第 44 卷 第 6 期
2016 年 11 月

河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)

Vol. 44 No. 6
Nov. 2016

文章编号:1000－2367(2016)06－0043－06 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.06.007

# 一类余拟三角 Hom-Hopf 代数

董丽红，薛 栓

(河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

**摘 要**:设 $C$ 和 $H$ 是 Hom-Hopf 代数,$\omega:C\otimes H\to H\otimes C$ 是一个线性映射.首先介绍了 Hom-$\omega$-smash 余积 Hom-Hopf 代数($C_\omega\bowtie H,\alpha\otimes\beta$)的相关概念;然后研究 Hom-Hopf 代数($C_\omega\bowtie H,\alpha\otimes\beta$)上的余拟三角结构,得到了其构成余拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件.

**关键词**:Hom-Hopf 代数;余拟三角结构;Hom-$\omega$-smash 余积

**中图分类号**:O153.3 **文献标志码**:A

Hopf 代数的拟三角结构和余拟三角结构是 Hopf 代数理论中的热点问题.相关研究见文献[1－4].在文献[5]中,作者讨论了 $\omega$-smash 余积 Hopf 代数上的余拟三角结构,给出了其构成余拟三角 Hopf 代数的充要条件.而随着起源于代数形变理论的 Hom-结构(李代数,代数,余代数,Hopf 代数)的发展,Hopf 代数和量子群中诸多内容在 Hom-结构下已有许多相对成熟的重要推论,基于此,很自然的考虑什么情况下文献[5]中 $\omega$-smash 余积 Hopf 代数在 Hom-意义下可以构成余拟三角 Hopf 代数,给出了 Hom-$\omega$-smash 余积 Hopf 代数构成余拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件.本文的所有工作都在域 $k$ 上进行的.文中将使用 Sweedler 关于余代数余乘的记号 $\Delta(c)=\sum c_1\otimes c_2$,以下省略 $\sum$.

## 1 预备知识

本节主要回顾 Hom-结构相关定义,Hom-$\omega$-smash 余积成为 Hom-Hopf 代数的充要条件和一些例子.

**定义 1**[6-9] 一个 Hom- 结合代数是一个四元组$(A,\mu,1_A,\alpha)$(简称$(A,\alpha)$),其中 $A$ 是一个线性空间,$\alpha:A\to A,\eta:k\to A,\mu:A\otimes A\to A,\mu(a\otimes a')=aa'$ 为线性映射,使对所有 $a,a',a''\in A$,下列条件满足

(HA1) $\alpha(aa')=\alpha(a)\alpha(a'),\alpha(1_A)=1_A$,其中 $1_A=\eta(1_k)$;

(HA2) $\alpha(a)(a'a'')=(aa')\alpha(a''),a1_A=1_Aa=\alpha(a)$.

一个 Hom- 余结合余代数是一个四元组$(C,\Delta,\varepsilon,\beta)$(简称$(C,\beta)$),其中 $C$ 是一个线性空间,$\beta:C\to C,\varepsilon:C\to k,\Delta:C\to C\otimes C$ 为线性映射,使对所有 $c\in C$,下列条件满足

(HC1) $\Delta\circ\beta=(\beta\otimes\beta)\circ\Delta,\varepsilon\circ\beta=\varepsilon$;

(HC2) $\beta(c_1)\otimes c_{21}\otimes c_{22}=c_{11}\otimes c_{12}\otimes\beta(c_2),\varepsilon(c_1)c_2=c_1\varepsilon(c_2)=\beta(c)$.

一个 Hom- 双代数是一个六元组$(H,\mu,1_H,\Delta,\varepsilon,\gamma)$(简称$(H,\gamma)$),其中$(H,\gamma)$是 Hom- 代数,也是 Hom- 余代数,使得线性映射 $\Delta,\varepsilon$ 是 Hom- 代数同态,即对任意 $h,g\in H$ 下列条件满足

$$\Delta(hh')=\Delta(h)\Delta(h'),\Delta(1_H)=1_H\otimes 1_H,\varepsilon(hh')=\varepsilon(h)\varepsilon(h'),\varepsilon(1_H)=1.$$

进一步,一个对极是一个线性映射 $S:H\to H$,如果满足下列条件

$$S(h_1)h_2=h_1S(h_2)=\varepsilon(h)1_H,S(\gamma(h))=\gamma(S(h)).$$

**收稿日期**:2016-07-28;**修回日期**:2016-10-23.

**基金项目**:国家自然科学基金天元基金(11426095);河南省基础与前沿技术研究计划(152300410086);河南省教育厅科学技术研究重点项目(14B110003);河南师范大学博士科研启动项目(qd14151).

**第 1 作者简介(通信作者)**:董丽红(1980－),女,河南安阳人,河南师范大学副教授,主要从事 Hopf 代数方面的研究,E-mail:dlh0373@163.com.

则一个带有对极的 Hom- 双代数称为 Hom-Hopf 代数，且对任意的 $h,g\in H$，满足：

$$S(hg)=S(g)S(h),S(1_H)=1_H,\Delta(S(h))=S(h_2)\otimes S(h_1),\varepsilon(S(h))=\varepsilon(h).$$

**定义 2**[10] 设$(C,\alpha)$和$(H,\beta)$是两个 Hom- 余代数，$\omega:C\otimes H\to H\otimes C$(对任意 $c\in C,h\in H$，记 $\omega(c\otimes h)={}^{\omega}h\otimes{}^{\omega}c$) 是一个线性映射，且满足 $\alpha({}^{\omega}c)\otimes\beta({}^{\omega}h)={}^{\omega}\alpha(c)\otimes{}^{\omega}\beta(h)$.

