

具有最大 A_α -特征值的符号完全图

张林, 李丹

(新疆大学 数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830017)

摘要:符号图 $\Sigma = (G, \sigma)$ 由它的底图 $G = (V, E)$ 与符号函数 $\sigma : E \rightarrow \{-1, 1\}$ 组成. 设 $\alpha \in [0, 1]$, Belardo 定义符号图 A_α -矩阵为: $A_\alpha(\Sigma) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(\Sigma)$, 其中 $A(\Sigma)$ 是符号图 Σ 的邻接矩阵, $D(G)$ 是 G 的度对角矩阵. 设 K_n 表示 n 阶完全图, T 表示树. 设 (K_n, H^-) 表示负边导出子图是 H 的符号完全图. 当 $0.5 < \alpha < 1$ 时, 确定了符号图 (K_n, T^-) 的最大 A_α -特征值达到最大时 T 的结构.

关键词:符号图; 完全图; 最大特征值

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-2367(2024)04-0080-07

1 预备知识

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个简单连通图, 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和 $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 分别称为图 G 的顶点集和边集. 若 $v_i, v_j \in E(G)$, 则 v_i, v_j 在图 G 中相邻, 记作 $v_i \sim v_j$; 否则 v_i, v_j 在图 G 中不相邻, 记作 $v_i \not\sim v_j$. 图 G 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$. 当 v_i, v_j 相邻时, $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$. 符号图源于社会网络, 最早由 HARARY^[1] 提出并开始研究, 他将图的每条边加权 $+1$ (两人有正面合作关系) 或 -1 (两人有负面合作关系). 符号图 $\Sigma = (G, \sigma)$ 是由图 $G = (V, E)$ 与符号函数 $\sigma : E \rightarrow \{-1, 1\}$ 组成, 其中图 G 是其底图, σ 是符号图 Σ 的符号, 用 ± 1 来表示边的符号. 设 $M = M(\Sigma)$ 为符号图 $\Sigma = (G, \sigma)$ 的实矩阵, 且 $P_\lambda(M) = \det(\lambda I - M)$ 是 M -多项式, 称 M 的谱为符号图 Σ 的 M -谱. 一般地, 将 M 的谱表示为 $\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \dots \geq \lambda_n(M)$. 定义符号图 $\Sigma = (G, \sigma)$ 的邻接矩阵为 $A = A(\Sigma) = (\sigma_{ij})$. 若顶点 v_i 和 v_j 之间连正边, 则 $\sigma_{ij} = 1$; 若顶点 v_i 和 v_j 之间连负边, 则 $\sigma_{ij} = -1$; 否则为 0. 如果符号圈包含偶(奇)数条负边, 则称其是正(负)圈. 若符号图的所有圈均为正圈, 则称其平衡; 否则称其非平衡. 一般图可以看作是所有边均为正的(平衡)符号图.

2017 年, NIKIFOROV^[2] 提出一般图的 A_α -矩阵: $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G)$, 其中 $\alpha \in [0, 1]$, $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵, $D(G) = \text{diag}(d_{v_1}, d_{v_2}, \dots, d_{v_n})$ 是 G 的度对角矩阵, d_{v_i} 表示顶点 v_i 的度, 即与顶点 v_i 相连的边数. 显然, A_α -矩阵是 $A(G)$ 和 $D(G)$ 的凸组合, 且 $A_0(G) = A(G)$, $A_1(G) = D(G)$. A_α -矩阵特征值模的最大值称为 A_α -谱半径. 关于 A_α -谱半径的相关研究成果详见文献[2-7]. 类似地, 当 $\alpha \in [0, 1]$ 时, BELARDO 等^[8] 定义了符号图的 $A_\alpha(\Sigma)$ -矩阵: $A_\alpha(\Sigma) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(\Sigma)$, 其中 $A(\Sigma)$ 是符号图 Σ 的邻接矩阵. 设 K_n 表示 n 阶完全图, P_r, C_r 和 $K_{1,r-1}$ 分别表示 r 阶的路, 圈和星图. 设 $D_{s,t}$ 是在 P_2 的两个端点分别悬挂 s 和 t 个悬挂点得到的图. 设 (K_n, H^-) 表示负边导出子图是 H 的符号完全图. 设 $\lambda_1(\Sigma)$ 表示符号图 Σ 的 A_α -矩阵的最大特征值. 当 $\alpha = 0$ 时, 已有一些关于 $\lambda_1(\Sigma)$ 的研究. KOLEDIN 等^[9] 在固定阶数、边数和负

收稿日期: 2023-02-27; 修回日期: 2023-05-06.

