 算子的分数阶微分方

收稿日期:2017-04-23;**修回日期**:2017-12-23.

基金项目:国家自然科学基金(11271364)

作者简介:张迪(1992-),女,安徽宿州人,中国矿业大学硕士研究生,研究方向为微分方程边值问题研究,E-mail:18361273335@163.com.

通信作者:刘文斌(1960-),男,中国矿业大学教授,研究方向为常微分方程和非线性泛函分析理论及应用研究,E-mail:wblium@163.com.

程解的存在性与多解性:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}\varphi_{p(t)}(D_{0+}^{\alpha}x(t))+f(t,x(t))=0,t\in[0,1], \\ x'(0)=x(1)=x''(0)=0,D_{0+}^{\alpha}x(0)=0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 D_{0+}^{α} 是 Caputo 分数阶导数,$2<\alpha<30,0<\beta\leq 1,f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数,$\varphi_{p(t)}(\cdot)$ 是 $p(t)$-Laplacian 映射,$p(t)>1,p(t)\in C^1[0,1]$.

基于上述文献的启发,本文讨论如下带 $p(t)$-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题解的存在性:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}\varphi_{p(t)}(D_{0+}^{\alpha}x(t))=f(t,x(t)),t\in(0,1), \\ x(0)=-x(1),\varphi_{p(0)}(D_{0+}^{\alpha}x(0))=-\varphi_{p(1)}(D_{0+}^{\alpha}x(1)), \end{cases} \tag{4}$$

其中 D_{0+}^{α} 是 Caputo 分数阶导数,$0<\alpha,\beta\leq 1,1<\alpha+\beta\leq 2,f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的,$\varphi_{p(t)}(\cdot)$ 是 $p(t)$-Laplacian 映射,$p(t)>1,p(t)\in C^1[0,1]$.

注意到当 $p(t)=p$ 时,文献[6]所讨论的反周期边值问题是本文所研究问题的一个特例.

1 预备知识及相关结论

定义 1[17] 函数 $x:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Riemann-Liouville 型分数积分定义为:

$$I_{0+}^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$,右式在$(0,+\infty)$上有定义.

定义 2[17] 函数 $x:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Caputo 型分数导数定义为:

$$D_{0+}^{\alpha}x(t)=I_{0+}^{n-\alpha}\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}x^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$,右式在$(0,+\infty)$上有定义.

引理 1[17] 假设 $D_{0+}^{\alpha}x\in C[0,1],\alpha>0$,则

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}x(t)=x(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1},$$

其中 $c_i\in\mathbf{R},i=0,1,2,\cdots,n-1,n=[\alpha]+1$.

引理 2[14] 对任意的 $(t,x)\in[0,1]\times\mathbf{R},\varphi_{p(t)}(x)=|x|^{p(t)-2}x$,是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的同胚映射,且当 t 固定时是严格单调增的.其逆映射 $\varphi_{p(t)}^{-1}(\cdot)$ 被定义为:

$$\begin{cases} \varphi_{p(t)}^{-1}(x)=|x|^{\frac{2-p(t)}{p(t)-1}}x,x\in\mathbf{R}\backslash\{0\}, \\ \varphi_{p(t)}^{-1}(x)=0,x=0, \end{cases}$$

它是将有界集映成有界集的连续映射.

引理 3[18](Schaefer 不动点定理) 设 X 是 Banach 空间,算子 $T:X\to X$ 为全连续算子.若集合 $\Omega:=\{x\in X\mid x=\lambda Tx,\lambda\in(0,1)\}$ 有界,则算子 T 在 Ω 中至少存在一个不动点.

引理 4 设 $h\in C[0,1]$,则边值问题

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}\varphi_{p(t)}(D_{0+}^{\alpha}x(t))=h(t),t\in(0,1), \\ x(0)=-x(1),\varphi_{p(0)}(D_{0+}^{\alpha}x(0))=-\varphi_{p(1)}(D_{0+}^{\alpha}x(1)) \end{cases} \tag{5}$$

有一解为

$$x(t)=I_{0+}^{\alpha}\varphi_{p(t)}^{-1}(I_{0+}^{\beta}h(t)+Ah(t)+Bh(t))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-$$

$$s)^{\alpha-1}\varphi_{p(t)}^{-1}(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau+Ah(s))\mathrm{d}s+Bh(t),$$