定义 $C_{\omega}\bowtie H$，$C\otimes H$ 作为它的向量空间，其上余乘和余单位分别为

$$\Delta_{C_{\omega}\bowtie H}=c_1\otimes{}^{\omega}\beta^{-1}(h_1)\otimes\alpha^{-1}({}^{\omega}c_2)\otimes h_2,\varepsilon_{C_{\omega}\bowtie H}(c\otimes h)=\varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h),$$

如果它是一个 Hom- 余代数，则称$(C\otimes H,\Delta_{C_{\omega}\bowtie H},\varepsilon_{C_{\omega}\bowtie H},\alpha\otimes\beta)$是一个 Hom-$\omega$-smash 余积，并简记为$(C_{\omega}\bowtie H,\alpha\otimes\beta)$.

**注记 1** 该余积和文献[11]中定义的余积不同.

**定理 1**[10] 若$(C_{\omega}\bowtie H,\alpha\otimes\beta)$是一个 Hom-$\omega$-smash 余积，当且仅当下列条件成立(其中 $\bar{\omega}=\omega$)：

$$\varepsilon_H({}^{\omega}h){}^{\omega}c=\varepsilon_H(h)\alpha(c),\varepsilon_C({}^{\omega}c){}^{\omega}h=\varepsilon_C(c)\beta(h),$$

$$({}^{\omega}h)_1\otimes({}^{\omega}h)_2\otimes\alpha({}^{\omega}c)=\beta({}^{\omega}\beta^{-1}(h_1))\otimes{}^{\bar{\omega}}h_2\otimes{}^{\bar{\omega}}({}^{\omega}c),$$

$$\beta({}^{\omega}h)\otimes({}^{\omega}\alpha(c))_1\otimes({}^{\omega}\alpha(c))_2={}^{\bar{\omega}}({}^{\omega}h)\otimes{}^{\bar{\omega}}(\alpha(c_1))\otimes\alpha({}^{\omega}c_2).$$

**注记 2** 若$(C,S_C,\alpha)$和$(H,S_H,\beta)$是两个 Hom-Hopf 代数，则 $C_{\omega}\bowtie H$ 是 Hom-$\omega$-smash 余积 Hopf 代数当且仅当定理 1 中的 3 个条件成立，且 $\omega$ 是代数同态，其对极为

$$S_{C_{\omega}\bowtie H}(c\otimes h)=S_C(\alpha^{-2}({}^{\omega}\alpha(c)))\otimes S_H(\beta^{-1}({}^{\omega}h)).$$

**例 1** (1) 设$(C,\alpha)$，$(H,\beta)$是两个 Hom-Hopf 代数，$(C,\alpha)$是左 $H$-Hom- 余模双代数[12]，余模结构为 $\rho:C\to H\otimes C,\rho(c)=c_{-1}\otimes c_0$，且满足 $hc_{-1}\otimes c_0=c_{-1}h\otimes c_0$，对任意的 $c\in C,h\in H$，定义

$$\omega:C\otimes H\to H\otimes C,c\otimes h\mapsto c_{-1}h\otimes c_0,$$

则 $C_{\omega}\bowtie H$ 是一个 Hom-smash 余积 Hopf 代数.

(2) 设$(H,\alpha,S)$是一个有限维 Hom-Hopf 代数，其中 $\alpha^2=I$，设 $h_i$ 是 $H$ 的基，$h_i^*$ 是 $H$ 的对偶基，对任意的 $x\in H^*,h\in H^{op}$，定义

$$\omega:H^{op}\otimes H^*\to H^*\otimes H^{op},h\otimes x\mapsto h_s^*(\alpha^*(x)\alpha^*(h_t^*))\otimes(\alpha(h_s)\cdot\alpha(h))\cdot S^{-1}(h_t),$$

这里“$\cdot$”是 $H^{op}$ 的乘法，则 $H^{op}_{\omega}\bowtie H^*$ 是 Drinfeld double 的对偶 Hom-Hopf 代数 $D(H)^*$.

**定义 3**[13] 设$(H,\alpha)$是 Hom-Hopf 代数，$\sigma:H\otimes H\to k$ 是一个线性映射. 若对任意 $h,g,l\in H$，满足以下条件：

$(\sigma1)$ $\sigma(h,1_H)=\sigma(1_H,h)=\varepsilon(h)$，$(\sigma2)\sigma(hg,\alpha(l))=\sigma(\alpha(h),l_1)\sigma(\alpha(g),l_2)$，

$(\sigma3)$ $\sigma(\alpha(h),gl)=\sigma(h_1,\alpha(l))\sigma(h_2,\alpha(g))$，$(\sigma4)g_1h_1\sigma(h_2,g_2)=\sigma(h_1,g_1)h_2g_2$，

则称$(H,\alpha,\sigma)$是余拟三角 Hom-Hopf 代数.

**定义 4** 设$(C,\alpha)$，$(H,\beta)$是 Hom-Hopf 代数，$P:C\otimes H\to k$ 是一个线性映射. 若对任意 $a,b\in C$，$h,g\in H$，满足以下条件：

(P1) $P(a,1_H)=\varepsilon(a),P(1_C,h)=\varepsilon(h)$,

(P2) $P(ab,\beta(h))=P(\alpha(a),h_1)P(\alpha(b),h_2)$,

(P3) $P(\alpha(a),hg)=P(a_1,\beta(h))P(a_2,\beta(g))$,

则称$(C,\alpha,H,\beta,P)$是对偶相容 Hom-Hopf 代数.