基金项目: 国家自然科学基金(12361071; 11901498); 新疆维吾尔自治区高校科研计划自然科学重点项目(XJEDU2021H001).

作者简介: 张林(1996-), 女, 山西长治人, 新疆大学硕士研究生, 研究方向为图论及其应用, E-mail: 1173153404@qq.com.

通信作者: 李丹(1988-), 女, 新疆大学副教授, 博士, 研究方向为图论及其应用, E-mail: ldxjedu@163.com.

引用本文: 张林, 李丹. 具有最大 A_α -特征值的符号完全图[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2024, 52(4): 80-86. (Zhang Lin, Li Dan. On the largest-eigenvalue of signed complete graphs[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2024, 52(4): 80-86. DOI: 10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.02.27.0001.)

边数的连通符号图中刻画了 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图,并猜想:负边数为 $k(k < n - 1)$ 的 n 阶符号完全图中 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图为 $(K_n, K_{1,k}^-)$.AKBARI 等^[10] 证明了此猜想.KAFAI 等^[11] 在所有符号图 (K_n, U^-) 中刻画了 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图,其中 U 是 K_n 的单圈子图.LI 等^[12] 在负边导出子图为生成树的所有非平衡符号图中刻画了 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图.更多结果见参考文献[13-15].受到以上文献启发,本文将考虑当 $0.5 < \alpha < 1$ 时,符号图 (K_n, T^-) 的 $\lambda_1(\Sigma)$ 达到最大时 T 的结构,其中 T 为树.

2 主要结论

设 λ 为 $A_\alpha(\Sigma)$ -矩阵的特征值,则由 $A_\alpha(\Sigma)X = \lambda X$ 可得顶点 v 对应的特征等式如下: $\lambda(A_\alpha(\Sigma))x_v = \alpha d_v x_v + (1 - \alpha) \sum_{u \sim v} \sigma_{uv} x_u$.

引理 1 令 r, s 和 t 是符号图 Σ 的不同顶点且 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是 $\lambda_1(\Sigma)$ 对应的单位特征向量.设 Σ' 是转换 Σ 的正边 rs 和负边 rt 的符号得到的图.若 $x_r \geq 0, x_s \leq x_t$ 或者 $x_r \leq 0, x_s \geq x_t$,则 $\lambda_1(\Sigma') \geq \lambda_1(\Sigma)$.如果 $x_r \neq 0$ 或者 $x_s \neq x_t$,那么 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$.

证明 因为 $x_r(x_t - x_s) \geq 0$, 所以

$$\lambda_1(\Sigma') - \lambda_1(\Sigma) \geq X^T(\alpha \mathbf{D}(G) + (1 - \alpha)\mathbf{A}(\Sigma') - \alpha \mathbf{D}(G) - (1 - \alpha)\mathbf{A}(\Sigma))X = 4x_r(1 - \alpha)(x_t - x_s) \geq 0.$$

如果 $\lambda_1(A_\alpha(\Sigma')) = \lambda_1(A_\alpha(\Sigma))$,那么 X 也是 $A_\alpha(\Sigma')$ 的一个单位特征向量.当 $x_r \neq 0$ (或者 $x_s \neq x_t$) 时,顶点 s (或者 r) 所对应的特征等式不成立,因此 $\lambda_1(\Sigma') - \lambda_1(\Sigma) > 0$.

引理 2 假设 n, k 是任意正整数且 $n \geq k + 1$,则 $\lambda_1(K_n, K_{1,n-1}^-) \geq \lambda_1(K_n, K_{1,k}^-)$,等号成立当且仅当 $k = n - 1$.

