文章编号:1000-2367(2021)06-0070-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.06.010

一类非局部奇异椭圆方程组多解的存在性

陈林,汤楠

(伊犁师范大学 数学与统计学院,新疆 伊宁 835000)

摘　要:研究一类非局部奇异椭圆方程组多解的存在性.首先,通过对方程组两边积分得到方程组弱解的定义;其次,构造 Nehari 流形以缩小寻找解的范围;最后,引入纤维环映射并运用变分法证明了此问题至少存在两个正解.

关键词:椭圆方程组;Nehari 流形;纤维环映射;变分法

中图分类号:O175 **文献标志码**:A

椭圆型方程(组)是偏微分方程理论中的一个重要组成部分,是描述自然现象、解释自然规律的重要工具.1883 年,Kirchhoff 在研究张紧的弦振动问题时建立了著名的 Kirchhoff 方程[1]

$$\rho u_{tt}-\left(\frac{\rho_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\right)u_{xx}=0. \tag{1}$$

由于方程中含有未知函数导数的积分项,方程(1)也称为非局部方程,其稳定状态方程即为非局部椭圆方程.文献[2]改进了 Kirchhoff 所得的结果,系统研究了波动方程的稳定状态方程(非局部椭圆方程)

$$\begin{cases}-(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u=f(x,u),x\in\Omega,\\ u(x)=0,x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

此后,非局部椭圆型方程受到人们的广泛关注和研究,得到了许多重要结论见文献[3-7].本文运用 Nehari 流形和纤维环映射方法证明当参数(λ,μ)满足一定条件时,非局部奇异椭圆方程组

$$\begin{cases}-M(\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^p\mathrm{d}x)\mathrm{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=d^{-1}F_u(x,u,v)+\lambda h_1(x)|u|^{m-2}u,\\ -M(\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla v|^p\mathrm{d}x)\mathrm{div}(|x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v)=d^{-1}F_v(x,u,v)+\mu h_2(x)|v|^{m-2}v,\\ u(x)>0,v(x)>0,x\in\mathbf{R}^N,\end{cases} \tag{2}$$

至少存在两个正解,其中 $\lambda,\mu>0,1<p<N,1<m<p<p(\tau+1)<d\le p^*=\dfrac{Np}{N-p},0\le a<\dfrac{N-p}{p}$, $a\le b<a+1,M(s)=k+\ell s^\tau,k>0,\ell\ge 0,\tau>0$.

为便于研究问题,做以下假设:

(H_1) $h_i(x)|x|^{bm}\in L^\theta(\mathbf{R}^N)\cap L^\infty(\mathbf{R}^N),i=1,2$,其中 $\theta=\dfrac{p^*}{p^*-m}$.

(H_2) $F(x,u,v)\in C^1(\Omega\times\mathbf{R}^2)$ 是度为 $d\in(p,p^*]$ 的正齐次函数,即 $\forall(x,u,v)\in\bar\Omega\times\mathbf{R}^2,\forall t>0$ 有 $F(x,tu,tv)=t^dF(x,u,v)$.假设存在非负函数 $f(x)\in L^\sigma(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 使得对于任意$(x,u.v)\in\bar\Omega\times\mathbf{R}^2$ 成立 $|F(x,u,v)|\le f(x)(|u|^d+|v|^d)$,且有 $|F(x,u,v)-F(x,r,s)|\le f(x)(1+|u|^{d-1}+$

收稿日期:2020-09-03;**修回日期**:2020-10-30.

基金项目:国家自然科学基金(11461075);伊犁师范大学博士科研启动基金项目(2017YSBS08);新疆高校科研计划重点资助项目(XJEDU2016I043).

作者简介(通信作者):陈林(1978-),男,山东成武人,伊犁师范大学教授,博士,研究方向为偏微分方程及其应用,E-mail:clzj008@163.com.

$|v|^{d-1}+|r|^{d-1}+|s|^{d-1})(|u-r|+|v-s|)$,其中 $\sigma=\dfrac{p^*}{p^*-d+1}$.