**定义 5** 设$(C,\alpha)$，$(H,\beta)$是 Hom-Hopf 代数，$V:H\otimes C\to k$ 是一个线性映射. 若对任意 $a,b\in C$，$h,g\in H$，满足以下条件：

(V1) $V(h,1_C)=\varepsilon(h),V(1_H,a)=\varepsilon(a)$,

(V2) $V(hg,\alpha(a))=V(\beta(g),a_1)V(\beta(h),a_2)$,

(V3) $V(\beta(h),ab)=V(h_1,\alpha(b))V(h_2,\alpha(a))$,

则称$(H,\beta,C,\alpha,V)$是斜对偶相容 Hom-Hopf 代数.

**定义 6** 设$(C,\alpha)$，$(H,\beta)$是 Hom-Hopf 代数，$\omega:C\otimes H\to H\otimes C$ 是一个线性映射，$(C,\alpha,H,\beta,P)$是对偶相容 Hom-Hopf 代数，$(H,\beta,C,\alpha,V)$是斜对偶相容 Hom-Hopf 代数，$Q:C\otimes C\to k$ 是线性映射. 若对任意 $a,b,c\in C$，满足以下条件：

(Q1) $Q(a,1_C)=Q(1_C,a)=\varepsilon(a)$，

(Q2) $Q(ab,\alpha(c))=P(a_2,\beta({}^{\omega}1_H))Q(a_1,c_1)Q(\alpha(b),{}^{\omega}\alpha^{-1}(c_2))$，

(Q3) $Q(\alpha(a),bc)=V(\beta({}^{\omega}1_H),c_2)Q(a_1,c_1)Q({}^{\omega}\alpha^{-1}(a_2),\alpha(b))$，

(Q4) $b_1a_1Q(a_2,b_2)=V(\beta({}^{\omega}1_H),\alpha^{-1}(b_{22}))P(\alpha^{-1}(a_{21}),\beta({}^{\bar{\omega}}1_H))Q(a_1,b_1){}^{\omega}\alpha^{-2}(a_{22}){}^{\bar{\omega}}\alpha^{-2}(b_{21})$，

则称$(C,\alpha,Q)$ 是弱余拟三角 Hom-Hopf 代数.

**定义 7**　设$(C,\alpha)$，$(H,\beta)$ 是 Hom-Hopf 代数，$\omega: C\otimes H\rightarrow H\otimes C$ 是线性映射. 若对任意 $h\in H$，$\omega$ 满足条件：${}^{\omega}1_C\otimes{}^{\omega}h=1_C\otimes\beta(h)$，则称 $\omega$ 是右正规的.

## 2　Hom-$\omega$-smash 余积 Hopf 代数上的余拟三角结构

本节主要讨论 Hom-$\omega$-smash 余积 Hopf 代数$(C_{\omega}\bowtie H,\alpha\otimes\beta)$ 构成余拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件，当 $\alpha\otimes\beta=I$ 时，可得到文献[5] 的定理 3.6.

**引理 1**　设$(C_{\omega}\bowtie H,\alpha\otimes\beta,\sigma)$ 是余拟三角 Hom-Hopf 代数. 对任意 $a,b\in C,h,g\in H$，定义映射

$$T: H\otimes H\rightarrow k,T(h,g)=\sigma(1_C\otimes h,1_C\otimes g),$$
$$P: C\otimes H\rightarrow k,P(a,h)=\sigma(a\otimes 1_H,1_C\otimes h),$$
$$V: H\otimes C\rightarrow k,V(h,b)=\sigma(1_C\otimes h,a\otimes 1_H),$$
$$Q: C\otimes C\rightarrow k,Q(a,b)=\sigma(a\otimes 1_H,b\otimes 1_H).$$

则有(1)$T(h,1_H)=T(1_H,h)=\varepsilon(h)$；

(2) $P(a,1_H)=\varepsilon(a),P(1_C,h)=\varepsilon(h)$；

(3) $V(h,1_C)=\varepsilon(h),V(1_H,a)=\varepsilon(a)$；

(4) $Q(a,1_C)=Q(1_C,a)=\varepsilon(a)$.

**引理 2**　设$(C_{\omega}\bowtie H,\Delta_{C_{\omega}\bowtie H},\varepsilon_{C_{\omega}\bowtie H},\alpha\otimes\beta)$ 是一个 Hom-$\omega$-smash 余积 Hopf 代数，$\omega$ 是右正规的线性映射，则对任意 $c\in C,h\in H$，有

$$h\beta^{-1}({}^{\omega}1_H)\otimes{}^{\omega}c={}^{\omega}h\otimes{}^{\omega}c=\beta^{-1}({}^{\omega}1_H)h\otimes{}^{\omega}c,$$
$$\beta({}^{\omega}h)\otimes({}^{\omega}\alpha(c))_1\otimes({}^{\omega}\alpha(c))_2=\beta^{-1}({}^{\bar{\omega}}1_H){}^{\omega}h\otimes{}^{\bar{\omega}}\alpha(c_1)\otimes\alpha({}^{\omega}c_2),$$
$$\beta({}^{\omega}h)\otimes({}^{\omega}\alpha(c))_1\otimes({}^{\omega}\alpha(c))_2={}^{\omega}h\beta^{-1}({}^{\bar{\omega}}1_H)\otimes{}^{\bar{\omega}}\alpha(c_1)\otimes\alpha({}^{\omega}c_2).$$

**证明**　直接验证即可.

**引理 3**　设$(C_{\omega}\bowtie H,\alpha\otimes\beta,\sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数. 则对任意 $a,b\in C,h,g\in H$，有 $\sigma(\alpha(a)\otimes\beta(h),\alpha(b)\otimes\beta(g))=T(h_1,g_1)P(a_2,g_2)V(h_2,b_2)Q(a_1,b_1)$.