其中

$$Ah(t)=-\frac{1}{2}I_{0+}^{\beta}h(t)\Big|_{t=1}=-\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s,\forall t\in[0,1],$$

$$Bh(t)=-\frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha}(\varphi_{p(t)}^{-1}(I_{0+}^{\beta}h(t)+Ah(t)))\Big|_{t=1}=-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\varphi_{p(t)}^{-1}(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s(s-\tau)^{\beta-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau+Ah(s))\mathrm{d}s,\ \forall t\in[0,1].$$

证明　设函数 $x(t)$ 满足方程(5)式，则由引理 1 可知：

$$\varphi_{p(t)}(D_{0+}^{\alpha}x(t))=c_0+I_{0+}^{\beta}h(t),c_0\in\mathbf{R},$$

结合边值条件 $\varphi_{p(0)}(D_{0+}^{\alpha}x(0))=-\varphi_{p(1)}(D_{0+}^{\alpha}x(1))$，可得：

$$c_0=-\frac{1}{2}I_{0+}^{\beta}h(t)\Big|_{t=1}=Ah(t),$$

进而，由引理 1 得 $x(t)=c_1+I_{0+}^{\alpha}\varphi_{p(t)}^{-1}(Ah(t)+I_{0+}^{\beta}h(t)),c_1\in\mathbf{R}$，连同边值条件 $x(0)=-x(1)$，得 $c_1=-\frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha}\varphi_{p(t)}^{-1}(Ah(t)+I_{0+}^{\beta}h(t))\Big|_{t=1}=Bh(t)$，从而引理 4 得证.

定义算子 $T:C[0,1]\to C[0,1]$ 为

$$Tx(t)=I_{0+}^{\alpha}\varphi_{p(t)}^{-1}(I_{0+}^{\beta}f(t,x(t))+Af(t,x(t)))+Bf(t,x(t)).\tag{6}$$

显然算子 T 的不动点是边值问题(4)的解.

2　主要结果

定义空间 $X\in C[0,1]$，其范数定义为 $\|x\|_{\infty}=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$，显然$(X,\|\cdot\|_{\infty})$是 Banach 空间，记 $Q=6^{1/(P_m-1)}/\Gamma(\alpha)(2\Gamma(\beta+1))^{1/(P_M-1)}$，$P_m:=\min_{t\in[0,1]}p(t)$，$P_M:=\max_{t\in[0,1]}p(t)$.

引理 5　若算子 T 的定义由(6)式给出，则算子 T 是全连续算子.

证明　由 f 的连续性易证 T 是连续的，设 $\Omega\in C[0,1]$ 是有界开集.因为 $\varphi_{p(t)}^{-1}(\cdot)$ 与 f 都是连续的，可知存在 $M_1>0$ 使得 $|\varphi_{p(t)}^{-1}(Af(t,x(t))+I_{0+}^{\beta}f(t,x(t)))|\le M_1,\forall x\in\bar{\Omega},t\in[0,1]$，因此得：

$$\|Tx\|_{\infty}=\max_{t\in[0,1]}|Tx(t)|\le\frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s+\frac{M_1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\le\frac{3M_1}{2\Gamma(\alpha+1)},$$

即 $T\bar{\Omega}$ 是一致有界的，下证 $T\bar{\Omega}\subset C[0,1]$ 是等度连续的.

事实上，对 $\forall t_1,t_2\in[0,1],x\in\bar{\Omega}$，不妨设 $0\le t_1<t_2\le 1$，则有

$$\begin{aligned}|Tx(t_2)-Tx(t_1)|&=|I_{0+}^{\alpha}\varphi_{p(t)}^{-1}(Af(t,x(t))+I_{0+}^{\beta}f(t,x(t)))|_{t=t_2}-I_{0+}^{\alpha}\varphi_{p(t)}^{-1}(Af(t,x(t))+I_{0+}^{\beta}f(t,x(t)))|_{t=t_1}|\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\varphi_{p(s)}^{-1}(Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s)))\mathrm{d}s-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\varphi_{p(s)}^{-1}(Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s)))\mathrm{d}s\Big|\\&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1})\varphi_{p(s)}^{-1}(Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s)))\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\varphi_{p(s)}^{-1}(Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s)))\mathrm{d}s\Big|\\&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big|\int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1})\varphi_{p(s)}^{-1}(Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s)))\mathrm{d}s\Big|+\Big|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\varphi_{p(s)}^{-1}(Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s)))\mathrm{d}s\Big|\\&\le\frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}(\int_0^{t_1}((t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1})\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s)\\&=\frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}+2(t_2-t_1)^{\alpha}).\end{aligned}$$

由 t^{α} 及 t 在$[0,1]$是一致连续的可知 $T\bar{\Omega}\subset C[0.1]$ 是等度连续的.根据 Arzela-Ascoli 引理可得 T 是全连续的.