1　主要结论和基本引理

设 E$=W_a^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ 为空间 $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ 关于范数 $\|u\|_E=\left(\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 的完备化空间.选取问题(2) 的泛函作用空间 $X=W_a^{1,p}(\mathbf{R}^N)\times W_a^{1,p}(\mathbf{R}^N)$, 其上的范数定义为

$$\|(u,v)\|=(\|u\|_E^p+\|v\|_E^p)^{1/p},(u,v)\in X, \tag{3}$$

则 X 按范数(3)构成一自反的 Banach 空间.设

$$h_{1\theta}=\left(\int_{\mathbf{R}^N}(|h_1(x)||x|^{bm})^\theta\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}},h_{2\theta}=\left(\int_{\mathbf{R}^N}(|h_2(x)||x|^{bm})^\theta\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

定义 1　设函数对 $(u,v)\in X$.如果对于任意的函数对$(\varphi,\psi)\in X$ 均有

$$M(\|u\|_E^p)\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+M(\|v\|_E^p)\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\psi\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{d}\int_{\mathbf{R}^N}(F_u(x,u,v)\varphi+F_v(x,u,v)\psi)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}(\lambda h_1|u|^{m-2}u\varphi+\mu h_2|v|^{m-2}v\psi)\mathrm{d}x=0, \tag{4}$$

则称$(u,v)\in X$ 为问题(2)的一个弱解.

下面是本文的主要结论.

定理 1　设条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_2)$成立,则存在常数 $\lambda^*>0$ 使当 $0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\lambda^*$ 时,问题(2)在 X 中至少有两个非平凡的非负弱解.

显然问题(2)具有变分结构.设问题(2)的能量泛函为 $I_{\lambda,\mu}:X\to\mathbf{R}^1$,则任意$(u,v)\in X$ 有

$$I_{\lambda,\mu}(u,v)=\frac{k}{p}\|(u,v)\|^p+\frac{\ell}{\sigma}\|(u,v)\|^\sigma-\frac{1}{d}\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x-\frac{1}{m}A_{\lambda,\mu}(u,v), \tag{5}$$

其中 $\sigma=p(\tau+1)$,$A_{\lambda,\mu}(u,v)=\int_{\mathbf{R}^N}\lambda h_1|u|^m\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^N}\mu h_2|v|^m\mathrm{d}x$.从而 $I_{\lambda,\mu}\in C(X,\mathbf{R}^1)$ 且对于任意$(\varphi,\psi)\in X$ 有

$$\langle I'_{\lambda,\mu}(u,v),(\varphi,\psi)\rangle=M(\|u\|_E{}^p)\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+M(\|v\|_E{}^p)\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\cdot$$
$$\nabla v\nabla\psi\mathrm{d}x-\frac{1}{d}\int_{\mathbf{R}^N}(F_u(x,u,v)\varphi+F_v(x,u,v)\psi)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}(\lambda h_1|u|^{m-2}u\varphi+\mu h_2|v|^{m-2}v\psi)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

特别地,当$(\varphi,\psi)=(u,v)$时成立

$$\langle I'(u,v),(u,v)\rangle=k\|(u,v)\|^p+\ell\|(u,v)\|^\sigma-A_{\lambda,\mu}(u,v)-\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

由于问题(2)的弱解是泛函 $I_{\lambda,\mu}$ 的临界点,从而只需证明泛函 $I_{\lambda,\mu}$ 存在满足要求的临界点.又由于 $I_{\lambda,\mu}$ 在 X 上没有下界,引入 Nehari 流形

$$N_{\lambda,\mu}=\{(u,v)\in X\backslash\{(0,0)\}:\langle I'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\rangle=0\}. \tag{8}$$

从而 $(u,v)\in N_{\lambda,\mu}$ 当且仅当

$$k\|(u,v)\|^p+\ell\|(u,v)\|^\sigma-A_{\lambda,\mu}(u,v)-\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x=0. \tag{9}$$

显然, $N_{\lambda,\mu}$ 包含了问题(2) 的所有非平凡弱解且当$(u,v)\in X$ 时有

$$I_{\lambda,\mu}(u,v)=k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{d}\right)\|(u,v)\|^p+l\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{d}\right)\|(u,v)\|^\sigma+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{m}\right)A_{\lambda,\mu}(u,v)=$$
$$k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{m}\right)\|(u,v)\|^p+l\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{m}\right)\|(u,v)\|^\sigma+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{d}\right)\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

定义泛函

$$\Phi(u,v)=\langle I'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\rangle,\forall(u,v)\in X. \tag{11}$$

则对于任意 $(u,v)\in N_{\lambda,\mu}$ 有

$$\langle \Phi'(u,v),(u,v)\rangle = k(p-m)\|(u,v)\|^{p}+\ell(\sigma-m)\|(u,v)\|^{\sigma}+(m-d)\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x = k(p-d)\|(u,v)\|^{p}+\ell(\sigma-d)\|(u,v)\|^{\sigma}+(d-m)A_{\lambda,\mu}(u,v). \tag{12}$$

将 $N_{\lambda,\mu}$ 分为3部分:$N_{\lambda,\mu}^{+}=\{(u,v)\in N_{\lambda,\mu}:\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle>0\}$,$N_{\lambda,\mu}^{0}=\{(u,v)\in N_{\lambda,\mu}:\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle=0\}$,$N_{\lambda,\mu}^{-}=\{(u,v)\in N_{\lambda,\mu}:\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle<0\}$.