证明 $P_\lambda(A_\alpha(K_n, K_{1,k}^-)) = \det(\lambda I - A_\alpha(K_n, K_{1,k}^-)) =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha \\ \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 \\ 1-\alpha & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha \\ -\lambda + \alpha n - 1 & \lambda - \alpha n + 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\lambda + \alpha n - 1 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda + \alpha n - 1 & \lambda - \alpha n + 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda + \alpha n - 1 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 \\ 1-\alpha & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \eta & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & (n-k-1)(\alpha-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha \\ 0 & \lambda - \alpha n + 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k(\alpha-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \mu & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda - \alpha n + 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 \\ k(1-\alpha) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & (n-k-1)(\alpha-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - \alpha n + 1)^{n-3} f_{1,k}(\lambda),$$

其中 $\eta = \lambda - \alpha(n-1) + (k-1)(\alpha-1)$, $\mu = \lambda - \alpha(n-1) + (n-k-2)(\alpha-1)$, 以及

$$f_{1,k}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha(n-1) + (k-1)(\alpha-1) & (n-k-1)(\alpha-1) & 1-\alpha \\ k(\alpha-1) & \lambda - \alpha(n-1) + (n-k-2)(\alpha-1) & \alpha-1 \\ k(1-\alpha) & (n-k-1)(\alpha-1) & \lambda - \alpha(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - (2n\alpha + n - 3)\lambda^2 - (-n^2\alpha^2 - 2n^2\alpha + 4n\alpha + 2n - 3)\lambda + (4k^2 - 4kn + 4k)\alpha^3 + (-n^3 - 12k^2 + 12kn + n^2 - 12k)\alpha^2 + (12k^2 - 12kn + 2n^2 + 12k - 2n)\alpha - 4k^2 + 4kn - 4k - n + 1.$$

计算可得 $P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, K_{1,k}^-)) - P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, K_{1,n-1}^-)) = -4(\lambda - \alpha n + 1)^{n-3}(\alpha-1)^3(n-k-1)$. 由于 $n \geq k+1$, 那么 $P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, K_{1,k}^-)) - P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, K_{1,n-1}^-)) \geq 0$. 因此 $\lambda_1(K_n, K_{1,n-1}^-) \geq \lambda_1(K_n, K_{1,k}^-)$, 等号成立当且仅当 $k = n-1$.

注意到 $P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s,t}^-)) = \det(\lambda I - \mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s,t}^-)) =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ 1-\alpha & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \lambda - \alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \lambda - \alpha(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ 1-\alpha & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\lambda + \alpha n - 1 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda + \alpha n - 1 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda + \alpha n - 1 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \alpha(n-1) & s(1-\alpha) & \cdots & 1-\alpha & 1-\alpha & t(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 \\ 1-\alpha & \theta & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & t(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\alpha & s(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & \lambda - \alpha(n-1) & t(1-\alpha) & \cdots & 1-\alpha & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 \\ \alpha-1 & s(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \omega & \cdots & \alpha-1 & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha-1 & s(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & t(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & \psi & \cdots & \alpha-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha n + 1 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - \alpha n + 1)^{n-5} f_{s,t}(\lambda),$$

其中 $\theta = \lambda - \alpha(n-1) + (s-1)(\alpha-1)$, $\omega = \lambda - \alpha(n-1) + (t-1)(\alpha-1)$, 以及 $\psi = \lambda - \alpha(n-1) + (n-s-t-3)(\alpha-1)$,

$$f_{s,t}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha(n-1) & s(1-\alpha) & 1-\alpha & t(\alpha-1) & (n-s-t-2)(\alpha-1) \\ 1-\alpha & \theta & \alpha-1 & t(\alpha-1) & (n-s-t-2)(\alpha-1) \\ 1-\alpha & s(\alpha-1) & \lambda - \alpha(n-1) & t(1-\alpha) & (n-s-t-2)(\alpha-1) \\ \alpha-1 & s(\alpha-1) & 1-\alpha & \omega & (n-s-t-2)(\alpha-1) \\ \alpha-1 & s(\alpha-1) & \alpha-1 & t(\alpha-1) & \psi \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^5 + (-4n\alpha - n + 5)\lambda^4 + g_1(\lambda)\lambda^3 + g_2(\lambda)\lambda^2 + g_3(\lambda)\lambda + g_4(\lambda), \text{ 且}$$

$$g_1(\lambda) = 2(n\alpha - 1)(3n\alpha + 2n - 5),$$

$$g_2(\lambda) = (-4n^3 - 4ns - 4nt + 4s^2 + 4t^2 - 4n + 12s + 12t + 8)\alpha^3 + (-6n^3 + 18n^2 + 12ns + 12nt - 12s^2 - 12t^2 + 12n + 36s + 36t - 24)\alpha^2 + (12n^2 - 12ns - 12nt + 12s^2 + 12t^2 - 36n + 36s + 36t + 24)\alpha + 4ns + 4nt - 4s^2 - 4t^2 - 2n - 12s - 12t + 2,$$

