

# 规则网络中流耦合作用对爆发式同步的影响

张伟婧<sup>1</sup>, 刘维清<sup>1</sup>, 陈伟<sup>2</sup>

(1.江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000;2.北京邮电大学 理学院,北京 100876)

**摘要:**耦合振子系统的爆发式同步是许多生物系统自组织动力学行为的内在机制之一,因而倍受关注.考虑到现实生活中许多振子之间的相互作用是非对称性的,通过理论分析和数值计算方法,详细研究了规则网络中,流耦合作用对耦合相振子系统爆发式同步动力学行为的影响.结果表明,非对称的流耦合作用,在具有特定频率空间分布的耦合相振子系统中,有利于促进耦合相振子系统产生爆发式同步.耦合系统达到爆发式同步所需的临界耦合强度与流耦合强度成线性关系.此外,在同步区间可观察到集中锁相和分散锁相两种同步形式共存.通过理论分析,给出了流耦合作用对促进耦合相振子系统爆发式同步的内在机制.研究结果可以为更好地理解非对称耦合作用下耦合相振子系统的自组织现象提供理论支持.

**关键词:**规则网络;爆发式同步;流耦合

**中图分类号:**O415.3

**文献标志码:**A

同步现象<sup>[1]</sup>是指具有相互作用的系统之间形成的步调一致的运动,是耦合非线性系统中常见的动力学之一.因其对理解耦合振子系统在许多自组织动力学行为具有重要的意义,并广泛存在于医学、生物、物理及社会系统<sup>[2]</sup>,如帕金森疾病、萤火虫的同步闪烁、心脏起搏细胞而倍受关注.

通常在耦合振子系统走向同步的过程中,系统由非相干状态到相干状态的转变常表现为两种不同的过渡过程:一种是连续相变过程,即耦合振子系统先形成一个或几个小同步集团,而后随着耦合强度的增加,其他振子在耦合作用下逐步加入各同步集团而最终形成整个系统的同步;另一种是非连续相变过程(爆发式同步),即耦合振子系统随着耦合强度增加到某一临界值时突然整体形成同步集团<sup>[3-5]</sup>.癫痫病发作的本质是大脑中大量神经元突然反常同步放电而形成爆发式同步<sup>[6]</sup>.同时,大停电事件<sup>[7]</sup>也与爆发式同步密切相关.这激发了人们对复杂网络中耦合振子系统的爆发式同步动力学行为的兴趣<sup>[8-10]</sup>.Jesus等<sup>[4]</sup>以 Kuramoto 振子作为研究对象,取各耦合振子的固有频率等于所在节点的度,从而使无标度网络中的中枢节点的频率远远高于外围节点的频率,进而产生大的频率失配,抑制了小同步集团的形成.当耦合强度大于某一临界值时,耦合振子系统突然走向同步而产生了爆发式同步.随后 Leyva 等则在随机网络中通过特有的连边机制,形成较大的频率失配<sup>[11-12]</sup>,使任何一对耦合振子之间都很难形成同步小集团,进而在耦合强度大于某一临界值时产生明显的爆发式同步现象.

近年来,对提高网络同步能力的研究主要集中在改变网络拓扑结构<sup>[13-15]</sup>,改变网络中耦合作用的权重<sup>[16-18]</sup>、自适应调节<sup>[19]</sup>、时滞耦合<sup>[20-23]</sup>等方面.管曙光等<sup>[24]</sup>则发现在频率相关的加权耦合作用下,复杂网络中节点的频率分布类型不同会改变耦合振子系统走向同步的过渡过程的类型.当所引入的频率分布为非对称的单峰分布函数时,随着中心频率的右移,耦合相振子系统的同步过程会从一级相变转换为二级相变.文献<sup>[25]</sup>指出近邻耦合作用下,大规模小世界网络表现出很强的同步能力.然而,Strogatz 指出在近邻耦合作用下的规则网络中,耦合振子系统达到同步所需的临界耦合强度正比于 $\sqrt{N}$ ,因此,近邻耦合振子系统在热力学极限( $N \rightarrow \infty$ )下无法实现同步<sup>[26]</sup>.吴晔等<sup>[27]</sup>发现,通过优化耦合振子的频率的空间排列,可以促进耦

收稿日期:2017-11-05;修回日期:2017-11-27.

基金项目:国家自然科学基金(11765008;11405075);江西省青年科学家培养对象计划(赣科发计字[2014]91号)资助.

作者简介(通信作者):刘维清(1977-),男,江西兴国人,江西理工大学教授,研究方向为非线性动力学,E-mail:lwq\_jx@

合振子的同步能力,即在某些特定的频率空间排列下,只需要较小的耦合强度就能使大量的耦合振子达到同步.近期,陈伟等发现在特殊频率分布下,近邻耦合作用的规则网络系统中出现部分爆发式同步,而当引入相邻振子间的频率差的耦合权重因子时,可以产生经典的爆发式同步<sup>[28]</sup>.

单向耦合(流耦合)作用,是指子系统之间的有向作用,如军官对士兵的命令.有研究表明,耦合环形振子中,单向耦合作用有利于促使原来因阻尼而停振的无驱动振子重新起振,从而实现弱信号的检测<sup>[29]</sup>.同时,单向耦合神经元振子系统模型可以很好地描述昆虫的几种基本步态的产生机制<sup>[30]</sup>.在生态系统、神经网络等自然系统中,通常通过信息流的传输可以实现系统的同步<sup>[31-33]</sup>.基于以上考虑,为了更好地理解非对称耦合作用对规则网络中爆发式同步的影响,在对称耦合的 Kuramoto 相振子模型中引入非对称的流耦合作用,并分析流耦合作用强度对同步动力学行为的影响.结果表明,流耦合作用有利于促进爆发式同步.