引理1(Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式[8]) 存在常数 $K_{a,b}>0$ 使得对于任意的 $u\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^N)$ 成立

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{p/p^*}\le K_{a,b}\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p}\mathrm{d}x, \tag{13}$$

其中 $-\infty<a<(N-p)/p$,$a\le b<a+1$ 及 $p^*=Np/(N-p)$.

由于 $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^N)$ 在 E 中稠密,从而(13)式对任意的 $u\in E$ 成立.

引理2 假定条件(H_1)~(H_2)成立,则泛函 $I_{\lambda,\mu}$ 在 $N_{\lambda,\mu}$ 上强制且有下界.

证明 由条件(H_1)和 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式可知

$$\int_{\mathbf{R}^N}\lambda h_1(x)|u|^{m}\mathrm{d}x\le\lambda\left(\int_{\mathbf{R}^N}(|h_1(x)||x|^{bm})^{\theta}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m}{p^*}}\le\lambda K_{a,b}^{m}h_{1\theta}\|(u,v)\|^{m}.$$

同理可得 $\int_{\mathbf{R}^N}\mu h_2(x)|v|^{m}\mathrm{d}x\le\mu K_{a,b}^{m}h_{2\theta}\|(u,v)\|^{m}$. 从而

$$A_{\lambda,\mu}(u,v)\le(\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta})K_{a,b}^{m}\|(u,v)\|^{m}. \tag{14}$$

因此,由(5)式知 $I_{\lambda,\mu}(u,v)\ge\frac{1}{k}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{d}\right)\|(u,v)\|^{p}+l\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{d}\right)\|(u,v)\|^{\sigma}+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{m}\right)(\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta})K_{a,b}^{m}\|(u,v)\|^{m}$. 由于 $m<p<\sigma<d$,从而 $I_{\lambda,\mu}$ 在 $N_{\lambda,\mu}$ 上强制有下界.证毕.

引理3 设条件(H_1)~(H_2)成立,则存在 $\lambda_0>0$,当 $0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\lambda_0$ 时 $N_{\lambda,\mu}{}^{0}=\varnothing$.

证明 假设命题不成立.取 $\lambda_0=k^{\frac{d-m}{d-p}}\frac{d-p}{K_{a,b}^{m}}\left(\frac{p-m}{(d-m)^{\frac{d-m}{p-m}}\|f\|_{\mu_0}K_{a,0}^{d}}\right)^{\frac{p-m}{d-p}}$,则存在 λ 和 μ 使当 $0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\lambda_0$ 时 $N_{\lambda}^{0}\ne\varnothing$.设 $(u,v)\in N_{\lambda,\mu}^{0}$,则

$$\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle=k(p-d)\|(u,v)\|^{p}+l(\sigma-d)\|(u,v)\|^{\sigma}+(d-m)A_{\lambda,\mu}(u,v)=0. \tag{15}$$

由(14)和(15)式知

$$\|(u,v)\|\le\left(\frac{d-m}{k(d-p)}\right)^{\frac{1}{p-m}}(\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta})^{\frac{1}{p-m}}K_{a,b}^{\frac{m}{p-m}}. \tag{16}$$

又由于

$$\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle=k(p-m)\|(u,v)\|^{p}+l(\sigma-m)\|(u,v)\|^{\sigma}+(m-d)\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x=0, \tag{17}$$

从而由 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式得

$$\int_{\mathbf{R}^N}|F(x,u,v)|\mathrm{d}x\le\int_{\mathbf{R}^N}f(x)(|u|^{d}+|v|^{d})\mathrm{d}x\le\|f\|_{\mu_0}K_{a,0}^{d}\|(u,v)\|^{d}, \tag{18}$$

其中 $\mu_0=\frac{p^*}{p^*-d}$. 从而

$$k(p-m)\|(u,v)\|^{p}+l(\sigma-m)\|(u,v)\|^{\sigma}\le(d-m)\|f\|_{\mu_0}K_{a,0}^{d}\|(u,v)\|^{d}. \tag{19}$$

