

# 时滞静态神经网络新的 $L_2-L_\infty$ 状态估计器设计

陈玉珍<sup>1</sup>, 张涵<sup>2</sup>, 张亮亮<sup>1</sup>, 陈永刚<sup>1</sup>

(1. 河南科技学院 数学科学学院, 河南 新乡 453003; 2. 北京邮电大学 国际学院, 北京 100876)

**摘要:** 研究了一类含有时变时滞的静态神经网络的状态估计问题. 通过利用增广的 Lyapunov-Krasovskii 泛函、Wirtinger 积分不等式和新的  $L_2-L_\infty$  性能分析方法, 得到了线性矩阵不等式表示的新的  $L_2-L_\infty$  状态估计器设计充分条件. 所设计的状态估计器不仅能保证误差系统的全局指数稳定性, 而且满足规定的  $L_2-L_\infty$  性能要求. 最后, 数值例子验证了文中所提出设计方法的优越性.

**关键词:** 静态神经网络; 时变时滞; 状态估计器; 指数稳定性;  $L_2-L_\infty$  性能

**中图分类号:** TP183

**文献标志码:** A

由于神经网络在信号处理、模式识别、图像分析、最优化理论等方向的广泛应用, 神经网络的动态行为受到广泛研究<sup>[1-2]</sup>. 在神经网络的实现过程中, 有限信号传输的速度和放大器的切换速度会不可避免地引入时滞. 由于时滞会引起神经网络的震荡和不稳定<sup>[5]</sup>, 近年来, 许多学者对时滞神经网络的稳定性问题做了大量深入研究<sup>[3-13]</sup>. 然而, 在许多应用中, 由于神经元的状态通常不能全部得到, 因此对神经网络的状态估计进行研究显得尤其重要. 自文献[6]首次运用线性矩阵等式方法研究了时滞神经网络的状态估计问题后, 神经网络的状态估计和滤波问题已成为数学和控制领域的研究热点<sup>[6-15]</sup>. 例如, 文献[7]利用自由权矩阵方法研究了时滞离散递归神经网络的状态估计问题, 文献[8]讨论了中立型神经网络的状态估计问题, 文献[9]给出了分布时滞神经网络的指数状态估计器设计条件, 文献[10]讨论了一类具有马尔可夫跳跃参数的离散随机神经网络的状态估计问题. 然而, 上述提及的文献主要涉及局域神经网络. 众所周知, 神经网络分为静态神经网络和局域神经网络, 并且两种模型并不常常是等价的. 因此, 最近几年, 一些学者对时滞静态神经网络也做了一些研究<sup>[11-13]</sup>. 然而, 需要指出的是, 文献[11-13]中的分析方法仍具有较大的保守性.

对于存在能量有界的外部干扰信号, 目前相关的研究主要考虑  $H_\infty$  性能和  $L_2-L_\infty$  (广义  $H_2$ ) 性能.  $H_\infty$  状态估计问题要确保从外部扰动到估计误差的  $L_2$  增益小于或等于一个给定的正常数, 而  $L_2-L_\infty$  状态估计的设计目标是在能量有界的外部干扰下最小化估计误差的峰值. 显然, 当要求估计误差的峰值尽可能小时,  $L_2-L_\infty$  性能指标是更好的选择. 近年来, 动态系统的  $L_2-L_\infty$  状态估计(滤波)问题受到了许多研究者的关注<sup>[13-15]</sup>. 比如, 文献[14]利用 Wirtinger 积分不等式讨论了时滞 Takagi-Sugeno 模糊神经网络的  $L_2-L_\infty$  滤波问题. 通过充分利用时滞信息, 文献[15]提出了一种新的  $L_2-L_\infty$  性能分析方法, 有效地降低了保守性. 然而, 文献[15]主要针对递归时滞神经网络进行研究, 且文献[15]中选取的 L-K 泛函和利用的 Jensen 积分不等式具有较大保守性.

基于上面的讨论, 本文研究了一类时滞静态神经网络的状态估计问题. 文中的记号说明如下:  $\mathbf{R}^n$  代表  $n$  维欧氏空间,  $\mathbf{R}^{n \times m}$  代表  $n \times m$  维实矩阵,  $*$  表示对称矩阵中的对称项,  $I$  表示含有适当维数的单位矩阵, 上标“T”表示矩阵的转置矩阵,  $\|\varphi\| = \sup_{-r \leq v \leq 0} |\varphi(v)|$ , 其中  $\|\cdot\|$  表示  $\mathbf{R}^n$  中的欧氏向量范数,

收稿日期: 2018-03-19; 修回日期: 2018-05-16.

