文章编号:1000—2367(2015)03—0021—07 DOI:10.16366/j.cnki.1000—2367.2015.03.005

$\mathbf{R}^n$ 中具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面

姬 秀,胡传峰

(长江大学 文理学院,湖北 荆州 434000)

摘 要:若超曲面的 Laguerre 形式为零且 Laguerre 第二基本形式的特征值(称为 Laguerre 主曲率)为常数,则称超曲面为 Laguerre 等参超曲面.对 $\mathbf{R}^n$ 中具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面进行了研究,得到了相应的分类定理.

关键词:Laguerre 度量;Laguerre 形式;Laguerre 等参超曲面;Laguerre 张量;Laguerre 第二基本形式

中图分类号:O174.2 **文献标志码**:A

文献[1]研究了 R^3 上曲面的 Laguerre 几何,接着文献[2]建立了 $\mathbf{R}^n$ 上超曲面的 Laguerre 微分几何框架,近年来,对 Laguerre 几何的研究已取得了较大进展[3-6].在 Laguerre 微分几何中研究 Laguerre 等参超曲面是一重要的研究课题,目前已有结果见文献[7—11].本文研究 $\mathbf{R}^n$ 中具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲.

为了得到主要定理,我们需要下面的引理

引理 1[3] 设 $x:M\to\mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐超曲面,若 Laguerre 第二基本形式平行,则 x Laguerre 等价于下列超曲面的开部分之一.

(1) 超曲面 $x:S^{k-1}\times H^{n-k}\to\mathbf{R}^n$(见例 1);

(2) 超曲面 $x:\mathbf{R}^{n-1}\to\mathbf{R}_0^n$ 在 τ 下的像(见例 2).

Laguerre 嵌入 $\tau:U\mathbf{R}_0^n\to U\mathbf{R}^n$ 的定义见文献[3].

引理 2[4] 设 $x:M\to\mathbf{R}^n$ 是主曲率非零且具有常 Laguerre 特征值的无脐超曲面,若 x 的 Laguerre 形式是零且 x 不是 Laguerre 迷向超曲面,则 x Laguerre 等价于下列超曲面的开部分之一.

(1) 超曲面 $x:S^k-1\times H^{n-k}\to\mathbf{R}^n$(见例 1);

(2) 超曲面 $x=\left(-\frac{w}{\xi_1}f,v-\frac{w_1}{\xi_0}\right):S^m(1)\times M^{n-m-1}\to\mathbf{R}^n$(见例 3).

例 1 超曲面 $x:S^{k-1}\times H^{n-k}\to\mathbf{R}^n$,其中 $x(u,v,w)=\left(\frac{u}{w}(1+w),\frac{v}{w}\right)$,这里 $(v,w):H^{n-k}\to\mathbf{R}^{n-k+1}$ 是截曲率为 -1 的 $(n-k)$- 维双曲空间到 $(n-k+1)$- 维罗伦兹空间 $\mathbf{R}_1^{n-k+1}$ 的标准嵌入.

文献[3]已证明超曲面 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面且第二基本形式平行.

例 2 超曲面 $x:\mathbf{R}^{n-1}\to\mathbf{R}_0^n$ 在 τ 下的像,其中

$$x(u_1,u_2,\cdots,u_t)=\left(\frac{\mu_1\mid u_1\mid^2+\mu_2\mid u_2\mid^2+\cdots+\mu_t\mid u_t\mid^2}{2},u_1,u_2,\cdots,u_t,\right.$$
$$\left.\frac{\mu_1\mid u_1\mid^2+\mu_2\mid u_2\mid^2+\cdots+\mu_t\mid u_t\mid^2}{2}\right)$$

$(u_1,u_2,\cdots,u_t)\in\mathbf{R}_1^k\times\mathbf{R}_2^k\times\cdots\times\mathbf{R}_t^k=\mathbf{R}^{n-1}$,$\mid u_i\mid^2=u_i.u_i$,$i=1,\cdots,t$,$\mu_1,\cdots,\mu_t$ 是非零常数.

文献[3]已证明超曲面 x 是具有 t 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面且第二基本形式平行.

例 3 设 $y=(v,w):M^{n-m-1}\to\mathbf{R}_1^{n-m}$ 是具有非零主曲率的无脐类空可定向超曲面,$\xi=(\xi_0,\xi_1):M^{n-m-1}\to$

收稿日期:2014-07-03;**修回日期**:2015-03-22.

基金项目:国家自然科学基金(11171207);湖北省教育厅科学技术研究基金(B2014281).

作者简介(通信作者):姬秀(1979—),女,河南信阳人,长江大学讲师,研究方向为微分几何,E-mail:jixiu1106@163.com.