$$g_3(\lambda) = (n\alpha - 1)((n^3 + 8ns + 8nt - 8s^2 - 8t^2 + 8n - 24s - 24t - 16)\alpha^3 + (4n^3 - 7n^2 - 24ns - 24nt + 24s^2 + 24t^2 - 24n + 72s + 72t + 48)\alpha^2 + (-8n^2 + 24ns + 24nt - 24s^2 - 24t^2 + 35n - 72s - 72t - 48)\alpha - 8ns - 8nt + 8s^2 + 8t^2 - 4n + 24s + 24t + 11),$$

$$g_4(\lambda) = (-4n^3(s+t+1) + 4n^2(s^2+t^2+3s+3t+2) + 16st(n-s-t-2))\alpha^5 + (-n^5 + n^4 + 12n^3(s^2+t^2+1) - 4n^2(3s^2+3t^2-7s-7t-4) - 4n(2s^2+20st+2t^2+6s+6t+4) + 80st(s+t+2))\alpha^4 + (4n^4 - 4n^3(3s+3t+4) + 12n^2(s^2+t^2+s+t) + 4n(6s^2+6t^2+40st+17s+17t+11) - 160s^2t - 160st^2 + 4s^2 - 320st + 4t^2 + 12s + 12t + 8)\alpha^3 + (n^3(4s+4t-2) + n^2(-4s^2-4t^2+12s+12t+22) - n(24s^2+24t^2+160st+60s+60t+36)n - 12t^2 + 320st) + (160st^2 + 160s^2t - 12s^2 + 320st - 12t^2 - 36s - 36t - 24)\alpha^2 + (-n^2(8s+8t+4) + n(8s^2+80st+8t^2+12s+12t) - 80s^2t - 80st^2 + 12s^2 - 160st + 12t^2 + 36s + 36t + 24)\alpha + (-16st + 4s + 4t + 3)n + 16s^2t + 16st^2 - 4s^2 + 32st - 4t^2 - 12s - 12t - 7.$$

则以下结论成立.

引理 3 假设 n, s, t 是任意正整数且 $n \geq s + t + 2, t \geq s$, 则 $\lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1,n-3}^-) \geq \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s,t}^-)$, 等号成立当且仅当 $s = 1, t = n - 3$.

证明 若 $t > s + 1$ 且 $s > 1$, 则

$$P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1,t+1}^-)) - P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s,t}^-)) = -8(\lambda - \alpha n + 1)^{n-5}(\alpha - 1)^3(s - t - 1)h(\lambda),$$

其中, $h(\lambda) = (n^2 - 2n + 2s + 2t + 4)\alpha^2 + ((-2\lambda + 2)n - 4s - 4t - 8)\alpha + \lambda^2 - 2n + 2s + 2t + 2\lambda + 5$. 令 $\lambda_1 = \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s,t}^-) > n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n - 8}$. 计算可得:

$$f_{s,t}(n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n - 8}) = 4(\alpha - 1)^5((n^2 - 8n)\sqrt{2n - 8} + h_1(n)),$$

其中, $h_1(n) = n^3 - 2n^2s - 2n^2t + 2s^2n + 4nst + 2t^2n - 4s^2t - 4st^2 - 10n^2 + 14ns + 14nt - 8s^2 - 8st - 8t^2 + 28n - 24s - 24t - 16$, 且 $h'_1(n) = 3n^2 + 2(-2s - 2t - 10)n + 2s^2 + 4st + 2t^2 + 14s + 14t + 28$. 由于 $h'_1(n)$ 关于 n 的对称轴为 $2s/3 + 2t/3 + 10/3 < s + t + 2 \leq n$ 且 $h'_1(n) > 0$, 所以 $h_1(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h_1(s + t + 2) = (-t + 2 + s)(t - 2 + s)(-t - 2 + s) \geq 0$. 因此, $f_{s,t}(n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n - 8}) < 0$.