因此

$$k(p-m)\|(u,v)\|^{p}\le(d-m)\|f\|_{\mu_0}K_{a,0}^{d}\|(u,v)\|^{d}. \tag{20}$$

从而

$$\|(u,v)\|\ge\left(\frac{k(p-m)}{(d-m)\|f\|_{\mu_0}K_{a,0}^{d}}\right)^{\frac{1}{d-p}}. \tag{21}$$

则由(16)和(21)式可知 $\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}\geq k^{\frac{d-m}{d-p}}\dfrac{d-p}{K_{a,b}^{m}}\left(\dfrac{p-m}{(d-m)^{\frac{d-m}{p-m}}\|f\|_{\mu_0}K_{a,0}^{d}}\right)^{\frac{p-m}{d-p}}\equiv\lambda_0$. 矛盾！证毕.

引理 4　假定条件(H_1)～(H_2)成立.若 (u_0,v_0) 是 $I_{\lambda,\mu}$ 在 $N_{\lambda,\mu}$ 中的一个局部最小值点且 $(u_0,v_0)\notin N_{\lambda,\mu}{}^{0}$，则 (u_0,v_0) 为 $I_{\lambda,\mu}$ 的临界点.

证明　令

$$G(u,v)=k\|(u,v)\|^{p}+l\|(u,v)\|^{\sigma}-A_{\lambda,\mu}(u,v)-\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x. \tag{22}$$

考虑条件极值问题 $\min\limits_{(u,v)\in N_{\lambda,\mu}}\{I_{\lambda,\mu}(u,v):G(u,v)=0\}$. 由 Lagrange 乘子定理知，存在实数 η 使得 $I'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)=\eta F'(u_0,v_0)$.由于 $(u_0,v_0)\in N_{\lambda,\mu}$，从而 $\langle I'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0),(u_0,v_0)\rangle=0$. 又由于 $(u_0,v_0)\notin N^{0}_{\lambda,\mu}$，从而 $\langle G'(u_0,v_0),(u_0,v_0)\rangle=\langle\Phi'(u_0,v_0),(u_0,v_0)\rangle\neq0$.从而 $\eta=0$.因此 $I'_{\lambda,\mu}(u_0,v_0)=0$，即 (u_0,v_0) 为 $I_{\lambda,\mu}(u,v)$ 的临界点.证毕.

由引理 3 知当 $\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}\in(0,\lambda_0)$ 时 $N_{\lambda,\mu}=N^{+}_{\lambda,\mu}\cup N^{-}_{\lambda,\mu}$. 定义

$$\delta^{+}_{\lambda,\mu}=\inf_{(u,v)\in N^{+}_{\lambda,\mu}}I_{\lambda,\mu}(u,v),\delta^{-}_{\lambda,\mu}=\inf_{(u,v)\in N^{-}_{\lambda,\mu}}I_{\lambda,\mu}(u,v).$$

引理 5　若 λ 和 μ 满足 $0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\dfrac{m\lambda_0}{p}$，则(i) $\delta^{+}_{\lambda,\mu}<0$；(ii)存在常数 $k_0>0$ 使得 $\delta^{-}_{\lambda,\mu}>k_0$.

证明　(i)任取 $(u,v)\in N^{+}_{\lambda,\mu}$，则有 $\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle>0$.从而 $A_{\lambda,\mu}(u,v)>\dfrac{k(d-p)}{d-m}\|(u,v)\|^{p}$.从而 $I_{\lambda,\mu}(u,v)\leq k\dfrac{(d-p)(m-p)}{pdm}\|(u,v)\|^{p}<0$.从而 $\delta^{+}_{\lambda,\mu}<0$.

(ii)任取 $(u,v)\in N^{-}_{\lambda,\mu}$，则

$$I_{\lambda,\mu}(u,v)\geq k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{d}\right)\|(u,v)\|^{p}+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{m}\right)A_{\lambda,\mu}(u,v).$$

由(14)式知

$$A_{\lambda,\mu}(u,v)\leq(\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta})K^{m}_{a,b}\|(u,v)\|^{m}. \tag{23}$$

从而

$$I_{\lambda,\mu}(u,v)\geq\frac{1}{pmd}\|(u,v)\|^{m}(km(d-p)\|(u,v)\|^{p-m}-p(d-m)(\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta})K^{m}_{a,b}).$$

要使 $km(d-p)\|(u,v)\|^{p-m}>p(d-m)(\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta})K^{m}_{a,b}$ 成立，只需

$$\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\frac{km(d-p)}{p(d-m)K^{m}_{a,b}}\left(\frac{k(p-m)}{(d-m)\|f\|_{\mu_0}K^{d}_{a,0}}\right)^{\frac{p-m}{d-p}}=\frac{m\lambda_0}{p}.$$

从而存在 $k_0>0$ 使得 $\delta^{-}_{\lambda,\mu}>k_0$. 证毕.