$\mathbf{R}_1^{n-m}$是单位法场，其中 $v,\xi_0 \in \mathbf{R}^{n-m-1}, w,\xi_1 \in \mathbf{R}, \xi_0 \cdot \xi_0 - \xi_1^2 = -1$. y 有常平均曲率半径

$$r = \frac{1}{n-m-1}\sum_i \frac{1}{k_i} = \frac{1}{n-m-1}\sum_i r_i = \text{constant}, \rho = \sum_i (r-r_i)^2 = \text{constant},$$

其中 k_i 是 y 的主曲率.

设 $f: S^m(1) \to \mathbf{R}^{m+1}$ 是古典嵌入. 定义超曲面如下

$$x = \left(-\frac{w}{\xi_1}f, v - \frac{w}{\xi_1}\xi_0\right): S^m(1) \times M^{n-m-1} \to \mathbf{R}^n.$$

文献[4] 已证明超曲面 x 有常 Laguerre 特征值及零 Laguerre 形式，且 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面.

本文我们证明了下面的主要定理：

定理 1 设 $x: M \to \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐超曲面，若 x 是具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面，则 x Laguerre 等价于 超曲面 $x: \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}_0^n$ 在 τ 下的像，其中

$$x(u_1,u_2,u_3) = \left(\frac{\mu_1|u_1|^2+\mu_2|u_2|^2+\mu_3|u_3|^2}{2}, u_1,u_2,u_3, \frac{\mu_1|u_1|^2+\mu_2|u_2|^2+\mu_3|u_3|^2}{2}\right),$$

$(u_1,u_2,u_3) \in \mathbf{R}_1^k \times \mathbf{R}_2^k \times \mathbf{R}_3^k = \mathbf{R}^{n-1}$，$|u_i|^2 = u_i . u_i$，$i = 1, 2, 3$，$\mu_1,\mu_2,\mu_3$ 是非零常数.

1 预备知识

设 $x: M \to \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐超曲面，在 Laguerre 变换群下 x 的 4 个基本不变量是：Laguerre 度量 $g = \langle dY, dY \rangle$；Laguerre 第二基本形式 $B = \sum_{i,j} B_{ij} w_i \otimes w_j$；Laguerre 张量 $L = \sum_{i,j} L_{ij} w_i \otimes w_j$；Laguerre 形式 $C = \sum_i C_i w_i$. 更详细的内容参考文献[2].

L_{ij}，B_{ij} 及 C_i 的共变导数定义为

$$\sum_k L_{ij,k} w_k = dL_{ij} + \sum_k (L_{ik} w_{kj} + L_{kj} w_{ki}). \tag{1}$$

$$\sum_k B_{ij,k} w_k = dB_{ij} + \sum_k (B_{ik} w_{kj} + B_{kj} w_{ki}). \tag{2}$$

$$\sum_j C_{i,j} w_j = dC_i + \sum_j C_j w_{ji}. \tag{3}$$

B_{ij} 的第二共变导数定义为

$$\sum_l B_{ij,kl} w_l = dB_{ij,k} + \sum_l (B_{lj,k} w_{li} + B_{il,k} w_{lj} + B_{ij,l} w_{lk}). \tag{4}$$

微分(2) 可得 Ricci 恒等式

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = \sum_m (B_{mj} R_{mikl} + B_{im} R_{mjkl}). \tag{5}$$

结构方程可积条件为

$$L_{ij,k} = L_{ik,j}, \tag{6}$$

$$C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k (B_{ik} L_{kj} - L_{ik} B_{kj}), \tag{7}$$

$$B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij}, \tag{8}$$

$$R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}, \tag{9}$$

$$\sum_{i,j} B_{ij}^2 = 1, \sum_i B_{ii} = 0, \sum_i B_{ij,i} = (n-2)C_j. \tag{10}$$

2 定理 1 的证明

设 $x: M \to \mathbf{R}^n$ 是具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面，主曲率 B_1, B_2, B_3 的重数分别为 m_1, m_2, m_3. 不失一般性可设 $m_1 \geq m_2 \geq m_3$. 由 Laguerre形式 $C = 0$，可取局部正交标架场 $\{E_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ 使得

$$B_{ij} = b_i \delta_{ij}, L_{ij} = L_i \delta_{ij}, 1 \leq i,j \leq n-1, \tag{11}$$

其中$\{b_i\}$均为常数. 由假设可令

$$b_1=\cdots=b_{m_1}=B_1,\ b_{m_1+1}=\cdots=b_{m_1+m_2}=B_2,b_{m_1+m_2+1}=\cdots=b_{n-1}=B_3. \tag{12}$$

由(10)得

$$m_1B_1+m_2B_2+m_3B_3=0,\ m_1B_1^2+m_2B_2^2+m_3B_3^2=1. \tag{13}$$

约定指标范围如下:

$$1\le a,b,c,d\le m_1,m_1+1\le p,q\le m_1+m_2,m_1+m_2+1\le \alpha,\beta\le n-1.$$

