

# 飞机地面变速滑跑演变随机响应分析

赵莹芳, 冷小磊

(南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

**摘要:**通过演变谱分析法对飞机起落架地面变速滑跑进行响应分析. 飞机在机场跑道变速滑行时, 机场跑道基础激励将转化为非平稳随机激励, 从而导致非平稳随机响应分析. 采用演变随机激励表示该非平稳随机激励, 用原平稳随机激励的功率谱密度和非线性变换表示其时变相关特性. 利用演变谱法分析起落架系统的非平稳响应问题, 最后通过数值算例验证了该方法的简便性和优越性.

**关键词:**演变谱; 起落架; 滑跑; 动响应; 随机激励; 非平稳

**中图分类号:** O324

**文献标志码:** A

飞机起飞与着陆过程中, 由于机场跑道不平顺引起的随机振动, 将导致飞机机体疲劳损伤, 乘员不适及地面操纵能力降低, 因此这种随机振动是起落架设计时必须考虑的重要因素之一. 国内外研究者对因路面不平度引起的随机振动进行了大量的研究, 并取得了一定成果. Hammond 等在假设路面不平度是由白噪声通过整形滤波得来的基础上, 利用状态空间方法解决了由路面不平度引起的车辆非平稳响应问题<sup>[1]</sup>; Hong 等利用由变量替换与傅里叶变换得到的功率谱密度法对飞机地面变速滑跑进行响应分析, 最终得到系统的均方响应<sup>[2]</sup>. Harrison 针对车辆变速行驶遭受的路面非平稳随机激励问题, 基于精细积分法与功率谱密度结合的方法求解了系统的响应统计量<sup>[3]</sup>. 郑浩哲等根据积分变换调制路面对行驶车辆的随机激励, 利用行驶车辆的行程与持续时间的确定性关系确定随机激励与响应的功率谱, 在实数域用确定性响应分析结果预测演变随机响应的功率谱<sup>[4]</sup>. 赵又群等基于精细时程积分法, 将车辆的非平稳随机响应归结为线性时不变系统的演变随机响应问题, 并以二自由度的汽车模型为例, 考察了汽车变速行驶时的平顺性问题<sup>[5]</sup>. 吴卫国等针对飞机起落架弹性结构的动力学建模及离散结构简化响应分析问题, 利用 Hamilton 变分原理, 提出并建立了起落架动力学模型, 并以某型飞机着陆过程为例, 通过对飞机着陆下沉速度、初始位移和路面不平度的随机模拟, 分析了飞机着陆过程起落架的随机响应特征<sup>[6]</sup>.

通常跑道的不平顺性可以假设为是符合正态分布的均匀随机场. 当飞机在跑道上匀速滑跑时, 起落架受到的跑道基础激励是一个平稳随机过程; 而在飞机起落或降落阶段的变速滑跑过程中, 起落架受到的跑道基础激励就是一个非平稳随机过程. 本文针对飞机地面变速滑跑过程中的非平稳随机响应分析问题, 利用演变谱分析方法, 将起落架的非平稳随机响应归结为一类演变随机响应问题, 通过时域分析求得系统协方差函数, 进而可以方便地得到飞机变速滑跑过程中系统均方响应的时域历程. 这也是演变谱分析方法的优势所在. 本文所采用的演变随机响应分析方法不但适用于定常或时变线性系统, 稍作改进亦适用于可进行统计线性化的弱非线性系统的非平稳随机响应分析之中. 最后, 以数值算例验证了本文所述方法的准确性及计算效率.

## 1 飞机起落架动力学模型

飞机起落架分析模型采用以下假设: 1) 采用如下图 1 所示的二自由度分析模型; 2) 气体弹簧刚度取停机

收稿日期: 2017-01-08; 修回日期: 2017-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金(11172127); 江苏高校优势学科建设资助项目.

作者简介(通信作者): 赵莹芳(1990-), 男, 河南新乡人, 南京航空航天大学硕士研究生, 研究方向为随机振动, E-mail: yfzhao@nuaa.edu.cn.