进而计算可得 $h(n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n + 2(s + t + 2)}) = 0$ 且当 $\lambda > n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n + 2(s + t + 2)}$ 时单调递增. 因为 $\lambda_1 > n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n - 8} > n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n + 2(s + t + 2)}$, 所以 $h(\lambda_1) > h(n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n - 8}) > 0$. 因此, $P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1,t+1}^-)) - P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s,t}^-)) = P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1,t+1}^-)) < 0$. 当 $t = s + 1$ 时, 计算可得 $P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1,s+2}^-)) - P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s,s+1}^-)) = 16(\lambda - \alpha n + 1)^{n-5}(\alpha - 1)^3g(\lambda)$, 其中 $g(\lambda) = n^2\alpha^2 - 2\lambda n\alpha - 2n\alpha^2 + 4\alpha^2s + \lambda^2 + 2n\alpha + 6\alpha^2 - 8\alpha s + 2\lambda - 2n - 12\alpha + 4s + 7$. 令

$\lambda_1 = \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s,t}^-) = \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s,s+1}^-) > n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n - 8}$. 当 $t = s + 1$ 时, 计算可得:

$$f_{s,s+1}(n\alpha - 1 + (\alpha - 1)\sqrt{2n - 8}) = (\alpha - 1)^5((2n - 8)^{5/2} + 4n^3 - 16n^2s + 32s^2n - 32s^3 - 48n^2 + 144ns - 144s^2 + 176n - 304s - 192) < (\alpha - 1)^5((2n - 8)^2 + 4n^3 - 16n^2s + 32s^2n - 32s^3 - 48n^2 + 144ns - 144s^2 + 176n - 304s - 192) = (\alpha - 1)^5h_2(n),$$

其中, $h_2(n) = (2n-8)^2 + 4n^3 - 16n^2s + 32s^2n - 32s^3 - 48n^2 + 144ns - 144s^2 + 176n - 304s - 192$, 且 $h'_2(n) = 12n^2 - 32ns + 32s^2 - 88n + 144s + 144$, $h''_2(n) = 24n - 32s - 88 > 0$, 即 $h'_2(n)$ 随 n 严格单调递增. 当 $n \geq s+t+2=2s+3$ 时, $h'_2(2s+3) = 4(2s+3)(2s-1) > 0$, 即 $h_2(n)$ 随 n 严格单调递增. 计算可得 $h_2(2s+3) = 8(2s-1)(s-2) \geq 0$. 因此, 当 $t=s+1$ 时, $f_{s,s+1}(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) \leq 0$. 同理可得 $g(\lambda_1) > g(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) = 4\alpha^2s - 2\alpha^2 - 8\alpha s + 4\alpha + 4s - 2 = 2(\alpha-1)^2(2s-1) > 0$. 因此, 当 $t=s+1$ 且 $s > 1$ 时, 有

$$P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1, s+2}^-)) - P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s, s+1}^-)) = P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1, s+2}^-)) < 0.$$

当 $t=s$ 时, 计算可得:

$$P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1, s+1}^-)) - P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s, s}^-)) = 8(\lambda - \alpha n + 1)^{n-5}(\alpha-1)^3 t(\lambda),$$

其中, $t(\lambda) = n^2\alpha^2 - 2\lambda n\alpha - 2n\alpha^2 + 4\alpha^2s + \lambda^2 + 2n\alpha + 4\alpha^2 - 8\alpha s + 2\lambda - 2n - 8\alpha + 4s + 5$. 令 $\lambda_1 = \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s, s}^-) = \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s, s}^-) > n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}$. 当 $t=s$ 时, 计算可得:

$$f_{s, s}(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) = 2(\alpha-1)^5 h_3(n)(n-2s + \sqrt{2n-8} - 4),$$

其中, $h_3(n) = (4s-4)\sqrt{2n-8} + 8s^2 + (-4n+8)s + 2n^2 - 12n + 16$. 令 $q_1(n) = (-4n+8)s + 8s^2 + 2n^2 - 12n + 16 = 2n^2 + (-4s-12)n + 8s^2 + 8s + 16$, 计算可知 $q_1(n)$ 关于 n 的对称轴为 $s+3 < n$ 且 $n > 2s+2$, 则 $q_1(n)$ 随 n 严格单调递增且 $q_1(2s+2) = 8s(s-1) > 0$. 因此 $f_{s, s}(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) = 2(\alpha-1)^5 h_3(n)(n-2s + \sqrt{2n-8} - 4) < 0$. 同理可得 $t(\lambda_1) > t(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) = 4(\alpha-1)^2(s-1) > 0$. 因此, 当 $t=s$ 时,

$$P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1, s+1}^-)) - P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s, s}^-)) = P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{s-1, s+1}^-)) < 0.$$