由(6),(8)及Laguerre形式$C=0$可知

$L_{ij,k}$, $B_{ij,k}$都是全对称张量. 定义

$$\omega_{ij}=\sum_k \Gamma^{kj}\omega_k,\Gamma_{kj}^i=-\Gamma_{ki}^j. \tag{14}$$

利用(2),(11),(14)及$\{b_i\}$是常数得,对$\forall i,j,k$有

$$B_{ij,k}=(b_i-b_j)\Gamma_{kj}^i=(b_j-b_k)\Gamma_{ik}^j=(b_k-b_i)\Gamma_{ji}^k, \tag{15}$$

因此对$\forall i,j,a,b,p,q,\alpha,\beta$有

$$B_{ij,i}=B_{ii,j}=B_{ab,j}=B_{pq,j}=B_{\alpha\beta\alpha,j}=0. \tag{16}$$

即$\{B_{ij,k}\}$中非零元的形式是$B_{ap,\alpha}$. 设$B_{ij,k}\ne 0$且定义非负光滑函数f为

$$f=\frac{1}{6}\mid\nabla B\mid^2=\frac{1}{6}\sum_{i,j,k}B_{ij,k}^2=\sum_{a,p,\alpha}B_{ap,\alpha}^2.$$

并定义如下3个向量矩阵:$m_2\times m_3$矩阵$(\vec{v}\,p\alpha)$, $m_1\times m_3$矩阵$(\vec{v}_{a\alpha})$, $m_2\times m_1$矩阵$(\vec{v}_{pa})$,其中

$$\vec{\omega}_{pa}=(B_{pa,1},B_{pa,2},\cdots,B_{pa,m_1})\in\mathbf{R}^{m_1},$$

$$\vec{v}_{a\alpha}=(B_{a\alpha,m_1+1},B_{a\alpha,m_1+2},\cdots,B_{a\alpha,m_1+m_2})\in\mathbf{R}^{m_2},$$

$$\vec{v}_{pa}=(B_{pa,m_1+m_2+1},B_{pa,m_1+m_2+2},\cdots,B_{pa,n-1})\in\mathbf{R}^{m_3}.$$

利用类似于文献[12]的方法,可以得到如下引理:

引理3　矩阵$(\vec{v}_{p\alpha})$,$(\vec{v}_{a\alpha})$,$(\vec{v}_{pa})$满足

$<1>\vec{v}_{p\alpha}\cdot\vec{v}_{p\beta}=\vec{v}_{a\alpha}\cdot\vec{v}_{a\beta}=0$, $\forall p,\ a,\ \alpha\ne\beta$, $<2>\vec{v}_{pa}\cdot\vec{v}_{qa}=\vec{v}_{p\alpha}\cdot\vec{v}_{q\alpha}=0$, $\forall a,\alpha,p\ne q$,

$<3>\vec{v}_{a\alpha}\cdot\vec{v}_{b\alpha}=\vec{v}_{pa}\cdot\vec{v}_{pb}=0$, $\forall p,\alpha,a\ne b$, $<4>\vec{v}_{p\alpha}\cdot\vec{v}_{q\beta}+\vec{v}_{q\alpha}\cdot\vec{v}_{p\beta}=0$, $\forall p\ne q,\alpha\ne\beta$,

$<5>\vec{v}_{a\alpha}\cdot\vec{v}_{b\beta}+\vec{v}_{b\alpha}\cdot\vec{v}_{a\beta}=0$, $\forall a\ne b,\alpha\ne\beta$, $<6>\vec{v}_{pa}\cdot\vec{v}_{qb}+\vec{v}_{qa}\cdot\vec{v}_{pb}=0$, $\forall a\ne b,p\ne q$,

$<7>\mid\vec{v}_{p\alpha}\mid^2+\mid\vec{v}_{q\beta}\mid^2=\mid\vec{v}_{q\alpha}\mid^2+\mid\vec{v}_{p\beta}\mid^2=0$, $\forall p\ne q,\alpha\ne\beta$,

$<8>\mid\vec{v}_{a\alpha}\mid^2+\mid\vec{v}_{b\beta}\mid^2=\mid\vec{v}_{b\alpha}\mid^2+\mid\vec{v}_{a\beta}\mid^2=0$, $\forall a\ne b,\ \alpha\ne\beta$,

$<9>\mid\vec{v}_{pa}\mid^2+\mid\vec{v}_{qb}\mid^2=\mid\vec{v}_{qa}\mid^2+\mid\vec{v}_{pb}\mid^2=0$, $\forall p\ne q,\ a\ne b$,

其中"•"分别表示$\mathbf{R}_1^m$,$\mathbf{R}_2^m$,$\mathbf{R}_3^m$中的标准乘积.