状态下的线性化刚度<sup>[7]</sup>;3)阻尼采用流体阻尼<sup>[4]</sup>(所谓流体阻尼是指,物体在流体中所受到的阻尼力与运动速度的平方成正比,因而流体阻尼又称为速度平方阻尼);4)忽略轮胎阻尼与库伦摩擦力。

使在时间  $t$  内,有当量阻尼吸收的能量与流体阻尼吸收的能量相等,则得到线性化当量阻尼系数<sup>[7]</sup>

$$c_s = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} D_s \sigma, \quad (1)$$

其中

$$\sigma^2 = \pi \nu \omega \frac{k_t}{4c_s}, \quad (2)$$

从而得到

$$c_s^3 = 4D_s^2 \nu \omega k_t, \quad (3)$$

其中,  $D_s$  为油液阻尼系数;  $\sigma^2$  为相对速度均方值;  $\mu$  为跑道路面的粗糙度系数;  $\nu$  为飞机跑道滑跑速度;  $k_t$  为轮胎刚度. 气体弹簧刚度系数<sup>[7]</sup>

$$k_s = \beta \frac{(F_s)^{1+\frac{1}{\beta}}}{(V_0/A_0)(P_0 A_0)^{\frac{1}{\beta}}}, \quad (4)$$

其中,  $F_s$  为停机状态下主起落架的静载荷;  $A_0$  为缓冲器气体活塞面积;  $P_0, V_0$  分别为气室初始压力和容积.  $\beta$  为多变指数,一般  $\beta = 1.0 \sim 1.4$ ,对于滑跑而言,取  $\beta = 1$ ,则上式变为

$$k_s = \frac{F_s^2}{P_0 V_0}. \quad (5)$$

由上述等效线性化当量阻尼系数与气体弹簧刚度系数,可得系统的动力学方程,由下式给出

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}\eta(t), \quad (6)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_t \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_t \end{bmatrix},$$

其中,  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  分别为系统的质量,阻尼,刚度矩阵;  $\mathbf{b}$  为实常数矩阵;  $\eta(t)$  为零均值的演变随机过程.  $m_1, m_2$  为系统质量;  $k_s, k_t$  分别为系统气体弹簧刚度系数与轮胎刚度;  $c_s$  为系统线性化当量阻尼系数。

## 2 跑道不平度统计特性

假设跑道不平度  $\eta(s)$  符合正态分布的均匀化随机过程,且均值为 0,则其功率谱密度  $S(\omega)$  可近似表示为<sup>[8]</sup>

$$S(\omega) = \frac{\mu}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad (7)$$

其中,  $\mu$  是跑道粗糙度系数,  $\alpha$  是相关系数. 在本文中,取  $\mu = 6 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{m}$ ,  $\alpha = 0.1 \text{ m}^{-1}$ .  $\eta(s)$  的相关函数可通过傅里叶逆变换得到

$$R[\eta(s_1)\eta(s_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(s_2-s_1)} d\omega. \quad (8)$$

变速滑跑飞机起落架所经受的激励可用上述图 2 表示,路程  $s$  与所经历的时间  $t$  之间存在非线性变换关系. 当飞机在跑道以常加速度  $a$  从静止开始变速滑跑时,这种非线性变换可表示为

$$s = \phi(t) = \frac{1}{2}at^2, \quad (9)$$

其中,  $a$  为飞机滑跑时加速度。

上述  $\eta(s)$  假设是具有零均值的高斯均匀随机过程,那么  $\eta(t)$  也具有零均值. 其相应的相关函数为<sup>[5]</sup>

$$E[\eta(t_1)\eta(t_2)] = E[\eta(s_1)\eta(s_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(s_2-s_1)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(\frac{1}{2}at_2^2 - \frac{1}{2}at_1^2)} d\omega. \quad (10)$$

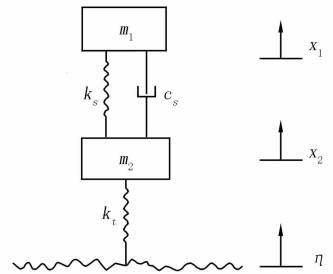


图1 飞机起落架分析模型

### 3 演变随机响应分析

引入状态变量

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

将(6)式化为状态变量的一阶微分方程

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\eta(t), \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix},$$

式中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵.