定理 1　设 $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续，如果满足条件

(H)存在常数 $a,b>0$ 使得 $|f(t,x)|\le a+b|x|^{r-1},1<r\le P_m$，其中

$$\frac{3\cdot 6^{1/(P_m-1)}\max\{b^{1/(P_m-1)},b^{1/(P_M-1)}\}}{2\Gamma(\alpha+1)(2\Gamma(\beta+1))^{1/(P_M-1)}}<1. \tag{7}$$

则边值问题(4)至少有一个解.

证明 定义 $\Omega=\{x\in C[0,1]\mid x=\lambda Tx,\lambda\in(0,1)\}$.下面证明 Ω 是有界的.

事实上,对 $\forall x\in\Omega$, 由(H)可得

$$|Af(t,x(t))|=\left|\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}f(s,x(s))\mathrm{d}s\right|\le\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}|f(s,x(s))|\mathrm{d}s\le$$

$$\frac{1}{2\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}(a+b|x|^{r-1})\mathrm{d}s\le\frac{1}{2\Gamma(\beta+1)}(a+b\|x\|_\infty^{r-1}). \tag{8}$$

从而有

$$|Af(t,x(t))+I_{0+}^{\beta}f(t,x(t))|\le|Af(t,x(t))|+|I_{0+}^{\beta}f(t,x(t))|\le|Af(t,x(t))|+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-$$

$$s)^{\beta-1}|f(s,x(s))|\mathrm{d}s\le|Af(t,x(t))|+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}(a+b|x|^{r-1})\mathrm{d}s\le\frac{3(a+b\|x\|_\infty^{r-1})}{2\Gamma(\beta+1)}.$$

考虑到不等式 $(x+y)^p\le 2^p(x^p+y^p),x,y,p>0$,以及 $x^k\le x+1,k\in[0,1],x>0$,可知对 $\forall t\in[0,1]$ 有

$$|Bf(t,x(t))|=\left|\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\varphi_{p(s)}^{-1}(Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s)))\mathrm{d}s\right|\le$$

$$\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\varphi_{p(s)}^{-1}(|Af(s,x(s))+I_{0+}^{\beta}f(s,x(s))|)\mathrm{d}s\le$$

$$\frac{3^{1/(P_m-1)}\cdot 2^{1/(P_m-1)}}{2\Gamma(\alpha)(2\Gamma(\beta+1))^{1/(P_M-1)}}\left(\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}(a^{1/(P(s)-1)}+b^{1/(P(s)-1)})\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}b^{1/(P(s)-1)}\|x\|_\infty\mathrm{d}s\right). \tag{9}$$

因此,

$$|x(t)|\le|I_{0+}^{\alpha}\varphi_{p(t)}^{-1}(I_{0+}^{\beta}f(t,x(t))+Af(t,x(t)))|+|Bf(t,x(t))|\le Q\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}(a^{1/(P(s)-1)}+$$

$$b^{1/(P(s)-1)})\mathrm{d}s+Q\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}b^{1/(P(s)-1)}\|x\|_\infty\mathrm{d}s+\frac{Q}{2}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}(a^{1/(P(s)-1)}+$$

$$b^{1/(P(s)-1)})\mathrm{d}s+\frac{Q}{2}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}b^{1/(P(s)-1)}\|x\|_\infty\mathrm{d}s, \tag{10}$$

由(7)式与(10)式可知存在常数 M 使得 $\|x\|_\infty\le M$.

根据 Schaefer 不动点定理,可知 T 在 Ω 上存在一个不动点,即边值问题(4)至少存在一个解.