综上所述, 当 $t \geq s$ 时, 有 $\lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s-1, t+1}^-) \geq \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s, t}^-)$. 归纳可得 $\lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1, s+t-1}^-) \geq \dots \geq \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s, t}^-)$. 通过计算可得 $P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, t}^-)) - P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-)) = -4(\lambda - \alpha n + 1)^{n-5} t(\alpha-1)^3 h_4(\lambda)$, 其中 $h_4(\lambda) = (-n\alpha + \lambda + 2\alpha - 1)(-n\alpha + \lambda - 2\alpha + 3)$. 令 $\lambda_1 = \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-) \geq n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}$. 当 $n \geq 6$ 时, $h_4(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) = 2(\alpha-1)^2(n-6) \geq 0$. 因此 $P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, t}^-)) - P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-)) = P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, t}^-)) \geq 0$. 当 $n=4, 5$ 时, 双星图唯一, $(K_n, \mathbf{D}_{s, t}^-) = (K_4, \mathbf{D}_{1, 1}^-), (K_5, \mathbf{D}_{s, t}^-) = (K_5, \mathbf{D}_{1, 2}^-)$. 因此, $\lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1, t}^-) \leq \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-)$, 等号成立当且仅当 $T \cong \mathbf{D}_{1, n-3}$. 当 $s=1$ 时, 结论显然成立. 因此, 当 $n \geq s+t+2$ 且 $t \geq s \geq 1$ 时, 有 $\lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-) \geq \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{s, t}^-)$ 等号成立当且仅当 $T \cong \mathbf{D}_{1, n-3}$.

注 1 $f_{1, k}(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) = (\alpha-1)^3 p(n)$, 其中 $p(n) = (2n-8)^{3/2} + 4k^2 - 4kn + 2n^2 + 4k - 8n$. 计算可得 $p'(n) = 4n - 4k - 8 + 3\sqrt{2n-8}$, $p''(n) = 4 + 3/\sqrt{2n-8} > 0$, 因此 $p'(n)$ 随 n 严格单调递增. 当 $n \geq k+1$ 且 $n \geq 6$ 时, $p'(n) \geq p'(6) = 4n - 4k - 8 + 3\sqrt{2n-8} = 22 - 4k > 0$, 因此 $p(n)$ 随 n 严格单调递增. 计算可得 $p(n) \geq p(6) = 4(k^2 - 5k + 8) > 0$, 则当 $0.5 < \alpha < 1$ 时, $f_{1, k}(n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}) = (\alpha-1)^3 p(n) < 0$. 因此, 若 $n \geq 6, n \geq k+1$ 且 $0.5 < \alpha < 1$, 则 $\lambda_1 = \lambda_1(K_n, \mathbf{K}_{1, n-1}^-) > n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}$.

引理 4 假设 $0.5 < \alpha < 1$ 且 $n \geq 4$, 则 $\lambda_1(K_n, \mathbf{K}_{1, n-1}^-) > \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-)$.

证明 当 $n \geq 6$ 时,

$$P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-)) - P_\lambda(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{K}_{1, n-1}^-)) = -4(\alpha-1)^3 [2(2n-8)^{3/2} h_5(n) + 2(n-4)h_6(n)],$$

其中, $h_5(n) = 2n^2\alpha^2 - n^2\alpha - 3n\alpha + n + 1 = (n\alpha - 1)(-1 + 2\alpha n - n)$, $h_6(n) = n^3\alpha^2 + (2\alpha^2 - 4\alpha)n^2 + (-6\alpha^2 + 2\alpha + 5)n - 6\alpha^2 + 20\alpha - 14$. 令 $\lambda_1 = \lambda_1(K_n, \mathbf{K}_{1, n-1}^-) > n\alpha - 1 + (\alpha-1)\sqrt{2n-8}$. 当 $0.5 < \alpha < 1$ 时, $h_5(n) > 0$. 因此 $(2n-8)^{3/2} h_5(n) > 0$. 设 $h'_6(n) = 3n^2\alpha^2 + 2(2\alpha^2 - 4\alpha)n - 6\alpha^2 + 2\alpha + 5$, $h''_6(n) = 6\alpha^2 n + 4\alpha^2 - 8\alpha$. 由 $6\alpha^2 > 0$ 可知 $h''_6(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h''_6(4) = 28\alpha^2 - 8\alpha > 0$, 则 $h'_6(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h'_6(4) = 58\alpha^2 - 30\alpha + 5 > 0$. 因此, $h_6(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h_6(4) = 66\alpha^2 - 36\alpha + 6 > 0$. 则 $2h_5(n)(2n-8)^{3/2} + 2(n-4)h_6(n) > 0$. 因此,

$$P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-)) - P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{K}_{1, n-1}^-)) = P_{\lambda_1}(\mathbf{A}_\alpha(K_n, \mathbf{D}_{1, n-3}^-)) > 0.$$