**证明**　取 $\omega=\bar{\omega}=\tau,a\otimes h,b\otimes g\in C_{\omega}\bowtie H$，因为 $C_{\omega}\bowtie H$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数，故可得

$$(b_1a_1\otimes{}^{\bar{\omega}}\beta^{-1}(g_1){}^{\omega}\beta^{-1}(h_1))\sigma(\alpha^{-1}({}^{\omega}a_2)\otimes h_2,\alpha^{-1}({}^{\bar{\omega}}b_2)\otimes g_2)=$$
$$\sigma(a_1\otimes{}^{\omega}\beta^{-1}(h_1),b_1\otimes{}^{\bar{\omega}}\beta^{-1}(g_1))(\alpha^{-1}({}^{\omega}a_2)\alpha^{-1}({}^{\bar{\omega}}b_2)\otimes h_2g_2)$$

令 $a=1_C,g=1_H$ 并用 $I\otimes\varepsilon$ 作用得 $\sigma(1_C\otimes\beta(h),a_1\otimes{}^{\omega}1_H){}^{\omega}a_2=\alpha(a_1)V(\beta(h),a_2)$；令 $b=1_C,h=1_H$ 并用 $I\otimes\varepsilon$ 作用得 $\sigma(a_1\otimes{}^{\omega}1_H,1_C\otimes\beta(h)){}^{\omega}a_2=\alpha(a_1)P(a_2,\beta(h))$.

因此有

$$\sigma(\alpha(a)\otimes\beta(h),\alpha(b)\otimes\beta(g))=\sigma((1_C\otimes h)(a\otimes 1_H),\alpha(b)\otimes\beta(g))=\sigma(1_C\otimes\beta(h),b_1\otimes$$
$$\beta^{-1}({}^{\omega}1_H)\beta^{-1}(g_1))\sigma(\alpha(a)\otimes 1_H,\alpha^{-1}({}^{\omega}b_2)\otimes g_2)=\sigma(1_C\otimes{}^{\bar{\omega}}\beta^{-1}(h_1),1_C\otimes$$
$$g_1)\sigma(\alpha^{-1}({}^{\bar{\omega}}1_C)\otimes h_2,b_1\otimes\beta({}^{\omega}1_H))\sigma(a_1\otimes{}^{\tau}1_H,1_C\otimes g_2)\sigma(\alpha^{-1}({}^{\tau}a_2)\otimes 1_H,{}^{\omega}\alpha^{-1}(b_2)\otimes$$
$$1_H)=\sigma(1_C\otimes h_1,1_C\otimes g_1)\sigma(1_C\otimes h_2,b_1\otimes{}^{\omega}1_H)\sigma(a_2\otimes 1_H,1_C\otimes g_2)\sigma(a_1\otimes 1_H,$$
$$\alpha^{-1}({}^{\omega}b_2)\otimes 1_H)=\sigma(1_C\otimes h_1,1_C\otimes g_1)\sigma(1_C\otimes h_2,b_2\otimes 1_H)\sigma(a_2\otimes 1_H,1_C\otimes g_2)$$
$$\sigma(a_1\otimes 1_H,b_1\otimes 1_H)=T(h_1,g_1)P(a_2,g_2)V(h_2,b_2)Q(a_1,b_1).$$

**命题 1**　设$(C_{\omega}\bowtie H,\Delta_{C_{\omega}\bowtie H},\varepsilon_{C_{\omega}\bowtie H},\alpha\otimes\beta,\sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数，其中 $\sigma(\alpha(a)\otimes\beta(h),\alpha(b)\otimes\beta(g))=T(h_1,g_1)P(a_2,g_2)V(h_2,b_2)Q(a_1,b_1)$，则对任意 $a,b\in C,h,g\in H$，有

(1) $(H,T)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数；

(2) $(C,H,P)$ 是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数;

(3) $(H,C,V)$ 是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数;

(4) $(C,Q)$ 是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数;

(5) $T,P,V,Q$ 满足以下条件:

(a) $\alpha(a_1)P(a_2,\beta(g)) = T({}^{\omega}1_H,g_1)P(a_1,g_2){}^{\omega}a_2$,

(b) $\beta(g_2)P(\alpha(a),g_1) = g_1\beta({}^{\omega}1_H)P({}^{\omega}a,g_2)$,

(c) $\alpha(a_1)V(\beta(g),a_2) = T(g_1,{}^{\omega}1_H)V(g_2,a_1){}^{\omega}a_2$,

(d) $\beta({}^{\omega}1_H)g_1V(g_2,{}^{\omega}a) = V(g_1,\alpha(a))\beta(g_2)$,

(e) $\beta({}^{\bar{\omega}}1_H)\beta({}^{\omega}1_H)Q({}^{\omega}a,{}^{\bar{\omega}}b) = Q(\alpha(a),\alpha(b))1_H$,

(f) $V(\beta(g),b_2)Q(\alpha(a),b_1) = P(a_2,\beta({}^{\omega}1_H))Q(a_1,b_1)V(\beta(g),{}^{\omega}\alpha^{-1}(b_2))$,

(g) $T(\beta(g),h_1)P(\alpha(a),h_2) = T(\beta(g),h_2)P(\alpha(a),h_1)$,

(h) $P(a_2,\beta(g))Q(a_1,\alpha(b)) = V(\beta({}^{\omega}1_H),b_2)Q(a_1,b_1)P({}^{\omega}\alpha^{-1}(a_2),\beta(g))$,

(i) $T(h_1,\beta(g))V(h_2,\alpha(a)) = T(h_2,\beta(g))V(h_1,\alpha(a))$.