证明　由(2),(16)式得

$$\sum_a B_{p\alpha,a}\omega_a=(B_2-B_3)\omega_{p\alpha}, \tag{17}$$

$$\sum_p B_{a\alpha,p}\omega_p=(B_1-B_3)\omega_{a\alpha}, \tag{18}$$

$$\sum_\alpha B_{pa,\alpha}\omega_\alpha=(B_1-B_2)\omega_{ap}. \tag{19}$$

微分(17)且利用(14)、(15)式并比较$\omega_q\wedge\omega_\beta$的系数得

$$\sum_a B_{p\alpha,a}B_{q\beta,a}+\sum_a B_{p\beta,a}B_{q\alpha,a}=(B_1-B_2)(B_1-B_3)R_{pap\alpha}\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta}. \tag{20}$$

同理微分(18)式,(19)式得

$$\sum_p B_{p\alpha,a}B_{p\beta,b}+\sum_p B_{p\beta,a}B_{p\alpha,b}=(B_2-B_1)(B_2-B_3)R_{pap\alpha}\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta}, \tag{21}$$

$$\sum_\alpha B_{p\alpha,a}B_{q\alpha,b}+\sum_\alpha B_{p\alpha,b}B_{q\alpha,a}=(B_3-B_2)(B_3-B_1)R_{pap\alpha}\delta_{pq}\delta_{ab}. \tag{22}$$

由(20)～(22)可得$<1>\sim<6>$. 且由(20)～(22)及(9)得

$$2\mid\vec{v}_{p\alpha}\mid^2=(B_1-B_2)(B_1-B_3)(-L_p-L_\alpha),(23)$$

$$2\,|\,\vec{v}_{a\alpha}\,|^2=(B_2-B_1)(B_2-B_3)(-L_a-L_\alpha),\tag{24}$$

$$2\,|\,\vec{v}_{p\alpha}\,|^2=(B_3-B_2)(B_3-B_1)(-L_\alpha-L_p).\tag{25}$$

由(23) ~ (25) 可得 $<7>\sim<9>$.

引理 4 若矩阵$(\vec{v}_{p\alpha})$中有一个元是零向量,则此元所在的行(或列)中的元全是零向量.

证明 为了方便表示,在证明中用$(\vec{v}_{ij})$表示矩阵$(\vec{v}_{p\alpha})$,其中 $1\leq i\leq m_2$, $1\leq j\leq m_1$,$\vec{v}_{ij}\in\mathbf{R}_3^m$. 由引理 3 得矩阵$(\vec{v}_{ij})$具有如下性质.

性质 1 每行中的向量构成一正交集.

性质 2 每列中的向量构成一正交集.

对二阶子矩阵$\begin{bmatrix}\vec{v}_{ik} & \vec{v}_{il}\\ \vec{v}_{jk} & \vec{v}_{jl}\end{bmatrix}$有

性质 3 $\vec{v}_{ik}\cdot\vec{v}_{jl}+\vec{v}_{il}\cdot\vec{v}_{jk}=0$.

性质 4 $|\,\vec{v}_{ik}\,|^2+|\,\vec{v}_{jl}\,|^2=|\,\vec{v}_{il}\,|^2+|\,\vec{v}_{jk}\,|^2=0$.

易知矩阵的行变换及列变换不会改变上述性质. 因此可假设$\vec{v}_{11}=0$. 由性质 1,2,3 可得第 1 行及第 1 列的其余向量 $\vec{v}_{12},\cdots,\vec{v}_1 m_1,\vec{v}_{21},\cdots,\vec{v}_{m_{21}}$ 相互正交且其中至多有 m_3 个非零向量. 不妨设 $\vec{v}_{11}=\cdots=\vec{v}_{1j}=0$, $\vec{v}_{11}=\cdots=\vec{v}_{i1}=0$,其中 i, j 分别是$\{1,2,\cdots,m_2\}$, $\{1,2,\cdots,m_1\}$ 中的某个值,而其余的向量都非零. 即矩阵的第 1 行为$(0,0,\cdots,\vec{v}_{1(j+1)},\cdots,\vec{v}_{1m_1})$, 第 1 列为$(0,0,\cdots,\vec{v}_{(i+1)1},\cdots,\vec{v}_{m_2 1})$. 由性质 4 得 $\vec{v}_{kl}=0$, $\forall\, 1\leq k\leq i$, $1\leq l\leq j$. 因此可得左上角 $i\times j$ 子矩阵中的元都为零. 若第 1 行的元全为零,得证. 否则,则有 $j<m_1$ 且对所有 $l\geq j+1$ 有 $\vec{v}_{1l}\neq 0$. 固定任意 $k\in\{i+1,\cdots,m_2\}$, $l\in\{j+1,\cdots,m_1\}$. 由性质 4 得

$$|\,\vec{v}_{k1}\,|=\cdots=|\,\vec{v}_{kj}\,|,\ |\,\vec{v}_{1l}\,|=\cdots=|\,\vec{v}_{il}\,|\neq 0.\tag{26}$$