通过计算可知 $\lambda_1(K_4, K_{\bar{1},3}) > \lambda_1(K_4, D_{\bar{1},1})$ 和 $\lambda_1(K_5, K_{\bar{1},4}) > \lambda_1(K_5, D_{\bar{1},2})$. 综上所述, 当 $n \geq 4$ 且 $0.5 < \alpha < 1$ 时, 有 $\lambda_1(K_n, K_{\bar{1},n-1}) > \lambda_1(K_n, D_{\bar{1},n-3})$.

定理 1 设 $0.5 < \alpha < 1$ 且 $n \geq 4$. 令符号图 $\Sigma = (K_n, T^-)$ 是最大 A_α -特征值达到最大的图, 则 $T \cong K_{1,n-1}$.

证明 假设 $T \not\cong K_{1,n-1}$, 则在 T 中存在 $P_4 = uvwz$. 设 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是 $\lambda_1(\Sigma)$ 对应的单位特征向量. 注意到若 X 是 $\lambda_1(\Sigma)$ 对应的特征向量, 则 $-X$ 也是它的特征向量. 因此, 考虑以下 8 种情况.

情形 1 $x_v = x_w = 0$. 首先, 断言 $x_z = 0$. 否则, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图, 则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 如果存在 $z' \in V(T)$ 使得 $zz' \in E(T)$ 和 $x_{z'} \neq 0$, 那么同样产生矛盾. 因此对于任意 $a \in V(T)$, 有 $x_a = 0$. 其次, 由于 X 不可能是零向量, 因此 T 不是 K_n 的支撑子图, 即存在 $t \in V(K_n) \setminus V(T)$ 使得 $x_t \neq 0$. 同时, 存在一个悬挂点 $s' \in V(T)$ 使得 $ss' \in E(T)$. 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $s't$ 和负边 $s's$ 的符号得到的图, 则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾.

情形 2 $x_w = 0$ 且 $x_v \neq 0$. 如果 $x_u \neq x_v$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 wu 和负边 wv 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 如果 $x_u = x_v$, 令符号图 Σ' 是通过转换的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾.

情形 3 $x_v = 0$ 且 $x_w \neq 0$. 如果 $x_z \neq x_w$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 vw 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 如果 $x_z = x_w$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾.

情形 4 $x_u = 0$ 且 $x_v, x_w \neq 0$. 如果 $x_v \neq x_w$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 如果 $x_v = x_w$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 wu 和负边 wv 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾.

情形 5 $x_u, x_v, x_w < 0$. 如果 $x_w \geq x_v$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 假设 $x_w < x_v$. 如果 $x_z \geq x_w$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 vz 和负边 vw 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 如果 $x_z < x_w$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾.

情形 6 $x_v, x_w < 0$ 且 $x_u > 0$. 令符号图是通过转换 Σ 的正边 wu 和负边 wv 的符号得到的图, 则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾.

情形 7 $x_u, x_v < 0$ 且 $x_w > 0$. 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图, 则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾.

情形 8 $x_u, x_w < 0$ 且 $x_v > 0$. 如果 $x_z \leq 0$. 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图, 则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 如果 $x_z > 0$. 若 $x_w \geq x_u$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zu 和负边 zw 的符号得到的图, 则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 因此 $x_w < x_u$. 若 $x_z \geq x_v$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uz 和负边 uv 的符号得到的图, 则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 因此, 可以得到 $x_w < x_u < 0 < x_z < x_v$. 假设存在 $z' \in V(T)$ 使得 $zz' \in E(T)$. 如果 $x_{z'} \geq 0$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $z'w$ 和负边 $z'z$ 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 如果 $x_{z'} < 0$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $z'v$ 和负边 $z'z$ 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾. 因此可知 z 是 T 的一个悬挂点. 同理可得, u 也是 T 的一个悬挂点. 显然, 如果存在 $v' \in V(T)$ 使得 $vv' \in E(T)$

且 $x_{v'} \geq 0$, 令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $v'u$ 和负边 $v'v$ 的符号得到的图, 那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$, 产生矛盾, 因此 $x_{v'} < 0$. 综上所述, T 是双星图.