**证明** 对任意 $a,b,c \in C,h,g,l \in H$,由于 $C_{\omega} \bowtie H$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数,可得:

$$T(\beta^{-1}(h_1g_1),l_1)P(\alpha^{-1}(a_2b_2),l_2)V(\beta^{-1}(h_2g_2),c_2)Q(\alpha^{-1}(a_1b_1),c_1) = T(h_1,\beta^{-1}(({}^{\omega}\beta^{-1}(l_1))_1))\cdot P(a_2,\beta^{-1}(({}^{\omega}\beta^{-1}(l_1))_2))V(h_2,\alpha^{-1}(c_{12}))Q(a_1,\alpha^{-1}(c_11))\cdot T(g_1,\beta^{-1}(l_{21}))P(b_2,\beta^{-1}(l_{22}))V(g_2,\alpha^{-2}({}^{\omega}c_2)_2)Q(b_1,\alpha^{-2}({}^{\omega}c_2)_1), \tag{1}$$

由于 $\sigma$ 满足条件($\sigma3$),有:

$$T(h_1,\beta^{-1}(g_1l_1))P(a_2,\beta^{-1}(g_2l_2))V(h_2,\alpha^{-1}(b_2c_2))Q(a_1,\alpha^{-1}(b_1c_1)) = T(\beta^{-1}(({}^{\omega}\beta^{-1}(h_1))_1),l_1)P(\alpha^{-1}(a_{12}),l_2)V(\beta^{-1}(({}^{\omega}\beta^{-1}(h_1))_2),c_2)Q(\alpha^{-1}(a_11),c_1)\cdot T(\beta^{-1}(h_{21}),g_1)P(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_2)_2,g_2)V(\beta^{-1}(h_{22}),b_2)Q(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_2)_1,b_1), \tag{2}$$

由于 $\sigma$ 满足条件($\sigma4$),有:

$$(b_1a_1 \otimes {}^{\bar{\omega}}\beta^{-1}(g_1){}^{\omega}\beta^{-1}(h_1))T(\beta^{-1}(h_{21}),\beta^{-1}(g_{21}))P(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_2)_2,\beta^{-1}(g_{22}))\cdot V(\beta^{-1}(h_{22}),\alpha^{-2}({}^{\bar{\omega}}b_2)_2)Q(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_2)_1,\alpha^{-2}({}^{\bar{\omega}}b_2)_1) = T(({}^{\omega}\beta^{-2}(h_1))_1,({}^{\bar{\omega}}\beta^{-2}(g_1))_1)\cdot P(\alpha^{-1}(a_{12}),({}^{\bar{\omega}}\beta^{-2}(g_1))_2)V(({}^{\omega}\beta^{-2}(h_1))_2,\alpha^{-1}(b_{12}))\cdot Q(\alpha^{-1}(a_{11}),\alpha^{-1}(b_{11}))({}^{\omega}\alpha^{-1}(a_2){}^{\bar{\omega}}\alpha^{-1}(b_2) \otimes h_2g_2). \tag{3}$$

在(1)式中令 $a = b = c = 1_C$,有 $T(hg,\beta(l)) = T(\beta(h),l_1)T(\beta(g),l_2)$;在(2)式中令 $a = b = c = 1_C$,有 $T(\beta(h),gl) = T(h_1,\beta(l))T(h_2,\beta(g))$;在(3)式中令 $a = b = 1_C$,并用 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端,有 $g_1h_1T(h_2,g_2) = T(h_1,g_1)h_2g_2$;由引理 1(1) 知$(H,T)$是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数.

在(1)式中令 $c = 1_C,h = g = 1_H$,有(P2)成立;在(2)式中令 $b = c = 1_C,h = 1_H$,有(P3)成立;由引理 1(2) 知$(C,H,P)$是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数.

在(1)式中令 $a = b = 1_C,l = 1_H$,有(V2)成立;在(2)式中令 $a = 1_C,g = l = 1_H$,有(V3)成立;由引理 1(3) 知$(H,C,V)$是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数.

在(1)式中令 $h = g = l = 1_H$,有(Q2)成立;在(2)式中令 $h = g = l = 1_H$,有(Q3)成立;在(3)式中令 $h = g = 1_H$,并用 $I \otimes \varepsilon$ 作用在两端,有(Q4)成立;由引理 1(4) 知$(C,Q)$是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数.

在(3)式中令 $b = 1_C,h = 1_H$,并用 $I \otimes \varepsilon$ 和 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端,有(a)与(b)成立;令 $a = 1_C,g = 1_H$,并用 $I \otimes \varepsilon$ 和 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端,有(c)与(d)成立;令 $h = g = 1_H$,并用 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端,有(e)成立;在(1)式中令 $b = 1_C,h = l = 1_H$,有(f)成立;令 $b = c = 1_C,h = 1_H$,有(g)成立;在(2)式中令 $b = 1_C,h = l = 1_H$,有(h)成立;令 $a = b = 1_C,l = 1_H$,有(i)成立.