对 2 阶子式$\begin{bmatrix}0 & \vec{v}_{1l}\\ \vec{v}_{kj} & \vec{v}_{kl}\end{bmatrix}$有

$$|\,\vec{v}_{kl}\,|^2=|\,\vec{v}_{kj}\,|^2+|\,\vec{v}_{1l}\,|^2\neq 0.\tag{27}$$

另外,由性质 1,2,3 得 $\mathbf{R}^{m_3}$ 中的 $i+j+1$ 个向量

$$\vec{v}_{k1},\cdots,\vec{v}_{kj},\vec{v}_{1l},\cdots,\vec{v}_{il},\vec{v}_{kl},\tag{28}$$

相互正交. 又由第 1 行及第 1 列中的 m_1+m_2-i-j 个非零向量相互正交可得 $m_1+m_2-i-j\leq m_3$,即 $i+j+1\geq m_1+m_2-m_3+1\geq m_1+1>m_3$. 因此(28) 中存在零向量. 由(26),(27) 得对所有 $k=i+1,\cdots,m_2$ 有 $\vec{v}_{k1}=\cdots=\vec{v}_{kj}=0$, 所以矩阵的前 j 列全为零. 证毕.

引理 5 若 $\nabla B\neq 0$,则在矩阵$(\vec{v}_{p\alpha})$,$(\vec{v}_{p\alpha})$ 或$(\vec{v}_{a\alpha})$ 中不可能同时有 1 行及 1 列的元全是零向量.

证明 反证法 设矩阵$(\vec{v}_{ij})$的第 $\bar{i}$ 行及第 $\bar{j}$ 列的元全为零,则对 $\forall\, k\neq\bar{i}$,$l\neq\bar{j}$,由性质 4 得

$$|\,\vec{v}_{kl}\,|^2=|\,\vec{v}_{k\bar{j}}\,|^2+|\,\vec{v}_{\bar{i}}\,|^2-|\,\vec{v}_{\bar{i}\bar{j}}\,|^2=0.$$

因此矩阵$(\vec{v}_{ij})$中的所有元都是零,与 $\nabla B\neq 0$ 矛盾. 证毕

下面将讨论如下两种情形:

情形 I $m_1=m_2=m_3$;

情形 II $m_1\geq m_2\geq m_3$ 且 $m_1>m_3$.

对情形 I 有

引理 6 设 $x: M\to\mathbf{R}^n$ 是具有 3 个不同主曲率且重数均为 m 的 Laguerre 等参超曲面,若 $\nabla B\neq 0$, 则矩阵 $\vec{v}_{p\alpha},\vec{v}_{a\alpha},\vec{v}_{ap}$ 中的每个向量的模长都等于$\dfrac{\sqrt{f}}{m}>0$, 其中 $f=\sum\limits_{a,p,\alpha}B^2_{ap,\alpha}$ 是常值函数.

证明 证明方法类似于文献[12] 中的证明方法.

命题 1 情形 I 不可能发生.

证明 由(23) ~ (25) 及(9) 得

$$R_{p\alpha p\alpha}=\frac{2\,|\,\vec{v}_{p\alpha}\,|^2}{(B_1-B_2)(B_1-B_3)}=-L_p-L_\alpha,\tag{29}$$

$$R_{a\alpha a\alpha}=\frac{2\,|\,\vec{v}_{a\alpha}\,|^2}{(B_2-B_1)(B_2-B_3)}=-L_a-L_\alpha,\tag{30}$$

$$R_{\alpha p\alpha p}=\frac{2\mid\vec{v}_{p\alpha}\mid^2}{(B_2-B_3)(B_1-B_3)}=-L_p-L_\alpha,\tag{31}$$

(29)、(30)、(31) 这 3 式相加得

$$L_p+L_a+L_\alpha=0.\tag{32}$$

由(29) ～ (32) 式及引理 6 得

$$L_a=\frac{2f}{m^2(B_1-B_2)(B_1-B_3)},L_p=\frac{2f}{m^2(B_2-B_1)(B_2-B_3)},L_\alpha=\frac{2f}{m^2(B_3-B_2)(B_3-B_1)}.$$

由 $f\neq 0$，B_i是常数得 Laguerre 张量 L 的特征值均为常数且不等(若相等则有 $B_1=B_2=B_3$ 与假设矛盾)．由文献[4]，例 1 (文献[3] 已证明超曲面 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面) 及例 3 (x 是具有两个不同 Laguerre 主曲率的 Laguerre 等参超曲面) 知，与假设矛盾，所以得证命题 1.