基金项目: 国家自然科学基金(61773156)

作者简介: 陈玉珍(1981—), 女, 河南许昌人, 河南科技学院讲师, 研究方向为神经网络、时滞系统, E-mail: cyz\_dlut@126.com.

通信作者: 陈永刚(1981—), 男, 河南西平人, 河南科技学院副教授, 博士, 研究方向为控制理论及应用, E-mail: happycygzmd@tom.com.

$L_2[0, \infty)$  表示  $[0, \infty)$  上平方可积的向量函数空间,  $P > 0$  表示  $P$  为对称正定矩阵,  $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(P)$  分别表示矩阵  $P$  的最大特征值和最小特征值,  $Sym(E)$  表示  $E + E^T$ .

### 1 问题描述

考虑下面受噪声干扰的连续型时滞静态神经网络

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + f(Wx(t - \tau(t)) + J) + B_1w(t), \\ y(t) = Cx(t) + Dx(t - \tau(t)) + B_2w(t), \\ z(t) = Hx(t), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{1}$$

其中  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbf{R}^n$  是神经元状态向量;  $y(t) \in \mathbf{R}^m$  是神经网络的可测输出向量;  $z(t) \in \mathbf{R}^p$  表示待估计的状态向量的线性组合;  $w(t) \in \mathbf{R}^r$  是属于  $L_2[0, \infty)$  空间的噪声信号;  $f(x(\cdot)) = [f_1(x_1(\cdot)), f_2(x_2(\cdot)), \dots, f_n(x_n(\cdot))]^T \in \mathbf{R}^n$  表示连续的神经元激励函数;  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  是正对角矩阵;  $W = [w_{ij}]_{n \times n}$  是神经元之间的连接权矩阵;  $B_1, B_2, C, D$  和  $H$  是已知的具有适当维数的实矩阵;  $\tau(t)$  是时变时滞, 且存在常数  $\tau, \mu$  使得  $0 \leq \tau(t) \leq \tau, |\dot{\tau}(t)| \leq \mu$ ;  $J = [J_1, J_2, \dots, J_n]^T$  表示外部输入向量; 函数  $\phi(t)$  是定义在  $[-\tau, 0]$  上的初始函数.

对于激励函数  $f(x(\cdot))$ , 文中假设:  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , 存在常数  $l_i$  使得

$$0 \leq \frac{f_i(u) - f_i(v)}{u - v} \leq l_i, \forall u, v \in \mathbf{R}, u \neq v. \tag{2}$$

对于上述时滞静态神经网络, 构造下面的全阶状态估计器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = -A\hat{x}(t) + f(W\hat{x}(t - \tau(t)) + J) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + D\hat{x}(t - \tau(t)), \\ \hat{z}(t) = H\hat{x}(t), \\ \hat{x}(t) = 0, t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{3}$$

其中  $\hat{x}(t)$  为估计器的状态向量,  $\hat{z}(t)$  为  $z(t)$  的估计,  $K$  是待确定的估计器的增益.

定义误差信号分别为  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  以及  $\bar{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ , 可得误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = -(A + KC)e(t) - KDe(t - \tau(t)) + \phi(We(t - \tau(t))) + (B_1 - KB_2)w(t), \\ \bar{z}(t) = He(t), \\ e(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{4}$$

其中  $\phi(We(t)) = f(Wx(t) + J) - f(W\hat{x}(t) + J)$ .

在给出本文主要结果之前, 首先引入下面的定义和引理.

**定义 1**<sup>[12]</sup> 当  $w(t) \equiv 0$  时, 误差系统(4) 称为全局指数稳定的, 如果存在常数  $\lambda > 0$  和  $\beta > 0$ , 使得对于任意给定的  $\phi(t) \in C^1[-\tau, 0; \mathbf{R}^n]$ , 使得  $\|e(t)\|^2 \leq \lambda e^{-\beta t} \sup_{-\tau < s < 0} \{\|\phi(s)\|^2, \|\dot{\phi}(s)\|^2\}$  成立.

**定义 2**<sup>[15]</sup> 对于给定的常数  $\gamma > 0$ , 如果存在状态估计器(3) 使得误差系统(4) 在  $w(t) \equiv 0$  时是全局指数稳定的, 且在零初始条件下, 对于任意非零  $w(t) \in L_2[0, \infty)$ , 都有  $\|\bar{z}(t)\|_\infty < r \|w(t)\|_2$  其中

$\|\bar{z}(t)\|_\infty = \sup_t \sqrt{\bar{z}^T(t)\bar{z}(t)}$ ,  $\|w(t)\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} w^T(t)w(t)dt}$ , 则称误差系统(4) 是全局指数稳定的且具有  $L_2$ - $L_\infty$  性能指标  $\gamma$ .