**命题 2** 设$(C_{\omega} \bowtie H,\Delta_{C_{\omega} \bowtie H},\varepsilon_{C_{\omega} \bowtie H},\alpha \otimes \beta)$是一个 Hom-$\omega$-smash 余积 Hopf 代数,对任意 $a,b \in C$,$h,g \in H$,若以下条件满足:

(1) $(H,T)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数;

(2) $(C,H,P)$ 是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数;

(3) $(H,C,V)$ 是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数;

(4) $(C,Q)$ 是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数；

(5) $T,P,V,Q$ 满足命题 1 中的(a)－(i) 条件. 则$(C_\omega \bowtie H,\alpha\otimes\beta,\sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数，其中 $\sigma(\alpha(a)\otimes\beta(h),\alpha(b)\otimes\beta(g)) = T(h_1,g_1)P(a_2,g_2)V(h_2,b_2)Q(a_1,b_1)$.

**证明**　这里 $a,b,c\in C,h,g,l\in H,\omega=\tilde{\omega}=\tau=\theta$，由定义$(\sigma1)$，(P1)，(V1)，(Q1) 易知$\sigma$满足条件$(\sigma1)$，下面验证 $\sigma$ 满足条件$(\sigma2)$：

$$\begin{aligned}
&\sigma((a\otimes h)(b\otimes g),\alpha(c)\otimes\beta(l)) = \sigma(ab\otimes hg,\alpha(c)\otimes\beta(l)) = T(\beta^{-1}(h_1g_1),l_1)P(\alpha^{-1}(a_2b_2),l_2)\cdot\\
&V(\beta^{-1}(h_2g_2),c_2)Q(\alpha^{-1}(a_1b_1),c_1) = T(h_1,\beta^{-1}(l_{11}))T(g_1,\beta^{-1}(l_{12}))P(a_2,\beta^{-1}(l_{21}))\cdot\\
&P(b_2,\beta^{-1}(l_{22}))V(g_2,\alpha^{-1}(c_{21}))V(h_2,\alpha^{-1}(c_{22}))Q(\alpha^{-1}(a_1b_1),c_1) = T(h_1,\beta^{-1}(l_{11}))\cdot\\
&T(g_1,\beta^{-2}(l_{122}))P(a_2,\beta^{-2}(l_{121}))P(b_2,l_2)P(\alpha^{-1}(a_{12}),({}^{\omega}1_H)_1)P(\alpha^{-1}(b_{12}),({}^{\omega}1_H)_2)\cdot\\
&Q(\alpha^{-2}(a_{11}b_{11}),\alpha^{-1}(c_{11}))V(g_2,{}^{\omega}\alpha^{-2}(c_{12}))V(h_2,c_2) = T(h_1,\beta^{-1}(l_{11}))T(g_1,\beta^{-2}(l_{122}))\cdot\\
&P(a_2,\beta^{-2}(l_{121}))P(b_2,l_2)P(\alpha^{-1}(b_{12}),{}^{\tau}1_H)Q(\alpha^{-1}(a_{11}),\alpha^{-2}(c_{111}))Q(\alpha^{-1}(b_{11}),\\
&{}^{\tilde{\omega}}\alpha^{-3}(c_{112}))P(\alpha^{-1}(a_{12}),({}^{\tilde{\omega}}1_H)({}^{\omega}1_H))V(g_2,\alpha^{-1}({}^{\tau}({}^{\omega}\alpha^{-2}(c_{12}))))V(h_2,c_2) = T(h_1,\\
&\beta^{-1}(l_{11}))T(g_1,\beta^{-2}(l_{122}))P(a_2,\beta^{-2}(l_{121}))P(b_2,l_2)P(\alpha^{-1}(b_{12}),{}^{\tilde{\omega}}1_H)Q(\alpha^{-1}(a_{11}),\\
&\alpha^{-1}(c_{11}))Q(\alpha^{-1}(b_{11}),\alpha^{-1}(({}^{\omega}\alpha^{-2}(c_{12})_1)))P(\alpha^{-1}(a_{12}),\beta({}^{\omega}1_H))V(g_2,\\
&\alpha^{-1}({}^{\tilde{\omega}}(\alpha^{-1}({}^{\omega}\alpha^{-2}(c_{12}))_2))V(h_2,c_2) = T(h_1,\beta^{-2}(({}^{\omega}l_1)_1))T(g_1,\beta^{-1}(l_{21}))\cdot\\
&P(a_2,\beta^{-2}(({}^{\omega}l_1)_2))P(b_2,\beta^{-1}(l_{22}))Q(a_1,\alpha^{-1}(c_{11}))V(g_2,\alpha^{-3}({}^{\omega}\alpha(c_2))_2)Q(b_1,\\
&\alpha^{-3}({}^{\omega}\alpha(c_2))_1)V(h_2,\alpha^{-1}(c_{21})) = \sigma(\alpha(a)\otimes\beta(h),c_1\otimes{}^{\omega}\beta^{-1}(l_1))\sigma(\alpha(b)\otimes\beta(g),\alpha^{-1}({}^{\omega}c_2)\otimes l_2).
\end{aligned}$$