3 例 子

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases}D_{0+}^{3/4}\varphi_{(t^2+4)}(D_{0+}^{3/4}x(t))=\sin t+\dfrac{1}{100}x^2,t\in(0,1),\\ x(0)=-x(1),\varphi_{p(0)}(D_{0+}^{3/4}x(0))=-\varphi_{p(1)}(D_{0+}^{3/4}x(1)),\end{cases}$$

其中 $f(t,x(t))=\sin t+\frac{1}{100}x^2,p(t)=t^2+4,\alpha=\beta=3/4$, 取 $r=3,a=1,b=1/100$,则有 $P_m=4,P_M=5,f(t,x(t))\le 1+\frac{1}{100}x^2,\frac{3\cdot 6^{1/3}\cdot(0.01)^{1/4}}{2\Gamma(3/4+1)(2\Gamma(3/4+1))^{1/4}}<1$. 由定理 1 可知边值问题(4)至少有一个解.

参 考 文 献

[1] Ahmad B,Nieto J J.Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems involving fractional differential equations via Leray-

Schauder degree theory[J].Topol Methods Nonlinear Anal,2010,35:295-304.

[2] Hu Z G,Liu W B,Rui W J.Periodic boundary value problem for the fractional differential equation[J].Internat J Math,2012,23:1-11.

[3] Agarwal R P,Ahmad B.Existence theory for anti-periodic boundary value problem of fractional differential equations and inclusions[J].Comput Math Appl,2011,62:1200-1214.

[4] El-Shahed M,Cabada A,Liz E,et al. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations[J].International Conference on Mathematical Models in Engineering,2009,1124(1):101-108.

[5] Zhang W,Liu W B,Chen T Y.Solvability for a fractional p-Laplacian multipoint boundary value problem at resonance on infinite interval[J].Adv Difference Equ,2016,2016(1):1-14.

[6] Chen T Y,Liu W B.An anti-periodic boundary value problem for the fractional differential equation with a p-laplacian operator[J].Appl Math Lett,2012,25:1671-1675.

[7] Du Z J,Lin X J,Tisedell C C.A multiplicity result for p-Laplacian boundary value problems via critical points theorem[J].Appl Math Comput,2008,205:231-237.

[8] Chai G Q.Positive solutions for boundary value problem of fractional differential equation with p-Laplacian operator[J].Bound Value Probl,2014,2012(1):18.

[9] 唐敏，刘文斌，吕秋燕，等.一类带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题解的存在性[J].河南师范大学学报（自然科学版），2014，42(3):5-10.

[10] ChenY M,LEVINE S,RAO M.Variable exponent linear growth functional in image restoration[J].SIAM J Appl Math,2006,66:1383-1406.

[11] Szymanek E.The application of fractional order differential calculus for the description of temperature profiles in a granular layer[J].Springer Inter Publ,2013,257:243-248.

[12] Ruzicka M.Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory[M].Berlin:Springer-Verlag,2000.

[13] Fan X L,Zhang Q H,Zhao D.Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem[J].J Math Anal Appl,2005,302:306-317.

[14] Zhang Q H,Wang Y,Qiu Z M.Existence of solutions and boundary asymptotic behavior of $p(r)$-Laplacian equation multi-point boundary value problems[J].Nonlinear Analysis,2010,72:2950-2973.

[15] Shen T F,Liu W B,Zhao R.Fractional boundary value problemswith $p(t)$-Laplacian operator[J].Adv Difference Equ,2016,2016(1):118.

[16] Shen T F,Liu W B.Existence of solutions for fractional integral boundary value problems with $p(t)$-Laplacian operator[J].J Non Sci Appl,2016,9:5000-5010.

[17] Podlubny I.Fractional differential equations[M].SanDiego:Acad Press,1999.

[18] Smart D R.Fixed Point Theorems[M].Cambridge:Cambridge University Press,1980.

Existence of solutions of boundary value problems for a class of fractional differential equations with $p(t)$-Laplacian

Zhang Di, Liu Wenbin, Zhang Wei

(College of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: In this paper, by usingschaefer fixed point theorem, we present an existence result for the solution of fractional differential equations with $p(t)$-Laplacian operator. An example is given to illustrate the research result. p-Laplacian operator is a special form of the $p(t)$-Laplacian operator, our paper generalizes and enriches the existing results.

Keywords: fractional differential equation; boundary value problem; $p(t)$-Laplacian operator; Schaefer fixed point theorem

[责任编校　陈留院]