任取 $(u,v)\in X$ 使得 $\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x>0$. 令

$$z(t)=t^{p-m}k\|(u,v)\|^{p}+t^{\sigma-m}l\|(u,v)\|^{\sigma}-t^{d-m}\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x.$$

记 $H(t)=k(p-m)\|(u,v)\|^{p}+(\sigma-m)lt^{\sigma-p}\|(u,v)\|^{\sigma}-(d-m)t^{d-p}\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x$，则

$$z'(t)=t^{p-m-1}H(t). \tag{24}$$

令 $H'(t)=0$，可得 $t=t^{*}=\left(\dfrac{(\sigma-m)(\sigma-p)l\|(u,v)\|^{\sigma}}{(d-m)(d-p)\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{d-\sigma}}$. 又由于 $H(0)<0$，$H(+\infty)=-\infty$，从而 t^{*} 是 $H(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 的唯一极大值点，且存在唯一的点 $t_0>t^{*}>0$ 使得 $H(t_0)=0$.从而函数 $z(t)$ 在 $[0,t_0]$ 严格单调增加，在 $[t_0,+\infty)$ 严格单调减少.

引理 6　对于每一 $(u,v)\in E$ 且 $\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x>0$，当 $0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\dfrac{m\lambda_0}{p}$ 时：

(i)若 $A_{\lambda,\mu}\leq 0$,则存在唯一的 $t_1>t_0$ 使得 $(t_1u,t_1v)\in N_{\lambda\mu}^{-}$ 且有 $I_{\lambda,\mu}(t_1u,t_1v)=\sup\limits_{t\geq 0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv)$.

(ii)若 $A_{\lambda,\mu}>0$,则存在唯一 $0<t_2<t_0<t_3$ 使得 $(t_2u,t_2v)\in N_{\lambda,\mu}^{-}$,$(t_3u,t_3v)\in N_{\lambda,\mu}^{+}$ 且有

$$I_{\lambda,\mu}(t_2u,t_2v)=\inf_{0<t<t_0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv),I_{\lambda,\mu}(t_3u,t_3v)=\sup_{t\geq 0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv).$$

证明 为证明问题的方便,令 $\Phi_1(t)=I_{\lambda,\mu}(tu,tv)$.

(i)当 $t\geq 0$ 时

$$\Phi(tu,tv)=t^m(z(t)-A_{\lambda,\mu}(u,v)).\tag{25}$$

当 $A_{\lambda,\mu}(u,v)\leq 0$ 时,由 $z(t)$ 的增减性可知存在唯一的常数 $t_1>t_0$,使得 $\Phi(t_1u,t_1v)=0$,从而 $(t_1u,t_1v)\in N_{\lambda,\mu}$.又由于 $\langle\Phi'(t_1u,t_1v),(t_1u,t_1v)\rangle=(t_1)^{m+1}z'(t_1)<0$,因此 $(t_1u,t_1v)\in N_{\lambda,\mu}^{-}$.由 $\Phi'_1(t)=t^{m-1}(z(t)-A_{\lambda,\mu}(u,v))$ 知当 $t\in(0,t_1)$ 时,$\Phi'_1(t)>0$;当 $t\in(t_1,+\infty)$ 时,$\Phi'_1(t)<0$.从而,t_1 为 $\Phi_1(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值点.从而 $I_{\lambda,\mu}(t_1u,t_1v)=\sup\limits_{t\geq 0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv)$.

(ii)当 $A_{\lambda,\mu}(u,v)>0$ 时,由(23)式有 $0<A_{\lambda,\mu}(u,v)\leq(\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta})K_{a,b}^{m}\|(u,v)\|^m\leq z(t_0)$.则存在唯一 $0<t_2<t_0<t_3$ 使得 $z(t_2)=z(t_3)=A_{\lambda,\mu}(u,v)$ 且有 $z'_2(t)<0,z'_3(t)>0$.从而

$$\langle\Phi'(t_2u,t_2v),(t_2u,t_2v)\rangle=(t_2)^{m+1}z'(t_2)<0,\langle\Phi'(t_3u,t_2v),(t_3u,t_2v)\rangle=(t_3)^{m+1}z'(t_3)>0.$$