同理可验证 $\sigma$ 满足条件$(\sigma3)$. 下面验证 $\sigma$ 满足条件$(\sigma4)$：

$$\begin{aligned}
&(b\otimes g)_1(a\otimes h)_1\sigma((a\otimes h)_2,(b\otimes g)_2) = (b_1a_1\otimes{}^{\tilde{\omega}}\beta^{-1}(g_1){}^{\omega}\beta^{-1}(h_1)\sigma(\alpha^{-1}({}^{\omega}a_2)\otimes h_2,\\
&\alpha^{-1}({}^{\tilde{\omega}}b_2)\otimes g_2) = (b_1a_1\otimes{}^{\tilde{\omega}}\beta^{-1}(g_1){}^{\omega}\beta^{-1}(h_1)T(\beta^{-1}(h_{21}),\beta^{-1}(g_{21}))P(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_2)_2,\\
&\beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}),\alpha^{-2}({}^{\tilde{\omega}}b_2)_2)Q(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_2)_1,\alpha^{-2}({}^{\tilde{\omega}}b_2)_1) = (b_1a_1\otimes\\
&\beta^{-2}(({}^{\tau}g_1\beta^{-1}({}^{\theta}1_H))(\beta^{-1}({}^{\tilde{\omega}}1_H){}^{\omega}h_1)))T(\beta^{-1}(h_{21}),\beta^{-1}(g_{21}))\cdot\\
&P(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_{22}),\beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}),\alpha^{-2}({}^{\tau}b_{22}))Q(\alpha^{-3}({}^{\tilde{\omega}}\alpha(a_{21})),\\
&\alpha^{-3}({}^{\theta}\alpha(b_{21}))) = (b_1a_1\otimes\beta^{-1}((\beta^{-1}({}^{\tilde{\omega}}1_H)g_1)(h_1\beta^{-1}({}^{\omega}1_H))))T(\beta^{-1}(h_{21}),\\
&\beta^{-1}(g_{21}))P(\alpha^{-2}({}^{\omega}a_{22}),\beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}),\alpha^{-2}({}^{\tilde{\omega}}b_{22}))Q(\alpha^{-1}(a_{21}),\alpha^{-1}(b_{21})) =\\
&(b_1a_1\otimes\beta^{-2}(({}^{\tilde{\omega}}1_Hh_{21})(g_{21}\beta^{2}({}^{\omega}1_H))))T(h_1,g_1)P({}^{\omega}\alpha^{-2}(a_{22})),\beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}),\\
&\alpha^{-2}({}^{\tilde{\omega}}b_{22}))Q(\alpha^{-1}(a_{21}),\alpha^{-1}(b_{21})) = ({}^{\omega}\alpha^{-3}(a_{221}){}^{\tilde{\omega}}\alpha^{-2}(b_{21}))\otimes\beta^{-1}(h_{22}g_{22}))\cdot\\
&T(h_1,g_1)P(\alpha^{-2}(a_{222}),\beta^{-1}(g_{21}))V(\beta^{-1}(h_{21}),\alpha^{-2}(b_{222}))Q(a_1,b_1)V(\beta({}^{\omega}1_H),\alpha^{-2}(b_{221}))\cdot\\
&P(\alpha^{-1}(a_{21}),\beta({}^{\tilde{\omega}}1_H)) = (\alpha^{-2}({}^{\omega}({}^{\tilde{\omega}}\alpha^{-2}(a_{222}))){}^{\tau}\alpha^{-2}(b_{21}))\otimes\beta^{-1}(h_{22})g_2)T(h_1,\\
&\beta^{-2}(g_{111}))T({}^{\tilde{\omega}}1_H,\beta^{-2}(g_{112}))P(\alpha^{-2}(a_{221}),\beta^{-1}(g_{12}))V(\beta^{-2}(h_{21})\beta^{-2}({}^{\omega}1_H),\\
&\alpha^{-1}(b_{22}))Q(a_1,b_1)P(\alpha^{-1}(a_{21}),\beta({}^{\tau}1_H)) = (\alpha^{-1}({}^{\omega}\alpha^{-1}(a_{22})){}^{\tilde{\omega}}\alpha^{-2}({}^{\tau}\alpha^{-1}(b_{22}))\otimes\\
&h_2g_2)T(\beta^{-2}(h_{11})\beta^{-2}({}^{\omega}1_H)_1,\beta^{-1}({}^{\tau}1_H)\beta^{-2}(g_{11}))P(\alpha^{-2}(a_{212}),\beta^{-1}(g_{12}))\cdot V\\
&(\beta^{-2}(h_{12})\beta^{-2}({}^{\omega}1_H)_2,\alpha^{-1}(b_{21}))Q(a_1,b_1)P(\alpha^{-2}(a_{211}),\beta({}^{\tilde{\omega}}1_H)) = (\alpha^{-1}({}^{\omega}\alpha^{-1}(a_{22}))\cdot\\
&\alpha^{-1}({}^{\tilde{\omega}}\alpha^{-1}(b_{22}))\otimes h_2g_2)T(\beta^{-2}(h_{11})\beta^{-2}({}^{\omega}1_H)_1,\beta^{-2}({}^{\tilde{\omega}}1_H)_1\beta^{-2}(g_{11}))\cdot\\
&P(\alpha^{-1}(a_{21}),\beta^{-2}({}^{\tilde{\omega}}1_H)_2\beta^{-2}(g_{12}))V(\beta^{-2}(h_{12})\beta^{-2}({}^{\omega}1_H)_2,\alpha^{-1}(b_{21}))Q(a_1,b_1) = \sigma(a_1\otimes\\
&{}^{\omega}\beta^{-1}(h_1),b_1\otimes{}^{\tilde{\omega}}\beta^{-1}(g_1))(\alpha^{-1}({}^{\omega}a_2)\alpha^{-1}({}^{\tilde{\omega}}b_2)\otimes h_2g_2) = \sigma((a\otimes h)_1,(b\otimes g)_1)(a\otimes h)_2(b\otimes g)_2,
\end{aligned}$$

故 $\sigma$ 满足条件$(\sigma4)$，因此$(C_\omega \bowtie H,\alpha\otimes\beta,\sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数.