**引理 1**<sup>[16]</sup> 给定  $\alpha \in (0, 1), n \times n$  的正定矩阵  $Z$  和向量  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n$ , 定义函数  $\theta(\alpha, Z) = \frac{1}{\alpha} \xi_1^T Z \xi_1 +$

$\frac{1}{1-\alpha} \xi_2^T Z \xi_2$ . 如果存在  $n \times n$  矩阵  $M$  满足  $\begin{bmatrix} Z & M \\ M^T & Z \end{bmatrix} > 0$ , 则下列不等式成立:  $\min_{\alpha \in (0, 1)} \theta(\alpha, Z) \geq$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z & M \\ M^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

引理 2<sup>[16]</sup> 给定  $R > 0$ , 则对所有的连续函数  $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 有

$$\int_a^b \omega^T(u)R\omega(u)du \geq \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} \Omega_0(x) \\ \Omega_1(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 3R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0(x) \\ \Omega_1(x) \end{bmatrix},$$

其中  $\Omega_0(x) = \int_a^b \omega(s)ds, \Omega_1(x) = \int_a^b \omega(s)ds - \frac{2}{b-a} \int_a^b \int_a^s \omega(r)drds$ .

### 2 主要结果

定理 1 假设(1)式中的激励函数  $f(x(\cdot))$  满足(2)式, 则对于给定的标量  $\tau > 0, \alpha > 0, \gamma > 0, 0 < \mu \leq 1, \delta \neq 0$  和对角矩阵  $L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n) > 0$ , 误差系统(4) 是全局指数稳定的且具有  $L_2$ - $L_\infty$  性能指标  $\gamma$ , 如果存在  $3n \times 3n$  矩阵  $P > 0, 2n \times 2n$  矩阵  $Q > 0, n \times n$  矩阵  $S > 0, Z > 0, n \times m$  矩阵  $Y, 2n \times 2n$  矩阵  $M, n \times n$  矩阵  $X, n \times n$  实对角矩阵  $\Lambda > 0, \Gamma > 0$  使得下面的 LMIs 成立

$$\Theta = \begin{bmatrix} \bar{Z} & M \\ * & \bar{Z} \end{bmatrix} > 0, \tag{5}$$

$$\Xi < 0, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & [H \ \mathbf{0}_{p \times 3n}]^T \\ [H \ \mathbf{0}_{p \times 3n}] & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{7}$$

其中  $\Xi = \alpha G_1^T P G_1 + \mathbf{r}_1^T Q \mathbf{r}_1 - (1 - \zeta(t)) e^{-\alpha\tau} \mathbf{r}_2^T Q \mathbf{r}_2 - e^{-\alpha\tau} G^T \Theta G + \text{diag}\{S, \mathbf{0}_n, -e^{-\alpha\tau} S, \mathbf{0}_{2n}, -2\Lambda, -2\Gamma, -I, \tau^2 Z\} + \text{Sym}(G_1^T P G_2 + E_2^T (\Lambda L W) E_1 + E_4^T (\Gamma L W) E_3 + E_5^T \Sigma), \Phi = \frac{e^{-\alpha\tau}}{\tau} (E_6^T Q E_6 + E_7^T S E_7 + 2E_8^T Z E_8) + \text{diag}\{P, \mathbf{0}_n\}$ , 且有

$$G_1 = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0}_{n \times 2n} & 0 & 0 & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \\ 0 & \mathbf{0}_{n \times 2n} & \tau(t)I & 0 & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \\ 0 & \mathbf{0}_{n \times 2n} & 0 & (\tau - \tau(t))I & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{n \times (4n+q)} & I \\ I & (\zeta(t) - 1)I & 0 & \mathbf{0}_{n \times (4n+q)} & 0 \\ 0 & (1 - \zeta(t))I & -I & \mathbf{0}_{n \times (4n+q)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \\ I & I & 0 & -2I & 0 & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \\ 0 & I & -I & 0 & 0 & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \\ 0 & I & I & 0 & -2I & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0}_{n \times 4n} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times (2n+q)} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times 4n} & I & \mathbf{0}_{n \times (2n+q)} \end{bmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & I & \mathbf{0}_{n \times 4n} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times (n+q)} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times 4n} & I & \mathbf{0}_{n \times (n+q)} \end{bmatrix},$$