## 1 模型和结果

采用经典的 Kuramoto 模型,在耦合项中引入非对称的流耦合作用后, $N$  个耦合相振子环(文中所有数值计算结果均在  $N=100$  的情况下获得)可以表述为

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{1}{3} [\epsilon \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + (\epsilon + \Delta) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)], i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中  $\theta_i$  是第  $i$  个节点的相位,  $\epsilon$  是耦合强度,  $\Delta$  为流耦合强度(其值反映了耦合作用的方向和不对称性的强弱),  $\omega_i$  是第  $i$  个节点的固有频率.采用周期边界条件即  $\theta_{N+1} = \theta_1, \theta_0 = \theta_N$ . 为了使耦合系统达到同步所需的临界耦合强度较小,耦合振子的固有频率空间分布如图 1 所示,描述方程为

$$\begin{cases} \omega_i = \frac{N-1+(-1)^i(2i-1)}{2(N-1)}, i \leq \frac{N}{2}, \\ \omega_i = 1 - \omega_{N+1-i}, i > \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

通常,耦合相振子系统的同步状态是指相同步,即任意两个振子之间的相位差为某一有限常数,即(常数)<sup>[34]</sup>.此时,两振子之间的平均频率相等.为了刻画耦合振子系统的同步情况,通常引入

序参量  $R$ ,  $r(t)e^{j\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{j\theta_i(t)}$ , 式中  $r(t)$  代表

平均场幅度,  $\psi(t)$  表示系统的平均相位<sup>[35-36]</sup>.定义  $R = \langle r(t) \rangle_T$ , 其中,  $\langle \cdot \rangle_T$  表示对时间求平均, 则  $0 \leq R \leq 1$ , 其大小刻画了耦合相振子系统的内在一致性,  $R$  越小, 说明耦合系统相关性越弱,  $R$  越大, 则说明耦合系统的相关性越强, 同步程度越高. 当  $R=1$  时, 耦合相振子系统中所有振子的相位均相同, 即完全同步. 陈伟等指出在对称耦合作用下, 随着耦合强度  $\epsilon$  的增加, 耦合相振子系统的序参量在准静态变化情形中, 会先随着耦合强度增加而线性增加, 直到耦合强度大于某一临界强度( $\epsilon_c = 0.75$ ) 时, 序参量  $R$  由 0.75 左右突然跳变到 1 附近. 而随着耦合强度从 1 减小到另一临界耦合强度( $\epsilon_c = 0.7$ ) 时, 序参量  $R$  在准静态变化情形中, 会从 1 附近突然跳变到 0.75 附近. 并将这种同步现象称为混合爆发式同步, 以区分经典的爆发式同步. 如图 2(a) 所示, 点线表示耦合强度  $\epsilon$  从 0 开始以步长  $h=0.05$  为间隔均匀增长至 1 时, 序参量  $R$  的演变过程, 即向前增加耦合强度的过程. 星线表示耦合强度  $\epsilon$  从 1 开始以步长  $h=0.05$  为间隔均匀减小至 0 时, 序参量  $R$  的演变过程, 即向后减小耦合强度的过程. 结果表明, 加上非对称的流耦合作用后, 随着流耦合强度的增加, 耦合振子系统达到混合爆发式同步所需的临界耦合强度  $\epsilon_c$  逐渐减小, 爆发式同步跳变前的序参量  $R$  也逐渐降低. (如图 2(b) ~ (d) 所示  $\Delta=0.5, 1.0, 1.2$  时对应的  $R$  与对称耦合强度  $\epsilon$  的关系图).

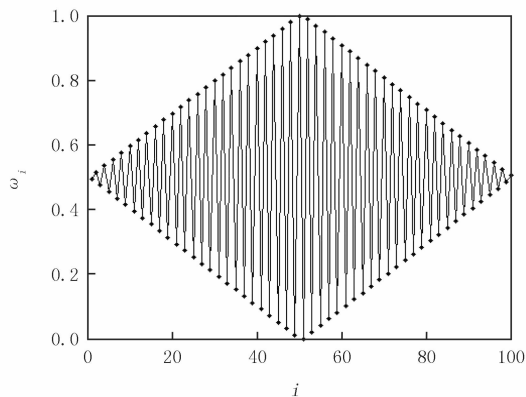


图 1 耦合相振子的固有频率空间分布

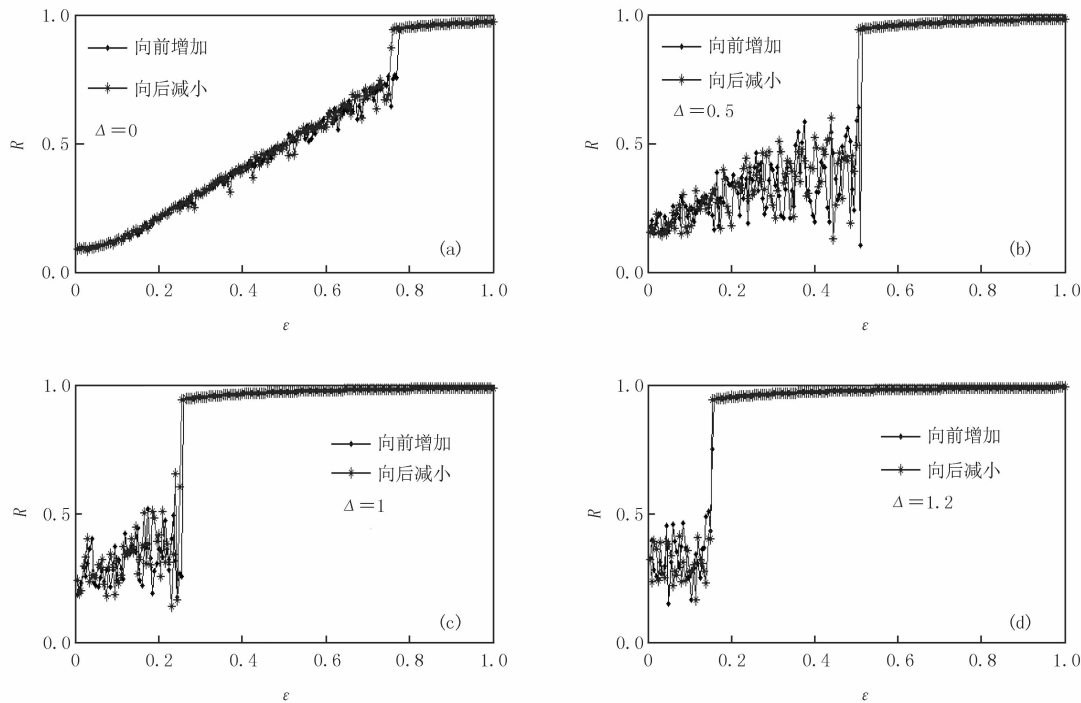


图2 序参量与耦合强度关系图

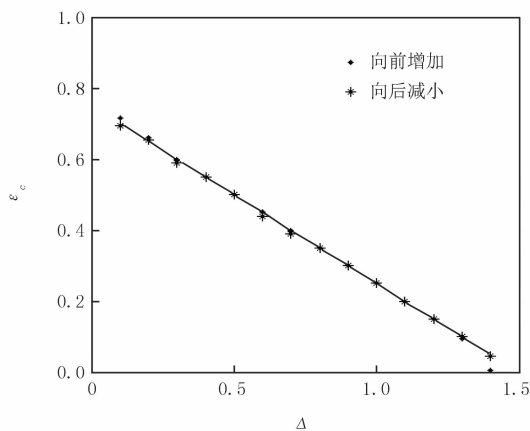
通过数值计算,可得到如图3所示的流耦合强度与实现爆发式同步所需的临界耦合强度  $\varepsilon_c$  关系图.由图3可知