对情形 II，可设

$$\mathfrak{p}_1=\{1,2,\cdots,m_1\},$$
$$\mathfrak{p}_2=\{m_1+1,m_1+2,\cdots,m_1+m_2\},$$
$$\mathfrak{p}_3=\{m_1+m_2+1,m_1+m_2+2,\cdots,n-1\}.$$

引理 7　存在一整数 m_1' 满足 $0<m_1-m_3\le m_1'<m_1$ 且使得矩阵($\vec{v}_{pa}$) 恰好有 m_1' 列全为零. 即存在含有 m_1' 个元的子集 $\mathfrak{m}_0\subset\mathfrak{p}_1$ 使得

$$\vec{v}_{pa}=0,\ a\in\mathfrak{m}_0,p\in\mathfrak{p}_2,\tag{33}$$
$$\vec{v}_{pc}\neq 0,\forall c\in\mathfrak{m}_1,p\in\mathfrak{p}_2,\tag{34}$$

其中 $\mathfrak{m}_1$ 是 $\mathfrak{m}_0$ 在 $\mathfrak{p}_1$ 中的补集.

证明　对 $\bar{p}\in\mathfrak{p}_2$，由引理 3 得 矩阵($\vec{v}_{pa}$) 的第 $\bar{p}$ 行的元(m_1 个) 相互正交. 因此第 $\bar{p}$ 行至少有 m_1-m_3 元是零. 另外由引理 4,5 知矩阵($\vec{v}_{pa}$) 中不可能有一行全为零. 交换矩阵的列使得第 $\bar{p}$ 行的所有非零元靠左. 设 $\vec{v}_{\bar{p}\tilde{m}_1}$ 是第 $\bar{p}$ 行的最后一个非零元，则有

$$1<\bar{m}_1\le m_3<m_1.\tag{35}$$

所以当 $1\le c\le\tilde{m}_1$ 时有 $\vec{v}_{\bar{p}c}\neq 0$，当 $1+\tilde{m}_1\le a\le m_1$ 时有 $\vec{v}_{\bar{p}a}=0$. 因为第 $\bar{p}$ 行至少有一个非零元，因此由引理 4 得 矩阵($\vec{v}_{pa}$) 的最后 $m_1-\tilde{m}_1$ 列全为零. 即 当 $1+\tilde{m}_1\le a\le m_1$ 时对 $\forall p\in\mathfrak{p}_2$ 有 $\vec{v}_{pa}=0$. 将性质 4 应用于二阶子矩阵 $B=\begin{bmatrix}\vec{v}_{\bar{p}c} & \vec{v}_{\bar{p}a}\\ \vec{v}_{pc} & \vec{v}_{pa}\end{bmatrix}$，其中 $1\le c\le\tilde{m}_1$，$1+\tilde{m}_1\le a\le m_1$，$\forall p$ 得

$$\mid\vec{v}_{(m_1+1)c}\mid=\cdots=\mid\vec{v}_{(m_1+m_2)c}\mid=\mid\vec{v}_{\bar{p}c}\mid,\forall 1\le\tilde{m}_1.\tag{36}$$

令 $m_1'=m_1-\tilde{m}_1$. 则有 $0<m_1-m_3\le\tilde{m}_1<m_1$，且 $\mathfrak{m}_0=\{\tilde{m}_1+1,\tilde{m}_1+2,\cdots,m_1\}$，$\mathfrak{m}_1=\{1,2,\cdots,\tilde{m}_1\}$. 证毕.

引理 8　设 $\nabla B\neq 0$，$m_1\ge m_2\ge m_3$. 若 $m_1>m_3$，则 $m_2=m_3$.

证明　对 $c\in\mathfrak{m}_1$ 由(34) 及引理 3 得矩阵的第 c 列的元(m_2 个) 相互正交. 因此 $m_2\le m_3$，由假设 $m_2>m_3$ 得 $m_2=m_3$. 证毕.

引理 9　对所有 $a,b\in\mathfrak{m}_0,c\in\mathfrak{m}_1$，$p,q\in\mathfrak{p}_2,\alpha,\beta\in\mathfrak{p}_3$，有 $L_a=L_b\neq L_c$，$L_p=L_q$，$L_\alpha=L_\beta$.

证明　由(33)，(34) 得对所有 a，$b\in\mathfrak{m}_0$，$c\in\mathfrak{m}_1$，$p,q\in\mathfrak{p}_2$，

$$\mid\vec{v}_{pa}\mid=\mid\vec{v}_{pb}\mid=\mid\vec{v}_{qa}\mid=0\neq\mid\vec{v}_{pc}\mid.$$

再由(25) 得 $L_a=L_b\neq L_c$，$L_p=L_q$. 由(33) 得对所有 $a\in\mathfrak{m}_0,p\in\mathfrak{p}_2$，$\alpha\in\mathfrak{p}_3$ 有，

$$B_{pa,\alpha}=0.\tag{37}$$

又因为 $B_{ij,k}$ 是全对称的，因此可得对所有 $a\in\mathfrak{m}_0,\alpha\in\mathfrak{p}_3$ 有 $\vec{v}_{a\alpha}=0$，再由(24) 得 $L_\alpha=L_\beta$. 证毕.