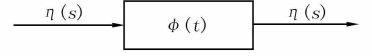


图2 跑道演变随机激励示意图

在演变随机激励  $\eta(t)$  的作用下,初始静止的线性系统响应为

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \mathbf{B} \eta(\tau) d\tau, \quad (13)$$

其中,  $\boldsymbol{\Phi}(t, \tau)$  为转移矩阵,  $\mathbf{B}$  为实常数矩阵. 即响应  $\mathbf{y}(t)$  的自相关函数为

$$\mathbf{R}_{yy}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \boldsymbol{\Phi}(t_1, \tau_1) \mathbf{B}(\tau_1) \mathbf{B}^T(\tau_2) \boldsymbol{\Phi}^T(t_2, \tau_2) E[\eta(\tau_1) \eta(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2, \quad (14)$$

由(11)式知

$$E[\eta(\tau_1) \eta(\tau_2)] = E[\eta(s_1) \eta(s_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega(\frac{1}{2}\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2)} d\omega, \quad (15)$$

因此

$$\mathbf{R}_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}(\omega, t_1) \mathbf{I}^*(\omega, t_2) S(\omega) d\omega, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{I}(\omega, t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \mathbf{B} e^{-j\omega\frac{1}{2}\alpha^2} d\tau. \quad (17)$$

令  $t_1 = t_2 = t$ , 得到系统均方响应

$$\mathbf{R}_{yy}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{I}(\omega, t) \mathbf{I}^*(\omega, t) S(\omega) d\omega, \quad (18)$$

上文中,  $\mathbf{I}(\omega, t)$  正是演变随机响应的调制函数矩阵, 并且  $\mathbf{I}(\omega, t)$  就是系统在零初始条件下, 原系统对应于确定性激励  $\mathbf{B} e^{-j\omega\frac{1}{2}\alpha^2}$  的瞬态解.

设  $\omega$  为固定参数, 用确定性激励  $e^{-j\omega\frac{1}{2}\alpha^2}$  来代替演变随机激励  $\eta(t)$ , 对应于原始系统微分方程可得

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b} e^{-j\omega\frac{1}{2}\alpha^2}. \quad (19)$$

由此可得, 原系统演变频率响应  $\mathbf{I}(\omega, t)$  就是方程(19)在零初始条件下的瞬态响应, 它可以采用四阶显式法进行数值求解.

需要指出, 本文所说的演变频率响应是系统的一种瞬态响应, 它不仅依赖于系统的动态特性, 而且还依赖于激励的演变特性. 这与通常意义下的系统频率响应特性是不同的<sup>[9-10]</sup>.

### 4 数值算例

本文以 Boeing 707 为例, 对飞机起飞阶段加速滑跑过程进行非平稳响应分析, 因此在如下图 3~6 中以飞机从静止开始逐渐加速的滑跑速度为横坐标, 起落架原始数据参照表 1. 采用 2000 条样本基于 Monte-Carlo 模拟得到的结果与本文所采用的演变随机响应分析方法计算得到结果进行对比, 如图 3 所示. 可以看出两种方法所得到结果能很好地吻合, 说明演变随机响应方法的准确性. 由于利用演变谱法可直接得到系统位移均方响应与速度均方响应, 故而分别给出了图 4~6 起落架振动的均方位移响应和均方速度响应. 为了

便于对比,图4~6均画出了飞机以相对速度匀速滑跑时系统的均方响应曲线.计算结果表明,飞机滑跑时的加速度越大,起落架系统的均方响应就越小.