$$\varepsilon_c = 0.75 - 0.5\Delta, \quad (3)$$

即随着不对称的流耦合强度的增加,耦合相振子达到爆发式同步所需的临界耦合强度  $\varepsilon_c$  线性地减小.为了进一步弄清流耦合强度促进爆发式同步机理,考察对称耦合强度  $\varepsilon$  一定时,不同的流耦合强度下耦合振子走向同步的动力学过程.结果表明,在无流耦合作用( $\Delta = 0$ )时,随着对称耦合强度  $\varepsilon$  的增加,频率失配较小的耦合振子间先形成部分同步集团.耦合强度进一步增加后,频率失配较大的振子会依次加入到

同步集团而使序参量  $R$  逐渐升高,直到耦合强度大于临界耦合强度  $\varepsilon_c$  时,剩余的频率失配较大的耦合相振子会突然集体加入到同步集团.把剩余部分振子突然整体加入到同步集团的同步过程称为爆发式同步.与经典爆发式同步相比,在出现爆发式同步前已经有一部分振子先形成同步子集团,因而称这种爆发式同步为混合爆发式同步.在没有流耦合作用时,加入到部分同步的耦合振子是关于  $i = \frac{N}{2}$  左右对称的.

图4(a)给出了对称耦合强度为  $\varepsilon = 0.3$ ,且无流耦合作用时,耦合振子( $N = 100$ )的平均频率与振子的空间位置关系图,其中前、后半部分加入同步集团的振子数均为13.而当引入不对称的流耦合作用后,之前所具有的对称性被打破,耦合系统中前、后半部分加入同步集团的振子数量不同,前半部分加入同步集团的振子数量大于后半部分加入同步集团的振子数量.图4(b)给出了对称耦合强度为  $\varepsilon = 0.3$ ,流耦合强度  $\Delta = 0.5$  时,耦合相振子的平均频率与相振子的空间位置关系图,其中前半部分有30个振子加入同步集团,而后半部分

图3 流耦合强度与爆发式同步跳变点的临界耦合强度  $\varepsilon_c$  关系图

有 20 个振子加入同步集团,为了考查不同流耦合强度和对称耦合强度对左、右两部分振子加入到同步集团的影响,分别定义左、右同步比例  $P_{LS} = 2 \frac{N_{LS}}{N}$ ,  $P_{RS} = 2 \frac{N_{RS}}{N}$ ,  $N_{LS}$  和  $N_{RS}$  分别为左、右半部分加入同步集团的振子数量.图 5(a)(b) 分别给出了  $\epsilon = 0.3$ (如图 5 实点所示),  $\epsilon = 0.5$ (如图 5 星号所示) 时,左、右半部分振子在达到爆发同步前加入到同步集团的相振子的同步比例与流耦合强度之间的关系.由图 5 中的拟合曲线可得到,当  $\epsilon = 0.1$  时,  $P_{LS} = 0.65\Delta + 0.1$ ,  $P_{RS} = 0.3\Delta + 0.1$ ;当  $\epsilon = 0.3$  时,  $P_{LS} = 0.65\Delta + 0.3$ ,  $P_{RS} = 0.3\Delta + 0.3$ .结果表明,对于任意对称耦合强度  $\epsilon$ ,左、右半部分振子的同步比例与耦合强度之间的关系分别满足关系

$$P_{LS} = 0.65\Delta + \epsilon, \tag{4}$$

$$P_{RS} = 0.3\Delta + \epsilon, \tag{5}$$

因此,不对称的流耦合作用有利于促进耦合振子加入同步集团,从而使达到爆发式同步所需的临界耦合强度减小.