由引理 2-4 及注 1 可知, 当 $n \geq 4$, $\lambda_1(K_n, K_{1,n-1}^-) > \lambda_1(K_n, \mathbf{D}_{1,n-3}^-)$. 因此, 若 $\Sigma = (K_n, T^-)$ 是符号完全图且使得 $\lambda_1(\mathbf{A}_\alpha(\Sigma))$ 最大, 则 $T \cong K_{1,n-1}$.

参 考 文 献

- [1] HARARY F. On the notion of balance of a signed graph[J]. Michigan Mathematical Journal, 1953, 2(2): 143-146.
 - [2] NIKIFOROV V. Merging the A - and Q -spectral theories[J]. Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2017, 11(1): 81-107.
 - [3] NIKIFOROV V, ROJO O. On the α -index of graphs with pendent paths[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 550: 87-104.
 - [4] CHANG A, TIAN F. On the spectral radius of unicyclic graphs with perfect matchings[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 370: 237-250.
 - [5] NING W J, LU M, WANG K. Maximizing the spectral radius of graphs with fixed minimum degree and edge connectivity[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 540: 138-148.
 - [6] LIN H Q, HUANG X, XUE J. A note on the A_α -spectral radius of graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 557: 430-437.
 - [7] XUE J, LIN H Q, LIU S T, et al. On the A_α -spectral radius of a graph[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 550: 105-120.
 - [8] BELARDO F, BRUNETTI M, CIAMPELLA A. On the multiplicity of α as an $A_\alpha(\Gamma)$ -eigenvalue of signed graphs with pendant vertices[J]. Discrete Mathematics, 2019, 342(8): 2223-2233.
 - [9] KOLEDIN T, STANIĆZ. Connected signed graphs of fixed order, size, and number of negative edges with maximal index[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2017, 65(11): 2187-2198.
 - [10] AKBARI S, DALVANDI S, HEYDARI F, et al. Signed complete graphs with maximum index[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2020, 40(2): 393.
 - [11] KAFAI N, HEYDARI F, RAD N J, et al. On the signed complete graphs with maximum index[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 2021, 45(6): 2085-2090.
 - [12] LI D, LIN H Q, MENG J X. Extremal spectral results related to spanning trees of signed complete graphs[J]. Discrete Mathematics, 2023, 346(2): 113250.
 - [13] 王狄建. 符号图谱的若干问题研究[D]. 长沙: 湖南师范大学, 2020.
 - [14] 张雪蕊. 关于符号图的最大特征值和图的小特征值的研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2023.
 - [15] 吴奇, 卢勇. 不存在秩为 $r(G) + 2c(G) - 1$ 或 $r(G) - 2c(G) + 1$ 的符号图[J]. 数学进展, 2023, 52(5): 804-818.
- WU Q, LU Y. Non-existence of signed graphs with rank $r(G) + 2c(G) - 1$ or $r(G) - 2c(G) + 1$ [J]. Advances in Mathematics(China), 2023, 52(5): 804-818.

On the largest A_α -eigenvalue of signed complete graphs

Zhang Lin, Li Dan

(College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi 830017, China)

Abstract: A signed graph $\Sigma = (G, \sigma)$ consists of an underlying graph $G = (V, E)$ and a sign function $\sigma: E \rightarrow \{-1, 1\}$. Let Σ be a signed graph, the matrix $\mathbf{A}_\alpha(\Sigma)$ is defined by Belardo as follows: $\mathbf{A}_\alpha(\Sigma) = \alpha \mathbf{D}(G) + (1 - \alpha) \mathbf{A}(\Sigma)$, where $\alpha \in [0, 1]$, $\mathbf{D}(G)$ is the diagonal matrix of the vertex degrees of G and $\mathbf{A}(\Sigma)$ is the adjacency matrix of Σ . Let K_n denote the complete graph of order n and T be a tree. Let (K_n, T^-) be a signed complete graph whose negative edges induce a subgraph H . In this paper, we characterize the extremal signed graph with maximum $\lambda_1(\mathbf{A}_\alpha(\Sigma))$ among graphs of type (K_n, T^-) .

Keywords: signed graph; complete graph; largest eigenvalue

[责任编辑 陈留院 赵晓华]