因此 $(t_2u,t_2v)\in N_{\lambda,\mu}^{-}$,$(t_3u,t_3v)\in N_{\lambda,\mu}^{+}$.由于当 $t\in(0,t_2)$ 时 $\Phi'_1(t)<0$ 而当 $t\in(t_2,t_0)$ 时 $\Phi'_1(t)>0$,从而 $I_{\lambda,\mu}(t_2u,t_2v)=\inf\limits_{0<t<t_0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv)$.又由于当 $t\in(t_2,t_3)$ 时 $\Phi'_1(t)>0$,当 $t\in(t_3,+\infty)$ 时 $\Phi'_1(t)<0$,因此 $\Phi_1(t_3)>0$.从而 $I_{\lambda,\mu}(t_3u,t_3v)=\sup\limits_{t\geq 0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv)$.证毕.

构造函数

$$g(t)=kt^{p-d}\|(u,v)\|^p+\ell t^{\sigma-d}\|(u,v)\|^\sigma-t^{m-d}A_{\lambda,\mu}(u,v),t>0.\tag{26}$$

显然当 $t\to 0^+$ 时 $g(t)\to-\infty$;当 $t\to+\infty$ 时 $g(t)\to 0$,从而存在正数 $\bar{t}_0$ 使得 $g(t)$ 在 $\bar{t}_0$ 取得最大值.

引理 7 设 $(u,v)\in X$,$A_{\lambda,\mu}(u,v)>0$,则当 $0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\lambda_0$ 时有

(i)如果 $\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x\leq 0$,则存在唯一的 $0<t^+<\bar{t}_0$ 使得 $(t^+u,t^+v)\in N_{\lambda,\mu}^{+}$ 且有

$$I_{\lambda,\mu}(t^+u,t^+v)=\inf_{t\geq 0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv).\tag{27}$$

(ii)如果 $\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x>0$,则存在唯一的 $0<t^+<\bar{t}_0<t^-$ 使得 $(t^+u,t^+v)\in N_{\lambda,\mu}^{+}$,$(t^-u,t^-v)\in N_{\lambda,\mu}^{-}$ 且有

$$I_{\lambda,\mu}(t^+u,t^+v)=\inf_{0\leq t\leq\bar{t}_0}I_{\lambda,\mu}(tu,tv),I_{\lambda,\mu}(t^-u,t^-v)=\sup_{t\geq 0}I(tu,tv).\tag{28}$$

证明 由于 $\Phi'_1(t)=t^{d-1}(g(t)-\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u,v)\mathrm{d}x)$,故类似于引理 6 的证明可得引理 7 的证明.证毕.

引理 8[9] 如果 $\{(u_n,v_n)\}$ 在 X 中弱收敛于元 (u_0^+,v_0^+),则当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u_n,v_n)\mathrm{d}x\to\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u_0^+,v_0^+)\mathrm{d}x.\tag{29}$$

2 多解的存在性

为证明定理 1,引入如下两个引理.

引理 9 如果 $0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\dfrac{m\lambda_0}{p}$,则存在元 $(u_0^+,v_0^+)\in N_{\lambda,\mu}^{+}$ 使得 (i) $I_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+)=\delta_{\lambda,\mu}^{+}$;(ii) (u_0^+,v_0^+) 为问题(2)的一个正解.

证明 由引理 2 知泛函 $I_{\lambda,\mu}$ 在 $N_{\lambda,\mu}^{+}$ 上有下界,从而在 $N_{\lambda,\mu}^{+}$ 中存在 $I_{\lambda,\mu}$ 的一个极小化序列 $\{(u_k,v_k)\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}I_{\lambda,\mu}(u_k,v_k)=\inf\limits_{(u,v)\in N_{\lambda,\mu}^{+}}I_{\lambda,\mu}(u,v)$.

由于 $I_{\lambda,\mu}$ 是强制的,从而 (u_k,v_k) 在 X 中有界.由于 X 是自反的,从而存在 $\{(u_k,v_k)\}$ 的一个子列(不妨仍记为 (u_k,v_k))在 X 中弱收敛于元 (u_0^+,v_0^+).由加权 Sobolev 空间的紧嵌入定理(参见文献[10])知序列 $\{(u_k,v_k)\}$ 在空间 $L^m(\Omega)\times L^m(\Omega)$ 中强收敛于 (u_0^+,v_0^+).从而

$$A_{\lambda,\mu}(u_k,v_k) \to A_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+). \tag{30}$$

由引理 8 可知

$$\int_{\mathbf{R}^N} F(x,u_k,v_k)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbf{R}^N} F(x,u_0^+,v_0^+)\mathrm{d}x. \tag{31}$$

由于 $(u_k,v_k) \in N_{\lambda,\mu}^+$，从而

$$I_{\lambda,\mu}(u_k,v_k)=k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{d}\right)\|(u_k,v_k)\|^p+l\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{d}\right)\|(u_k,v_k)\|^\sigma+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{m}\right)A_{\lambda,\mu}(u_k,v_k).$$

由引理 5,当 $k\to+\infty$时 $I_{\lambda,\mu}(u_k,v_k)\to\delta_{\lambda,\mu}^+<0$.从而当 $k\to+\infty$ 时 $A_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+)>0$.