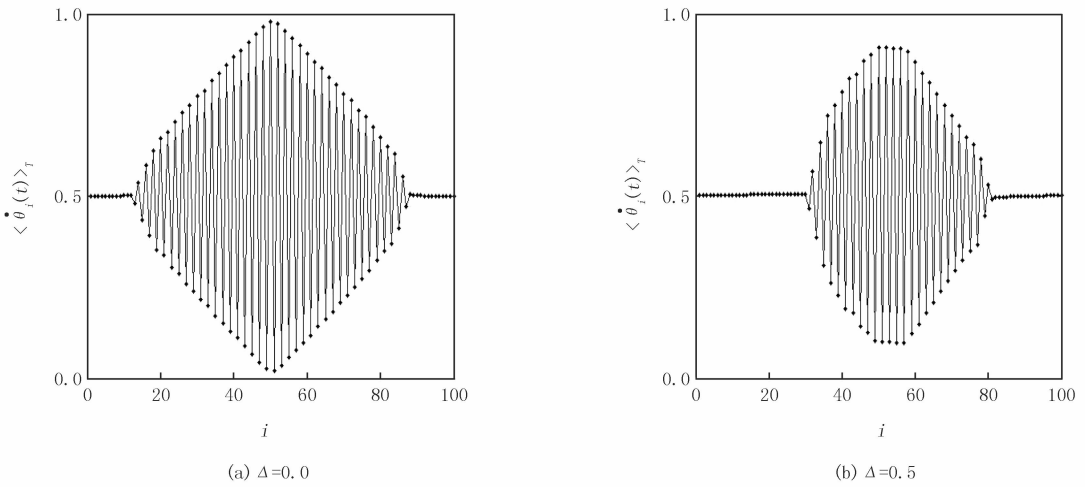


图 4 耦合强度时系统各节点平均频率图

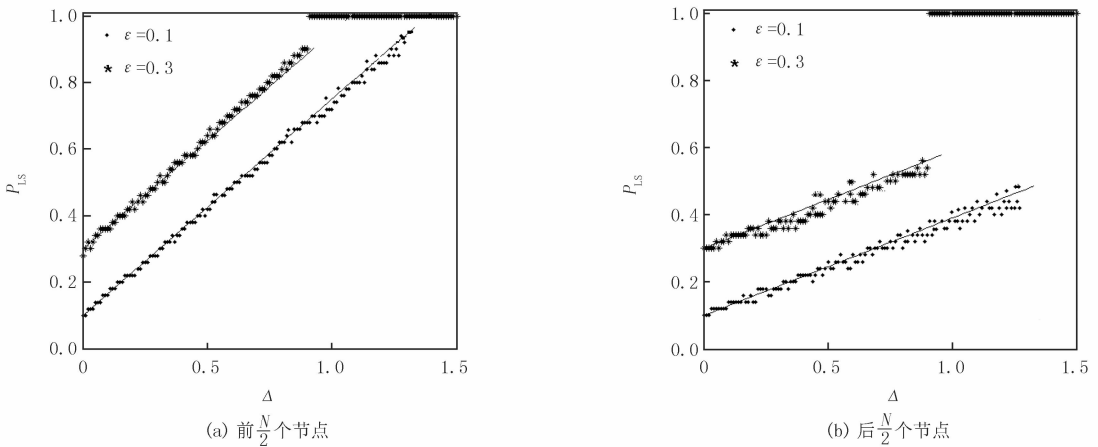
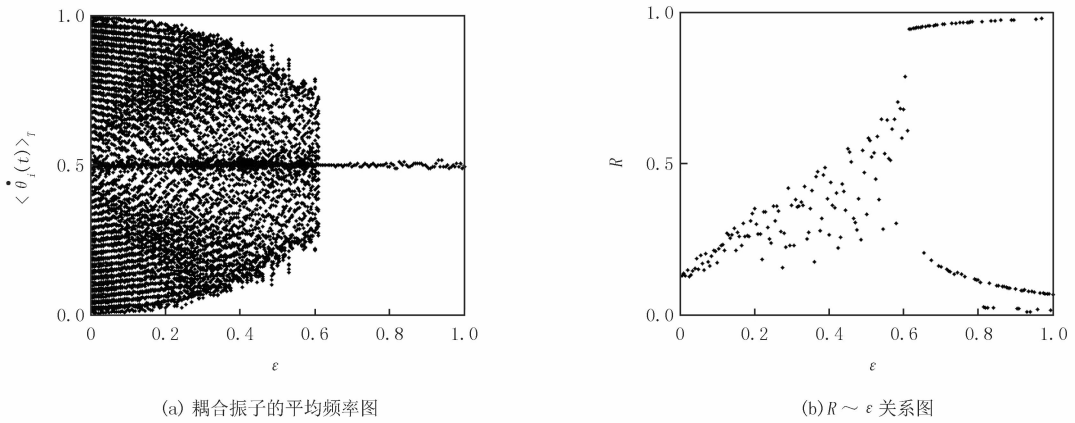


图 5 耦合系统节点的同步比例与流耦合强度的关系

值得注意的是,对于给定的流耦合强度  $\Delta$ ,当随机给定相振子的初始条件时,随着对称耦合强度  $\epsilon$  的增加,在爆发式同步区的耦合相振子系统的同步序参量  $R$  可能取 0 或 1 附近的两个值.即在爆发式同步区域内耦合振子具有两态共存现象.如图 6(a) 给出流耦合强度  $\Delta = 0.3$ ,耦合振子随机取相位初始值时,耦合振子的平均频率与对称耦合强度  $\epsilon$  的关系图.显然,当对称耦合强度  $\epsilon$  大于 0.6 后,所有耦合振子同步到平均频率为 0.5 附近的同步集团.而与之对应的序参量  $R$  可分别取 0 和 1 附近的值,如图 6(b) 所示.

图6 流耦合强度  $\Delta=0.3$  时, 耦合振子平均频率图和  $R \sim \epsilon$  关系图

为了弄清同步区内, 相同耦合强度下出现 2 个  $R$  值的原因, 取  $\epsilon=0.8$  并分别查看不同初相位值条件下耦合相振子达到同步后的相位 ( $\cos \theta, \sin \theta$ ) 分布情况. 结果表明在同步区, 耦合振子的相位存在 2 种分布. 一种是所有耦合振子的相位被锁定在一个很小的区域内, 另一种则是所有耦合振子的相位均匀地分布在整个  $[0, 2\pi]$  区间, 如图 7(a) 和 (b) 所示 2 组不同初始条件下, 系统耦合强度时的相图. 图 7(a) 中的相位相对集中, 其对应的序参量  $R$  接近于 1, 而图 7(b) 中的相位则均匀分散在整个圆上, 其对应的序参量  $R$  接近于 0, 2 种状态的相位概率分布如图 7(c) 所示, 显然耦合系统的相位分布具有两态共存的特征. 值得注意的是, 虽然  $R$  接近于零时所有振子的相位均匀分布在  $[0, 2\pi]$  区间, 但任意 2 个振子之间的相位差依然保持常数. 因此, 耦合相振子依然处于相同步状态. 为了进一步理解流耦合作用对相同步区中两种相位分布共存现象的影响, 计算了相同步稳定区, 不同流耦合强度  $\Delta$  下对应两种相位分布的吸引域. 吸引域的计算方法为某一耦合强度下, 初始取所有振子处于相位均匀分布态, 将相位接近的 10 个振子的初始相位替换成  $\theta_1$ , 剩下的振子中, 再将相位接近的另 10 个振子全部替换成  $\theta_2$ , 剩余 80 个振子的初始相位不变, 仍为均匀分散态, 然后分别将  $\theta_1, \theta_2$  从 0 变到  $2\pi$ , 并记录下所有最终变成相位集中态的初值  $\theta_1, \theta_2$ . 图 7(d) 和 (e) 分别给出了系统耦合强度  $\epsilon=0.8, \Delta=0.1, 0.4$  时, 两种相位分布态的吸引域, 其中黑色区域为相位集中态的吸引域, 白色区为相位均匀分布态的吸引域. 结果表明, 吸引域为光滑边界, 且相位集中态在流耦合强度  $\Delta=0.4$  时的吸引域大于流耦合强度  $\Delta=0.1$  时的吸引域, 即流耦合作用有利于耦合相振子的相位集中分布.