于是得到本节的主要结论：

**定理 2**　设$(C_\omega \bowtie H,\Delta_{C_\omega\bowtie H},\varepsilon_{C_\omega\bowtie H},\alpha\otimes\beta)$ 是一个 Hom-$\omega$-smash 余积 Hopf 代数，对任意 $a,b\in C$，$h,g\in H$，$(C_\omega \bowtie H,\alpha\otimes\beta,\sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数当且仅当以下条件成立：

(1) $(H,T)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数；

(2) $(C,H,P)$ 是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数；

(3) $(H,C,V)$ 是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数；

(4) $(C,Q)$ 是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数;

(5) $T,P,V,Q$ 满足命题 1 中的(a)－(i) 条件;

其中 $\sigma(\alpha(a)\otimes\beta(h),\alpha(b)\otimes\beta(g)) = T(h_1,g_1)P(a_2,g_2)V(h_2,b_2)Q(a_1,b_1)$.

特别的,若 $C,H$ 是 Hopf 代数,可得文献[1] 中的定理.

**推论 1**[1] 设$(C_\omega\bowtie H,\Delta_{C_\omega\bowtie H},\varepsilon_{C_\omega\bowtie H})$是$\omega$-smash余积 Hopf代数,对 $\forall a,b\in C,h,g\in H,(C_\omega\bowtie H,\sigma)$是一个余拟三角 Hopf 代数当且仅当以下条件成立:$(H,T)$ 是一个余拟三角 Hopf 代数,$(C,H,P)$ 是一个对偶相容 P-Hopf 代数,$(H,C,V)$ 是一个斜对偶相容 V-Hopf 代数,$(C,Q)$ 是一个$(P,V,\omega)$- 弱余拟三角 Hopf 代数,并且对 $T,P,V,Q$ 满足以下条件:

(a) $a_1P(a_2,g) = T({}^{\omega}1_H,g_1)P(a_1,g_2){}^{\omega}a_2$,

(b) $g_2P(a,g_1) = g_1^{\omega}1_HP({}^{\omega}a,g_2)$,

(c) $a_1V(g,a_2) = T(g_1,{}^{\omega}1_H)V(g_2,a_1){}^{\omega}a_2$,

(d) ${}^{\omega}1_Hg_1V(g_2,{}^{\omega}a) = V(g_1,a)g_2$,

(e) ${}^{\bar{\omega}}1_H{}^{\omega}1_HQ({}^{\omega}a,{}^{\bar{\omega}}b) = Q(a,b)1_H$,

(f) $V(g,b_2)Q(a,b_1) = P(a_2,{}^{\omega}1_H)Q(a_1,b_1)V(g,{}^{\omega}b_2)$,

(g) $T(g,h_1)P(a,h_2) = T(g,h_2)P(a,h_1)$,

(h) $P(a_2,g)Q(a_1,b) = V({}^{\omega}1_H,b_2)Q(a_1,b_1)P({}^{\omega}a_2,g)$,

(i) $T(h_1,g)V(h_2,a) = T(h_2,g)V(h_1,a)$,

其中 $\sigma(a\otimes h,b\otimes g) = T(h_1,g_1)P(a_2,g_2)V(h_2,b_2)Q(a_1,b_1)$.

## 参考文献


[1] 焦争鸣,郭 敏,夏正亮. Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2015,43(1):1-7.

[2] 马天水,李海英. Hopf 交叉积上的余拟三角结构[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2012,40(2):22-25.

[3] 马天水,景俊霞,景艳艳. 一类交叉双积[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2014,42(2):16-20.

[4] Ma T S, Li H Y, Yang T. Cobraided smash product Hom-Hopf algebras[J]. Colloq Math,2014,134(1):75-92.

[5] Jiao Z, Wisbauer R. The braided structures for ω-smash coproduct Hopf algebras[J]. J Algebra,2005,287(2):474-495.

[6] Yau D. Module Hom-algebras[EB/OL]. [2015-07-16]. http://arxiv. org/abs/0812. 4695.

[7] Yau D. Hom-quantum groups III: Representations and module Hom-algebras[EB/OL]. [2015-07-16]. http://arxiv. org/abs/0911. 5402.

[8] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-algebras and Hom-coalgebras[J]. J Algebra Appl,2010,9(4):553-589.

[9] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras[M]. Berlin: Springer Verlag,2009.

[10] Caenepeel S, Goyvaerts I. Monoidal Hom-Hopf Algebras[J]. Comm Algebra,2011,39(6):2216-2240.

[11] Li, H Y, Ma, T S. A construction of the Hom-Yetter-Drinfeld category[J]. Colloq Math,2014,137(1):43-65.

[12] Zheng N F. The braided structures over Hom-ω-smash coproduct Hopf algebras[J]. Acta Math Sci Ser A,2013,33(6):1068-1088.

[13] Yau D. Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras[J]. Int Electron J Algebra,2010,8:45-64.

[14] Yau D. Hom-quantum groups II: Cobraided Hom-bialgebras and Hom-quantum geometry[EB/OL]. [2015-07-16]. http://arxiv. org/abs/0907. 1880.


# A Class of Coquasitriangular Hom-Hopf Algebras


DONG Lihong, XUE Shuan

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xingxiang 453007, China)



**Abstract**: In this paper, let $C$ and $H$ be two Hom-Hopf algebras, and $\omega: C\otimes H\to H\otimes C$ a linear map. We first introduce some basic definitions about Hom-$\omega$-smash coproduct Hom-Hopf algebra $(C_\omega\bowtie H,\alpha\otimes\beta)$; then we discuss the coquasitriangular structures for Hom-$\omega$-smash coproduct Hopf algebras, and obtain the necessary and sufficient conditions for it to be coquasitriangular Hom-Hopf algebras.



**Keywords**: Hom-Hopf algebra; coquasitriangular structures; Hom-$\omega$-smash coproduct