下证在 E 中 $u_k\to u_0^+,v_k\to v_0^+$. 假设结论不成立,由范数的弱下半连续性得

$$\|u_0^+\|_{1,p}<\lim_{k\to\infty}\inf\|u_k\|_{1,p},\quad \|v_0^+\|_{1,p}<\lim_{k\to\infty}\inf\|v_k\|_{1,p}. \tag{32}$$

构造两函数

$$\psi_0(t)=kt^{p-d}\|(u_0^+,v_0^+)\|^p+\ell t^{\sigma-d}\|(u_0^+,v_0^+)\|^\sigma-\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u_0^+,v_0^+)\mathrm{d}x-t^{m-d}A_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+),t>0,$$

$$\psi_k(t)=kt^{p-d}\|(u_k,v_k)\|^p+\ell t^{\sigma-d}\|(u_k,v_k)\|^\sigma-\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u_k,v_k)\mathrm{d}x-t^{m-d}A_{\lambda,\mu}(u_k,v_k),t>0.$$

令 $\bar t_0=\bar t_0(u_0^+,v_0^+)=\left(\dfrac{(d-m)A_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+)}{k(d-p)\|(u_0^+,v_0^+)\|^p}\right)^{\frac{1}{p-m}}>0$.显然,当 $t\to0^+$ 时 $\psi_0(t)\to-\infty$;当 $t\to\infty$ 时

$$\psi_0(t)\to-\int_{\mathbf{R}^N}F(x,u_0^+,v_0^+)\mathrm{d}x,$$

且当 $t\in(0,\bar t_0)$ 时 $\psi_0(t)$ 单调增加,当 $t>\bar t_0$ 时递减.从而函数 $\psi_0(t)$ 在 $\bar t_0$ 点取得最大值,类似于引理 7 的证明,存在唯一的 $0<t_0^+<\bar t_0$ 使得$(t_0^+u_0^+,t_0^+v_0^+)\in N_{\lambda,\mu}^+$ 且有 $I_{\lambda,\mu}(t_0^+u_0^+,t_0^+v_0^+)=\inf\limits_{0\le t\le t_0}I(tu_0^+,tv_0^+)$. 从而

$$\psi_0(t_0^+)=(t_0^+)^{-d}\langle I'(t_0^+u_0^+,t_0^+v_0^+),(t_0^+u_0^+,t_0^+v_0^+)\rangle=0. \tag{33}$$

另一方面,由(32)式可知当 k 足够大时有

$$\|(u_k,v_k)\|^p>\|(u_0^+,v_0^+)\|^p. \tag{34}$$

由(30)、(31)式和(33)、(34)式可得当 k 足够大时 $\psi_k(t_0^+)>0$,且有$(u_k,v_k)\in N_{\lambda,\mu}^+$. 从而

$$\langle\Phi'(u_k,v_k),(u_k,v_k)\rangle>0.$$

则有

$$(d-m)A_{\lambda,\mu}(u_k,v_k)>k(d-p)\|(u_k,v_k)\|^p+\ell(d-\sigma)\|(u_k,v_k)\|^\sigma.$$

因此,有 $\bar t_0(u_k,v_k)>1$ 且成立 $\psi_k(1)=\langle I_{\lambda,\mu}{}'(u_k,v_k),(u_k,v_k)\rangle=0$,及当 $t\in(0,t_0(u_k,v_k))$ 时 $\psi_k(t)$ 单调增加.从而当 k 足够大时 $\psi_k(t)<0,\forall t\in(0,1]$.因此,得到 $1<t_0^+<t_0(u_0^+,v_0^+)$.但是$(t_0^+u_0^+,t_0^+v_0^+)\in N_{\lambda,\mu}^+$ 且有

$$I_{\lambda,\mu}(t_0^+u_0^+,t_0^+v_0^+)=\inf_{0\le t\le t_0}I_{\lambda,\mu}(tu_0^+,tv_0^+),$$