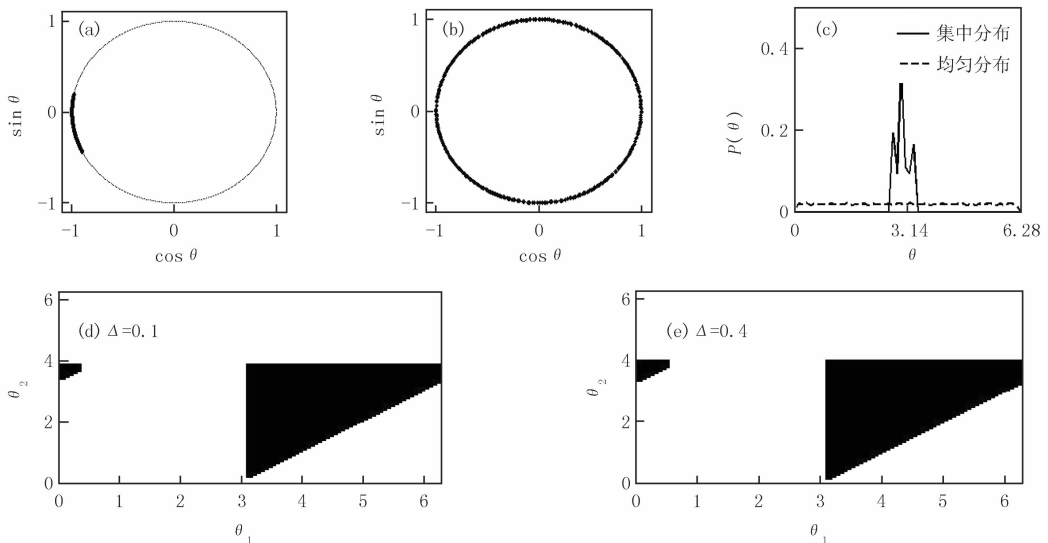


图7 耦合相振子相位集中分布态和相位均匀分布态的相图, 相位分布图及对应的吸引域

## 2 理论分析

为了更好地理解引入不对称的流耦合作用对耦合相振子产生爆发式同步的动力学的影响,给出相应的理论分析,方程(1)可以写成

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{1}{3}\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

其中

$$\Omega_i = \epsilon \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + (\epsilon + \Delta) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i), i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

根据(2)式所给出的耦合振子系统的频率分布,考虑足够大的振子数量  $N$  时,任意振子的左、右两相邻振子的初始自然频率近似相等,即  $\omega_{i-1} \approx \omega_{i+1}$ ,则当振子处于相同步且锁定在一个小区域内时,有  $\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) \approx \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)$ . (7)式可写成

$$\Omega_i \approx (2\epsilon + \Delta) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i), i = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

根据初始频率分布((2)式)的对称性,若耦合振子系统形成同步集团,则该同步集团的同步频率  $\bar{\omega} = \overline{\omega}_i = \langle \dot{\theta}_i(t) \rangle_T$ ,由方程(6)可得,处于同步集团的所有相振子  $i$  应该满足

$$\Omega_i = 3(\bar{\omega} - \omega_i) =, i = 1, 2, \dots, N_s. \quad (9)$$

由三角函数特性 ( $|\sin \theta| \leq 1$ ) 可得方程(8)中的最大同步边界值  $\Omega_i$  应该满足

$$|\Omega_i| \approx |(2\epsilon + \Delta) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)| \leq 2\epsilon + \Delta. \quad (10)$$

方便起见,称  $\Omega_{\text{bws}} = 2\epsilon + \Delta$  为耦合振子可以达到同步的最大同步边界.则(9)式应该满足方程

$$|3(\bar{\omega} - \omega_i)| \leq \Omega_{\text{bws}} = 2\epsilon + \Delta. \quad (11)$$

根据给定的耦合强度  $\epsilon$  和流耦合强度即可确定最终能加入到同步集团的振子的初始自然频率  $\omega_i$  应该满足的条件.当耦合相振子的频率分布为(2)式给定值时有  $\bar{\omega} = 0.5, 0 \leq \omega_i \leq 1$ ,则由(11)式得所有耦合相振子实现同步的耦合强度需满足:  $2\epsilon + \Delta \geq 3 |(\bar{\omega} - \omega_i)|_{\max} = 1.5$ , 即  $\epsilon \geq 0.75 - 0.5\Delta$ , 该结果与数值计算结果((3)式)一致.

值得注意的是,上述结论仅在耦合环上的所有节点均在加入同步集团时才成立;否则,若只有部分节点加入同步集团,则同步集团边界上的节点将被邻近的不同步的节点拉出同步集团.形成部分同步集团时  $\Omega_i$  的边界值必须小于  $\Omega_{\text{bps}}$ ,才能抵挡同步集团的相邻节点的影响,因此对于产生爆发式同步之前的部分同步,有必要进一步确定  $\Omega_i$  的边界值.因为同步集团中同步节点的固有频率应接近平均频率  $\bar{\omega} (\bar{\omega} = 0.5)$ . 结合(2)式节点的特殊频率分布可知,当  $i \leq \frac{N}{2}$  时,  $|\omega_i - \bar{\omega}| = |\omega_i - 0.5| = \frac{2i-1}{2(N-1)} (i = 1, 2, \dots, N_{\text{LS}})$ , 其中,  $N_{\text{LS}}$  为左半部分的同步节点数,且  $N_{\text{LS}} = \frac{NP_{\text{LS}}}{2}$ , 由于  $|\omega_i - \bar{\omega}| = \frac{2i-1}{2(N-1)} (i = 1, 2, \dots, N_{\text{LS}})$  为  $i$  的单调递增函数,所以当  $i = N_{\text{LS}} = \frac{NP_{\text{LS}}}{2}$  时,频率差  $|\omega_i - \bar{\omega}|$  取最大值  $\frac{NP_{\text{LS}}-1}{2(N-1)}$ . 进而有,

$$|\omega_i - \bar{\omega}| \leq \frac{NP_{\text{LS}}-1}{2N} \approx \frac{P_{\text{LS}}}{2}, i = 1, 2, \dots, N_{\text{LS}}. \quad (12)$$