引理 10　$\tilde{m}_1=m_2=m_3$.

证明　由引理 9 得 $L_p=L_q$，$L_\alpha=L_\beta$. 由(23) 及 $\nabla B\neq 0$ 得

$$\mid\vec{v}_{p\alpha}\mid^2=\frac{1}{m_2^2}\sum_{q,\beta,c}B_{q\beta,c}^2=\frac{1}{m_2^2}f\neq 0,\forall p,\alpha.\tag{38}$$

由(37) 得每一个向量 $\vec{v}_{p\alpha}$ 的最后 $m_1-\tilde{m}_1$ 个分量都为零，因此向量 $\vec{v}_{p\alpha}$ 可被视为 $\mathbf{R}^{\tilde{m}_1}$ 中的向量. 由引理 3

得:对每个 p, 矩阵($\vec{v}_{p\alpha}$) 的第 p 行的元(m_3 个) 相互正交. 因此 $m_3 \leq \widetilde{m}_1$. 结合(35) 得 $\widetilde{m}_1 = m_2 = m_3$. 证毕

引理 11 矩阵($\vec{v}_{pa}$),($\vec{v}_{a\alpha}$),($\vec{v}_{p\alpha}$) 中的非零向量的模长都等于常数$\dfrac{\sqrt{f}}{m_2}$. 即对所有 $c,d \in m_1$, $p,q \in p_2$, $\alpha,\beta \in p_3$ 有

$$|\vec{v}_{cp}|^2 = |\vec{v}_{d\alpha}|^2 = |\vec{v}_{q\beta}|^2 = \frac{f}{m_2^2} = \text{constant} \neq 0.$$

证明 证明方法类似于文献[12] 中的证明方法.

引理 12 对所有 $a \in m_0$, $c \in m_1$, $p \in p_2$, $\alpha \in p_3$ 有

$$R_{acac} = R_{apap} = R_{a\alpha a\alpha} = 0,\ R_{cpcp} = \frac{2|\vec{v}_{cp}|^2}{(B_2 - B_3)(B_1 - B_3)},$$

$$R_{c\alpha c\alpha} = \frac{2|\vec{v}_{c\alpha}|^2}{(B_2 - B_1)(B_2 - B_3)},\ R_{p\alpha p\alpha} = \frac{2|\vec{v}_{p\alpha}|^2}{(B_1 - B_2)(B_1 - B_3)}.$$

证明 由(37) 得 $w_{ap} = w_{a\alpha} = 0$. 因此对 $\forall a \in m_0$, $c \in m_1$ 有

$$0 = -R_{apap} w_a \wedge w_p = dw_{ap} - \sum_i w_{ai} \wedge w_{ip} = -\sum_{\beta \in p_3, c \in m_1} \Gamma^c_{\beta p} w_{ac} \wedge w_\beta, \tag{39}$$

$$0 = -R_{a\alpha a\alpha} w_a \wedge w_\alpha = dw_{a\beta} - \sum_i w_{ai} \wedge w_{i\alpha} = -\sum_{q \in p_2, c \in m_1} \Gamma^c_{q\alpha} w_{ac} \wedge w_q, \tag{40}$$

记

$$w_{ac} = \sum_{b \in m_0} \Gamma^a_{bc} w_b + \sum_{d \in m_1} \Gamma^a_{dc} w_d + \sum_{q \in p_2} \Gamma^a_{qc} w_q + \sum_{\beta \in p_3} \Gamma^a_{\beta c} w_\beta.$$

则由(39),(40) 得

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma^a_{bc} \Gamma^c_{\alpha p} = 0, \forall a,\ b \in m_0, p \in p_2,\ \alpha \in p_3, \tag{41}$$

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma^a_{qc} \Gamma^c_{\alpha p} = 0, \forall a \in m_0, q \in p_2,\ \alpha \in p_3, \tag{42}$$

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma^a_{\beta c} \Gamma^c_{\alpha p} = 0, \forall a \in m_0, q \in p_2,\ \alpha,\beta \in p_3, \tag{43}$$

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma^a_{dc} \Gamma^c_{\alpha p} = 0, \forall a \in m_0, d \in p_2,\ p \in p_2, \alpha \in p_3, \tag{44}$$

由(41) 可得如下关于$\{\Gamma^a_{bc}\}_{1 \leq c \leq m}$ 的线性方程组:

$$\begin{gathered}
B_{p(m_1+m+1),1} \Gamma^a_{b1} + B_{p(m_1+m+1),2} \Gamma^a_{b2} + \cdots + B_{p(m_1+m+1),m} \Gamma^a_{bm} = 0, \\
B_{p(m_1+m+2),1} \Gamma^a_{b1} + B_{p(m_1+m+2),2} \Gamma^a_{b2} + \cdots + B_{p(m_1+m+2),m} \Gamma^a_{bm} = 0, \\
\cdots \\
B_{pm,1} \Gamma^a_{b1} + B_{pm,2} \Gamma^a_{b2} + \cdots + B_{pm,m} \Gamma^a_{bm} = 0,
\end{gathered}$$