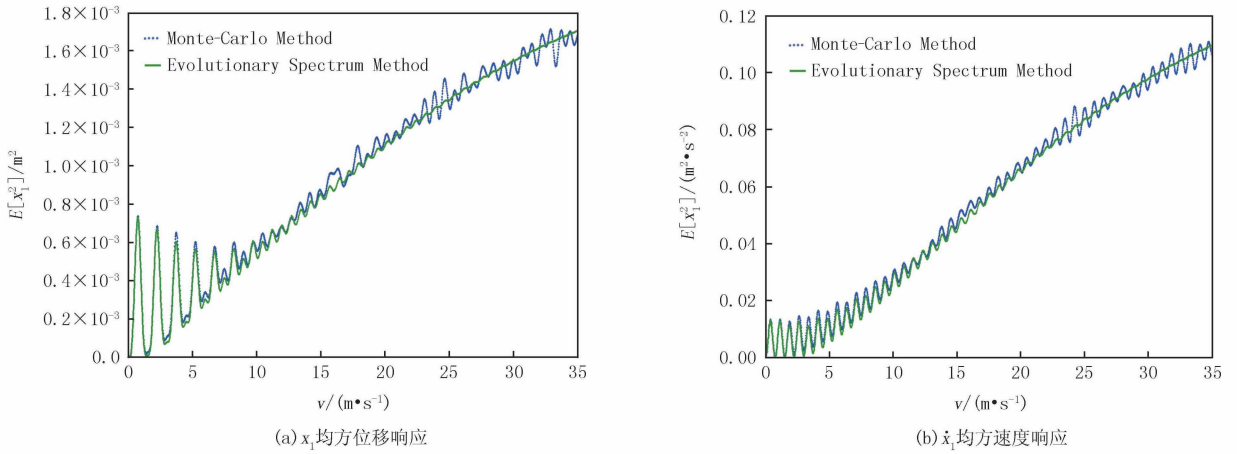


图3 演变随机响应方法与Monte-Carlo模拟法的对比

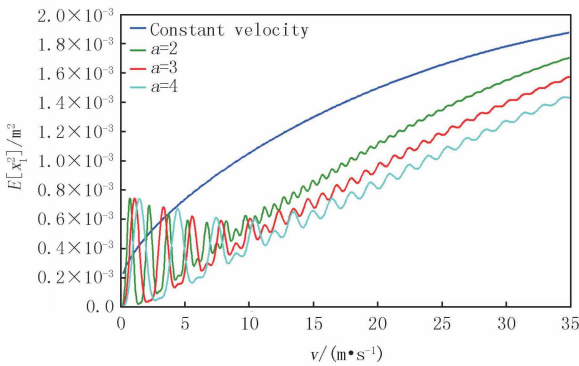


图4  $x_1$ 位移均方响应

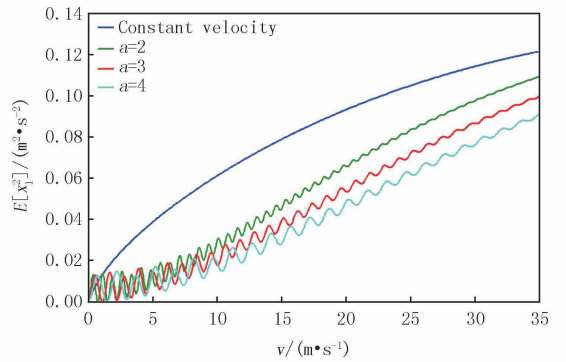


图5  $x_1$ 速度均方响应

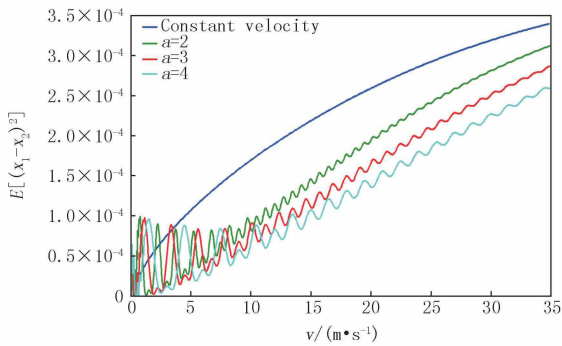


图6  $x_1-x_2$ 相对位移均方响应

表1 Boeing 707性能参数

Parameter	Boeing 707
$m_1/\text{kg}$	$1.33 \times 10^5$
$m_2/\text{kg}$	$2.294 \times 10^3$
$k_t/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$1.7 \times 10^7$
$D_s/(\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2)$	$8.8 \times 10^5$
$P_0/(\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$	$2.66 \times 10^6$
$V_0/\text{m}^3$	$3 \times 10^{-2}$
$F_s/\text{N}$	$1.303 \times 10^6$