从而 $I_{\lambda,\mu}(t_0^+u_0^+,t_0^+v_0^+)<I_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+)<\lim\limits_{k\to\infty}I_{\lambda,\mu}(u_k,v_k)=\delta_{\lambda,\mu}^+$,矛盾! 因此,在 E 中有 $u_k\to u_0^+,v_k\to v_0^+$,从而 $I_{\lambda,\mu}(u_k,v_k)\to I_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+)=\delta_{\lambda,\mu}^+$.因此,$(u_0^+,v_0^+)$ 为 $I_{\lambda,\mu}(u,v)$ 在 $N_{\lambda,\mu}^+$ 中的极小点.因为 $I_{\lambda,\mu}(u_0^+,v_0^+)=I_{\lambda,\mu}(|u_0^+|,|v_0^+|)$,从而$(|u_0^+|,|v_0^+|)\in N_{\lambda,\mu}^+$.由引理 4,$(u_0^+,v_0^+)$ 是问题(1) 的非负解.

类似的,可以得到如下引理.

引理 10　设$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_2)$成立,$0<\lambda h_{1\theta}+\mu h_{2\theta}<\dfrac{m\lambda_0}{p}$,$(\lambda,\mu)\in R^2\backslash\{(0,0)\}$,则函数 $I_{\lambda,\mu}(u,v)$ 有极小点(u_0^-,v_0^-) 使得(i)$I_{\lambda,\mu}(u_0^-,v_0^-)=\delta_{\lambda,\mu}^-$, (ii) (u_0^-,v_0^-) 是问题(2) 的非平凡非负弱解.

定理 1 的证明　由引理 9 和引理 10 可知问题(2)具有两个非平凡的非负弱解 (u_0^+,v_0^+)和(u_0^-,v_0^-)使得$(u_0^+,v_0^+)\in N_{\lambda,\mu}^+$,$(u_0^-,v_0^-)\in N_{\lambda,\mu}^-$.由于 $N_{\lambda,\mu}^+\cap N_{\lambda,\mu}^-=\varnothing$,从而$(u_0^+,v_0^+)\neq(u_0^-,v_0^-)$. 定理 1 证毕.

参 考 文 献

[1]　KIRCHHOFF G.Mechanik[M].Teipzig:Teubner,1983:28-35.

[2] LIONS J L.On some questions in boundary value problems of mathematical physics[C]//JANEIRO R. Mechanics and Partial Differential Equations.Amsterdam:North-Holland,1978:284-346.

[3] ALVES C O,Figueiredo G M.Nonlinear perturbations of a periodic Kirchhoff equation in $\mathbf{R}^N$[J].Nolinear Anal,2012,75(5):2750-2759.

[4] WANG L.On a quasilinear Schrödinger-Kirchhoff-type equation with radial potentials[J].Nolinear Anal,2013,83(3):58-68.

[5] NIE J J.Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a class of Schrödinger-Kirchhoff-type equations[J].J Math Anal Appl,2014,417:65-79.

[6] ZHANG H,ZHANG F B.Ground states for the nonlinear Kirchhoff type problems[J].J Math Anal Appl,2015,423:1671-1692.

[7] XU L,CHEN H.Ground solutions for Kirchhoff-type equations with a general nonlinearity in the critical growth[J].Adv Nolinear Anal,2018,7:535-546.

[8] CAFFARELLI L,KOHN R,NIRENBERG L.First order interpolation inequalities with weights[J].Compos Math,1984,53:437-477.

[9] LIU S,CHEN C S.Multiple solutions of a quasilinear elliptic system involving the nonlinear boundary conditions on exterior domain[J].Math Meth Appl Sci,2013,36:5-17.

[10] YANG Z D,MO J,LI S B.Positive solutions of p-Laplacian equations with nonlinear boundary condition[J].Discrete and Continuous Dynamical Systems,2011,16(2):623-636.

Multiple solutions for a class of nonlocal singular elliptic system

Chen Lin, Tang Nan

(College of Mathematics and Statistic, Yili Normal University,Yining 835000, China)

Abstract: In this paper, we study the existence and multiplicity to a class to nonlocal singular elliptic system. Firstly, the definition of weak solution to the equations is obtained by integrating both sides of the equations. Secondly, Nehari manifold is constructed to narrow the existence range of solutions. Finally, we prove that the problem has at least two positive solutions by introducing fibering map and using variational methods.

Keywords: elliptic system; Nehari manifold; fibering map; variational method

[责任编校 陈留院 赵晓华]