当  $i > \frac{N}{2}$  时,  $\omega_i = 1 - \omega_{N+1-i} (i = N - N_{\text{RS}} + 1, N - N_{\text{RS}} + 2, \dots, N)$ , 其中,  $N_{\text{RS}}$  为右半部分的同步节点数,且  $N_{\text{RS}} = \frac{NP_{\text{RS}}}{2}$ . 令  $z = N + 1 - i$ , 则  $i = N + 1 - z$ , 于是  $\omega_i = 1 - \omega_z = 0.5 - \frac{(-1)^z(2z-1)}{2(N-1)} (z = N_{\text{RS}}, N_{\text{RS}} - 1, \dots, 1)$ . 当  $i > \frac{N}{2}$  时,  $|\omega_i - \bar{\omega}| = |\omega_i - 0.5| = \frac{2z-1}{2(N-1)} (z = N_{\text{RS}}, N_{\text{RS}} - 1, \dots, 1)$ . 同理,当  $z = N_{\text{RS}} = \frac{NP_{\text{RS}}}{2}$  时,频率差  $|\omega_i - \bar{\omega}|$  取最大值  $\frac{NP_{\text{RS}}-1}{2(N-1)}$ , 故

$$|\omega_i - \bar{\omega}| \leq \frac{NP_{RS} - 1}{2N} \approx \frac{P_{RS}}{2} (i = N - N_{RS} + 1, N - N_{RS} + 2, \dots, N). \quad (13)$$

为方便推算,这里统一将前后部分的同步比例表示为  $P_s$ , 记  $P_s = C\Delta + \epsilon$ , 其中  $C$  为常数, 当  $i \leq \frac{N}{2}$  时  $C = 0.65$ , 当  $i > \frac{N}{2}$  时,  $C = 0.3$ . 故(12)式、(13)式可记为

$$|\omega_i - \bar{\omega}| \leq \frac{P_s}{2}. \quad (14)$$

结合(14)式可知

$$|\Omega_i| = 3 |\bar{\omega} - \omega_i| \leq 3 \times \frac{1}{2} (C\Delta + \epsilon) = 1.5(C\Delta + \epsilon), i = 1, 2, \dots, N_s. \quad (15)$$

因此,当耦合系统处于部分同步态时对应的  $\Omega_i$  的边界值

$$\Omega_{bps} = 1.5(C\Delta + \epsilon), \quad (16)$$

其中,若要求左、右半部分振子的边界则  $C$  分别取值  $C = 0.65, C = 0.3$ .

由(8)式和(15)式可知,当耦合系统处于部分同步时,正弦函数的实际边界为

$$|\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)| \leq \frac{\Omega_{bps}}{2\epsilon + \Delta} = \frac{1.5(C\Delta + \epsilon)}{2\epsilon + \Delta}, i = 1, 2, \dots, N_s, \quad (17)$$

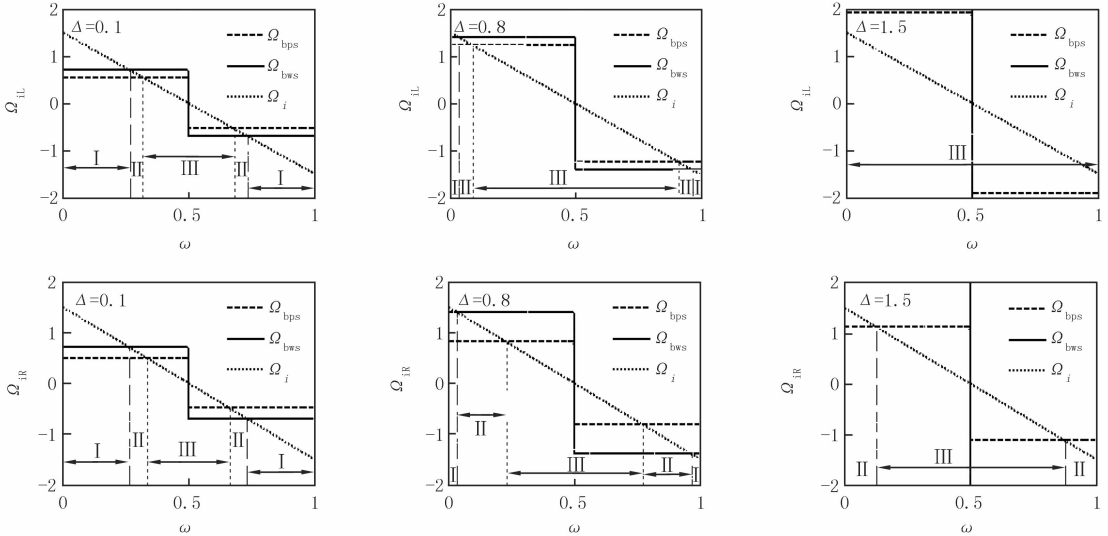
由(11)式和(15)式可知最大同步边界  $\Omega_{bws}$  和部分同步边界  $\Omega_{wbps}$  与流耦合强度  $\Delta$  和对称耦合强度  $\epsilon$  线性相关. 因此,一旦确定对称耦合强度和流耦合强度,则耦合系统的最大同步边界和部分同步边界则相应确定. 从而耦合相振子可以根据其频率  $\omega_i$  确定对应的  $\Omega_i$  值,可分为3种状态:1)若  $\Omega_i$  处于部分同步边界范围内,即  $|\Omega_i| \leq |\Omega_{bps}|$ , 则节点  $i$  处于同步态(图8中 III 区域);2)若  $\Omega_i$  处于部分同步边界值和最大同步边界之间,即  $|\Omega_{bps}| \leq |\Omega_i| \leq |\Omega_{bws}|$ , 则是节点  $i$  处于可能同步可能不同步的双稳态(图8中 II 区域);3)若  $\Omega_i$  值处于最大同步边界之外,即  $|\Omega_i| > |\Omega_{bws}|$ , 则节点  $i$  处于非同步态(图8中 I 区域). 根据图8可以将具有不同自然频率的耦合相振子的状态进行划分. 由图8可知,随着流耦合强度的增加,部分同步边界和最大同步边界相应地增加,从而使能够加入到同步集团的相振子的自然频率的范围也相应增加,即图8中 III 区域增加. 能加入到相同步集团的振子数量也逐渐增加. 同时,不同步区域的(图8中 I 区域)会随着耦合强度增加而相应地减少. 当不同步区域消失时,处于双稳态区(图8中 II 区域)的振子可能会突然加入到同步区而形成爆发式同步.