另外需要指出以下3点:1)图3通过对两种方法的结果对比,验证本文所述演变谱法的准确性.2)图3~6中,在速度较小时,均出现较大波动,这是由演变随机激励调制规律造成的,即对应于图2中自变量的非线性变换,并且选取不同的路面谱密度函数,波动幅度会有所不同.3)对应于线性系统,输入为0均值的高斯过程,输出也一定是0均值的高斯过程,故利用演变谱法得到的系统均方响应后,如图4~6,就可以确定它们的概率密度函数等统计特性.

## 5 结 论

飞机在机场跑道变速滑跑时,受到的是非平稳随机激励.本文利用演变谱方法对其进行动响应分析.其中,演变频率响应可以解释为系统在确定性激励下的瞬态响应,并且只要求得了演变频率响应,那么也就得到了演变随机响应的谱特性.数值模拟结果表明,当飞机在跑道上变速滑跑时,系统的位移与速度均方响应随滑跑加速度的不同而改变,且滑跑加速度越大,系统均方响应越小,这与文献[2]中给出的结果是相符的.不同的是,本文所述方法可方便地计算得到整个起降过程中起落架系统均方响应的时间历程.这一结果或可为起落架设计提供参考.

## 参 考 文 献

- [1] Hammond J K, Harrison R F, Hammond J K, et al. Non-stationary Response of Vehicles on Rough Ground—A State Space Approach[J]. *Journal of Dynamic Systems Measurement & Control*, 1981, 103(3): 245-250.
- [2] Nie Hong. Analysis for aircraft taxiing at variable velocity on unevenness runway by the power spectral density method[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2000, 17(1): 64-70.
- [3] Harrison, Frederick R. The non-stationary response of vehicles on rough ground[D]. Southampton: University of Southampton, 1983.
- [4] 郑浩哲. 空间时间域路面行驶车辆的演变随机响应分析[J]. *振动与冲击*, 2012, 31(12): 59-62.
- [5] 赵又群, 何小明, 郭孔辉. 汽车由路面激发的演变随机响应预测[J]. *机械工程学报*, 2004, 40(1): 179-182.
- [6] 吴卫国, 孙建桥, 冷永刚, 等. 飞机起落架动力学建模及着陆随机响应分析[J]. *航空学报*, 2016, 37(4): 1228-1239.
- [7] 刘莉, 杨国柱. 起落架缓冲系统参数对飞机滑行动态响应的影响[J]. *航空学报*, 1992, 13(6): 266-273.
- [8] Yadav D, Nigam N C. Ground induced non-stationary response of vehicles[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1978, 61(1): 117-126.
- [9] 方同. *工程随机振动*[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [10] 方同, 孙木楠, 张天舒. 相关演变随机激励下响应演变谱矩阵的表达式[J]. *应用力学学报*, 2008, 25(3): 351-354.

# Evolutionary Random Response Analysis for Aircraft Taxiing at Variable Velocity on Unevenness Runway

Zhao Yingfang, Leng Xiaolei

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,  
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** In this paper, the non-stationary response problem of aircraft landing gear taxiing over an unevenness runway at variable velocity is studied by a so called evolutionary spectrum method. As an aircraft gliding on a runway of an airport, the foundation excitation of the runway is transformed to non-stationary random excitation, for the variable velocity of the aircraft. Fortunately, such kind of non-stationary random excitation can be represented as an evolutionary random excitation. The time varied correlation of this non-stationary random excitation can be expressed in a power spectral density of a stationary one and a nonlinear transformation. So the evolutionary spectrum method can be applied to analyze the non-stationary random response of the landing gear system. Numerical examples show that the suggested methods are effective.

**Keywords:** evolutionary spectrum; landing gear; taxiing; dynamic response; random excitation; non-stationary

[责任编辑 杨浦]