利用性质 1,2 及引理 11 得系数矩阵 F 满足 $F^t F = \mathrm{diag}(|\vec{v}_{p1}|^2, |\vec{v}_{p2}|^2, \cdots, |\vec{v}_{pm}|^2) = |\vec{v}_{p1}|^2 I_m$. 因此有 $|F| \leq 0$. 所以方程组只有零解,即对所有的 b 有 $\Gamma^a_{b1} = \Gamma^a_{b2} = \cdots = \Gamma^a_{bm} = 0$. 因此有 $\Gamma^a_{bc} = 0$, $\forall b \in m_0$. 同理由 (42) ~ (44) 可得 $\Gamma^a_{qc} = \Gamma^a_{\beta c} = \Gamma^a_{dc} = 0$, $\forall d \in m_1$, $q \in p_2$, $\beta \in p_3$. 因此 $\Gamma^a_{ic} = 0$, $\forall i$, 即 $w_{ac} = 0$. 进一步可得 $R_{acac} = 0$. 其余等式可由(23) ~ (25) 及(9) 直接得到. 证毕.

命题 2 情形 II 不可能发生.

证明 由引理 12 及(9) 得

$$0 = L_p + L_\alpha + L_c, L_p = \frac{2f}{m_2^2(B_2 - B_1)(B_2 - B_3)}, L_\alpha = \frac{2f}{m_2^2(B_3 - B_2)(B_3 - B_1)},$$

$$L_c = -L_\alpha = \frac{2f}{m_2^2(B_1 - B_2)(B_1 - B_3)}.$$

由 $f \neq 0$,B_i是常数得 Laguerre 张量 L 的特征值均为常数且不等(若相等则有 $B_1 = B_2 = B_3$ 与假设矛盾). 由文献[4], 例 1 (文献[3] 已证明超曲面 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面.) 及例 3(x 是具有两个不同 Laguerre 主曲率的 Laguerre 等参超曲面.) 知,与假设矛盾,所以得证命题 2.

定理 1 的证明　设 $x:M\to\mathbf{R}^n$ 是具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面，由命题 1,2 得 $\nabla B\equiv 0$. 利用引理 1，得证主要定理.

参 考 文 献

[1] Blasche W. Vorlesungen Über Differentialgeometrie[M]. Berlin:Springer-Verlag,1929.

[2] Li Tongzhu. Laguerre geometry of hypersurfaces in $\mathbf{R}^n$[J]. Manuscripta Math,2007,122:73-95.

[3] Li Tongzhu, Li Haizhong, Wang changping. Classification of hypersurfaces with parallel Laguerre second fundamental form in $\mathbf{R}^n$[J]. Differential Geometry and its Applications,2010,28:148-157.

[4] Li Tongzhu, Li Haizhong, Wang changping. Classification of hypersurfaces with constant Laguerre eigenvalues in $\mathbf{R}^n$[J]. Science China Math,2011,54:1129-1144.

[5] Li Tongzhu. Laguerre geometry of surface in $\mathbf{R}^3$[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2005,21:1525-1534.

[6] 胡传峰，姬　秀. $\mathbf{R}^n$ 中仿 Laguerre 张量平行的超曲面[J]. 中北大学学报：自然科学版，2014,35(5):509-514.

[7] Li Tongzhu, Sun huafei. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in $\mathbf{R}^4$[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2011,28:1179-1186.

[8] Ji xiu, Hu chuanfeng. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in $\mathbf{R}^5$[J]. Adances in Mathematics(CHINA),2015,44(1):117-127

[9] Ji xiu, Hu chuanfeng. On Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in $\mathbf{R}^7$[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics,2014,29(4):486-500.

[10] Ji xiu, Hu chuanfeng. $\mathbf{R}^6$ 中的 Laguerre 等参超曲面[J]. 数学年刊 A,2015(2):1-16.

[11] Song yuping. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in $\mathbf{R}^n$ with two distinct non-zero principal curvatures[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2014,30:169-180.

[12] Hu zejun, Zhai shujie. Mobius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures, II[J]. Pacific Math J,2011,2:343-370.

On Laguerre Isoparametric Hypersurfaces with Three Distinct Principal Curvatures

JI Xiu, HU Chuanfeng

(College of Arts and Science, Yangtze university, Jingzhou 434000, China)

Abstract: A Laguerre isoparametric hypersurface is defined by satisfying the conditions that its Laguerre form vanishes and all the Laguerre eigenvalues are constant. In this paper, we established a complete classification for all Laguerre isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures in $\mathbf{R}^n$.

Keywords: Laguerre metric; Laguerre form; Laguerre isoparametric hypersurface; Laguerre tensor; Laguerre second fundamental form