由图9可知,如果非同步区消失,则缓冲区的相振子最终态与其初始状态有关,若初始处于同步态附近,则该区域会的相振子将保持在同步态;若初始处于非同步态,则该区域的相振子将保持在非相同步态,而一旦受到小的扰动,或在耦合强度增加时受同步区域的吸引,该缓冲区的相振子可能跳向同步区域而形成爆发式同步. 结果表明,随着流耦合强度的增加,非相同步区消失所需的临界耦合强度减小.

### 3 结 论

通过研究规则网络中,在对称耦合作用的基础上引入非对称的流耦合作用下的 Kuramoto 振子的同步行为,得到一种混合爆发式同步现象. 研究表明,在对称耦合作用基础上引入的非对称流耦合作用有利于促进耦合系统产生爆发式同步. 达到爆发式同步所需的临界对称耦合强度与非对称的流耦合强度呈负相关线性关系. 此外,耦合强度的非对称性使耦合环上左侧的节点对右侧的节点的耦合作用更强,而节点特殊的频率分布决定了系统前半部分节点左侧的频率差小于右侧的频率差 ( $|\omega_{i-1} - \omega_i| < |\omega_{i+1} - \omega_i|, i = 1, 2, \dots, N/2$ ), 系统后半部分节点左侧频率差大于右侧的频率差 ( $|\omega_{i-1} - \omega_i| > |\omega_{i+1} - \omega_i|, i = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N$ ), 因此造成耦合系统的前  $N/2$  个节点的同步能力强于后  $N/2$  个节点,前半部分的同步节点数量大于后半部分,这种耦合振子间的频率失配造成的不均性和不对称的耦合作用使系统达到均匀态之间的竞争机制,抑制了部分耦合相振子形成同步集团. 当流耦合强度和对称耦合强度之和大于 0.75 时,耦合系统中所

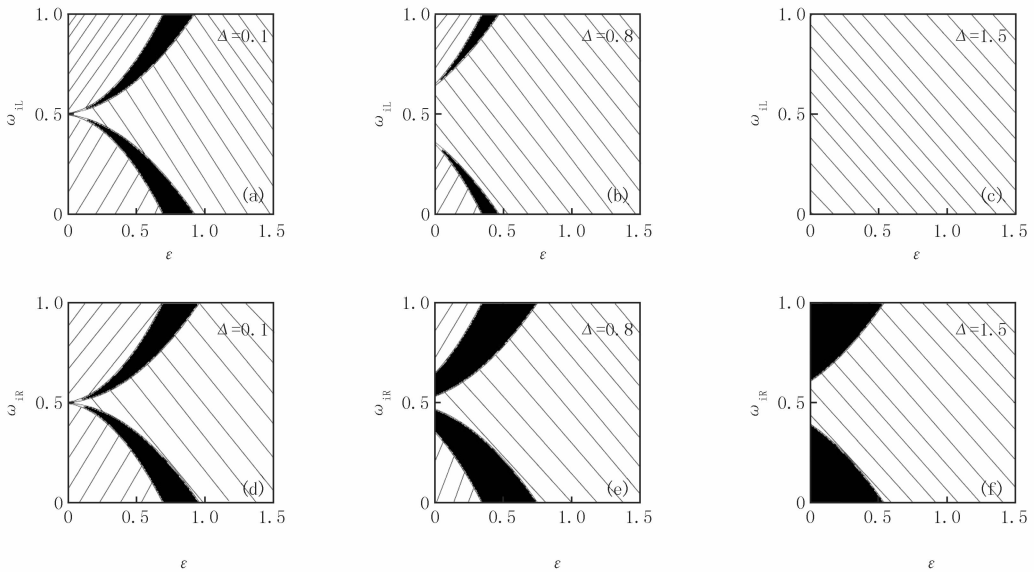
有未同步的相振子会突然跳变到同步状态,从而形成爆发式同步现象.此外,在完全同步稳定区的耦合相振子存在多态共存现象,一种相位高度集中;另一种相位均匀分散在整个区域内.通过理论分析导出耦合相振子的同步区域、非同步区域以及双稳区与耦合作用的关系.解释了混合爆发式同步的内在机制,并确定了流耦合作用促进同步的机理.本研究对理解复杂网络中非对称耦合作用对同步的影响具有一定指导意义.



实线表示最大同步边界  $\pm \Omega_{bws}$ ; 虚线表示部分同步边界  $\pm \Omega_{wps}$ ; 浅色虚线表示对应的  $\Omega_i$  值与  $\omega_i$  的关系.

(a) ~ (c) 对应确定前  $\frac{N}{2}$  个耦合相振子所处的状态, 而 (d) ~ (f) 对应确定后  $\frac{N}{2}$  个相振子所处的状态.

图 8 不同流耦合强度下, 耦合系统的  $\Omega_i - \omega$  图



(a) ~ (c) 为前  $\frac{N}{2}$  个振子, (d) ~ (f) 为后  $\frac{N}{2}$  个相振子, 左倾斜线 (“\”) 表示相同步态, 右倾斜线 (“/”) 表示非相同步态, 黑色表示介于相同步态与非相同步态之间.

图 9 不同流耦合强度下, 耦合系统的状态图



## 参 考 文 献

- [1] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J, et al. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences[J]. *American Journal of Physics*, 2002, 70(6): 655-655.
- [2] Strogatz S H, Abrams D M, McRobie A, et al. Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge[J]. *Nature*, 2005, 438(7064): 43-44.
- [3] Ji P, Peron T K D M, Rodrigues F A, et al. Analysis of cluster explosive synchronization in complex networks[J]. *Physical Review E*, 2014, 90(6): 062810.
- [4] Gómez-Gardeñes J, Gómez S, Arenas A, et al. Explosive synchronization transitions in scale-free networks[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(12): 128701.
- [5] Leyva I, Sendina-Nadal I, Almendral J A, et al. Explosive synchronization in weighted complex networks[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(4): 042808.
- [6] Adhikari B M, Epstein C M, Dhamala M. Localizing epileptic seizure onsets with Granger causality[J]. *Physical Review E*, 2013, 88(3): 030701.
- [7] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, et al. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks[J]. *Nature*, 2010, 464(7291): 1025-1028.
- [8] Kim M, Mashour G A, Moraes S B, et al. Functional and topological conditions for explosive synchronization develop in human brain networks with the onset of anesthetic-induced unconsciousness[J]. *Frontiers in computational neuroscience*, 2016, 10(114): 1.
- [9] Skardal P S, Arenas A. Disorder induces explosive synchronization[J]. *Physical Review E*, 2014, 89(6): 062811.
- [10] Liu W, Wu Y, Xiao J, et al. Effects of frequency-degree correlation on synchronization transition in scale-free networks[J]. *EPL*, 2013, 101(3): 38002.
- [11] Leyva I, Sevilla-Escoboza R, Buldú J M, et al. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(16): 168702.
- [12] Leyva I, Navas A, Sendinanadal I, et al. Explosive transitions to synchronization in networks of phaseoscillators. [J]. *Scientific Reports*, 2013, 3(1): 1281-1281.
- [13] Zhao M, Zhou T, Wang B, et al. Relations between Average Distance, Heterogeneity and Network Synchronizability[J]. *Physica A-statistical Mechanics and Its Applications*, 2006, 371(2): 773-780.
- [14] Cohen R, Havlin S. Scale-free networks are ultrasmall[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(5): 058701.
- [15] 赵明, 周涛, 陈关荣, 等. 复杂网络上动力系统同步的研究进展 II —— 如何提高网络的同步能力[J]. *物理学进展*, 2008, 28(1): 22-34.
- [16] Zhou C, Kurths J. Dynamical weights and enhanced synchronization in adaptive complex networks[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(16): 164102.
- [17] Yang Y, Yu X. Weighted small world complex networks; smart sliding mode control[C]// *International Conference on Intelligent Computing*. Piscataway: IEEE Press, 2009: 935-944.
- [18] Lou X, Suykens J A K. Finding communities in weighted networks through synchronization[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2011, 21(4): 043116.
- [19] 任海鹏, 殷佳, 郑岗, 等. 基于自适应同步的混沌系统参数辨识方法的研究[J]. *量子电子学报*, 2008, 25(2): 213-220.
- [20] Li Q, Guo J, Wu Y, et al. Weighted average pinning synchronization for a class of coupled neural networks with time-varying delays[J]. *Neural Processing Letters*, 2017, 45(1): 95-108.
- [21] Jiménez-Martín M, Rodríguez-Laguna J, DHuys O, et al. Synchronization of fluctuating delay-coupled chaotic networks[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(5): 052210.
- [22] Choi S, Ha S. Time-delayed interactions and synchronization of identical Lohe oscillators[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2016, 74(2): 297-319.
- [23] Sausedo-Solorio J M, Pisarchik A N. Synchronization in network motifs of delay-coupled map-based neurons[J]. *The European Physical Journal Special Topics*, 2017, 226(9): 1911-1920.
- [24] Zhou W, Chen L, Bi H, et al. Explosive synchronization with asymmetric frequency distribution[J]. *Physical Review E*, 2015, 92(1): 012812.
- [25] Wang X F, Chen G. Chaotification via arbitrarily small feedback controls: Theory, method, and applications[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(03): 549-570.
- [26] Strogatz S H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, 143(1): 1-20.
- [27] Wu Y, Xiao J, Hu G, et al. Synchronizing large number of nonidentical oscillators with small coupling[J]. *EPL*, 2012, 97(4): 40005.
- [28] Cheng W, Liu W, Lan Y, et al. Explosive synchronization transition in a ring of coupled oscillators[EB/OL]. [2017-10-15]. <https://arxiv.org/abs/1710.00005>.

org/pdf/1711.08567.

- [29] Bulsara A R, In V, Kho A, et al. Emergent oscillations in unidirectionally coupled overdamped bistable systems[J]. *Physical Review E*, 2004, 70(3): 036103.
- [30] Luo C, Clark J W, Canavier C C, et al. Multimodal behavior in a four neuron ring circuit: mode switching[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2004, 51(2): 205-218.
- [31] 俞艳蓉, 王旭明. 流耦合驱动的网络同步[J]. *宁夏工程技术*, 2007, 6(2): 101-103.
- [32] 王旭明, 陈光旨, 覃团发. 非线性系统流的耦合同步[J]. *广西科学*, 1999(4): 272-277.
- [33] 俞艳蓉, 王旭明, 刘重霄. 近邻耦合网络中流耦合所导致的同步与结点动力学[J]. *宁夏大学学报(自然科学版)*, 2010, 31(1): 44-48.
- [34] Rosenblum M, Pikovsky A, Kurths J, et al. Phase synchronization of chaotic oscillators. [J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(11): 1804-1807.
- [35] Acebron J A, Bonilla L L, Vicente C J, et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2005, 77(1): 137-185.
- [36] Massunaga M S, Bahiana M. Synchronization in large populations of limit cycle oscillators with long-range interactions[J]. *Physica D: Non-linear Phenomena*, 2002, 168(12): 136-141.

## Effects of gradient coupling on the explosive synchronization in regular network

Zhang Weijing<sup>1</sup>, Liu Weiqing<sup>1</sup>, Chen Wei<sup>2</sup>

(1. School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China;

2. School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract:** The explosive synchronization of coupled oscillator systems, as one of the intrinsic mechanisms of self-organized kinetic behavior of many biological systems, has attracted much attention. Considering that the interaction between many vibrators in real life is asymmetric, we study in detail the effect of gradient coupling on explosive synchronization of coupled oscillator systems in a regular network by the theoretical analysis and numerical methods. The results show that the asymmetric gradient coupling in the coupled oscillator system with a specific frequency spatial distribution facilitates the generation of explosive synchronization in the coupled oscillator system. The critical coupling strength required for the coupled system to achieve explosive synchronization is linearly related to the gradient coupling strength. In addition, it can be observed two coexisting forms in the synchronization interval: one is centralized phase locking, the other is anti-phase locking. Through the theoretical analysis, the inherent mechanism of the gradient coupling is helpful to promote the explosive synchronization of the coupled oscillator system. The results of the study can provide theoretical support for a better understanding of the self-organized phenomena in the coupled oscillator system under asymmetric coupling.

**Keywords:** regular network; explosive synchronization; gradient coupling

[责任编辑 杨浦]