$$E_1 = [I \ \mathbf{0}_{n \times (7n+q)}], E_2 = [\mathbf{0}_{n \times 5n} \ I \ \mathbf{0}_{n \times (2n+q)}], E_3 = [\mathbf{0}_n \ I \ \mathbf{0}_{n \times (6n+q)}],$$

$$E_4 = [\mathbf{0}_{n \times 6n} \ I \ \mathbf{0}_{n \times (n+q)}], E_5 = [I \ \mathbf{0}_{n \times (6n+q)} \ \delta I], E_6 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$E_7 = [0 \ I \ I \ 0], E_8 = [\tau I \ -I \ -I \ 0],$$

$$\Sigma = [-XA - YC \ -YD \ \mathbf{0}_{n \times 4n} \ X \ XB_1 - YB_2 \ -X], \bar{Z} = \text{diag}(Z, 3Z).$$

此时, 状态估计器增益矩阵为  $K = X^{-1}Y$ .

证明 构造如下的 L-K 泛函

$$V(t) = \sum_{i=1}^4 V_i(t), \tag{8}$$

其中

$$V_1(t) = \bar{e}^T(t)P\bar{e}(t), \bar{e}^T(t) = \left[ e^T(t) \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s)ds \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} e^T(s)ds \right]^T,$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau(t)}^t e^{a(s-t)} \begin{bmatrix} e(s) \\ \phi(We(s)) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} e(s) \\ \phi(We(s)) \end{bmatrix} ds,$$

$$V_3(t) = \int_{t-\tau}^t e^{\alpha(s-t)} e^T(s) S e(s) ds, V_4(t) = \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t e^{\alpha(s-t)} \dot{e}^T(s) Z \dot{e}(s) ds d\theta.$$

定义向量  $\xi(t)$  为

$$\xi(t) = [e^T(t) \quad e^T(t - \tau(t)) \quad e^T(t - \tau) \quad \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s) ds \quad \frac{1}{\tau - \tau(t)} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} e^T(s) ds \quad \phi^T(We(t)) \quad \phi^T(We(t - \tau(t))) \quad w^T(t) \quad \dot{e}^T(t)]^T$$

直接计算  $V(t)$  沿着系统(4) 对时间  $t$  求导可得

$$\dot{V}_1(t) = 2\bar{e}^T(t) P \dot{\bar{e}}(t) = \xi^T(t) [G_1^T P G_2 + G_2^T P G_1] \xi(t). \tag{9}$$

$$\dot{V}_2(t) = -\alpha V_2(t) + \xi^T(t) (\mathbf{R}_1^T Q \mathbf{R}_1 - (1 - \tau(t)) e^{-\alpha\tau} \mathbf{R}_2^T Q \mathbf{R}_2) \xi(t). \tag{10}$$

$$\dot{V}_3(t) = -\alpha V_3(t) + e^T(t) S e(t) - e^{-\alpha\tau} e^T(t - \tau) S e(t - \tau). \tag{11}$$

$$\dot{V}_4(t) \leq -\alpha V_4(t) + \tau^2 \dot{e}^T(t) Z \dot{e}(t) - \tau e^{-\alpha\tau} \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s) Z \dot{e}(s) ds. \tag{12}$$

因为  $\int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s) Z \dot{e}(s) ds = \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{e}^T(s) Z \dot{e}(s) ds + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) Z \dot{e}(s) ds$ , 如果存在  $2n \times 2n$  矩阵  $M$  使得  $\Theta > 0$ , 则

由引理 1 和引理 2 知  $-\tau e^{-\alpha\tau} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{e}^T(s) Z \dot{e}(s) ds \leq -e^{-\alpha\tau} \xi^T(t) G^T \Theta G \xi(t)$ , 故可得

$$\dot{V}_4(t) \leq -\alpha V_4(t) + \tau^2 e^T(t) Z \dot{e}(t) - e^{-\alpha\tau} \xi^T(t) G^T \Theta G \xi(t). \tag{13}$$

令  $\mathbf{R} = \alpha G_1^T P G_1 + \mathbf{R}_1^T Q \mathbf{R}_1 - (1 - \tau(t)) e^{-\alpha\tau} \mathbf{R}_2^T Q \mathbf{R}_2 - e^{-\alpha\tau} G^T \Theta G$ ,  $\Delta = \text{diag}\{S, \mathbf{0}_n, -e^{-\alpha\tau} S, \mathbf{0}_{4n+p}, \tau^2 Z\} + \text{Sym}(G_1^T P G_2)$ . 由(8)~(13)式可得

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) + \xi^T(t) (\mathbf{R} + \Delta) \xi(t). \tag{14}$$

由(2)式知, 对于给定的  $\Lambda > 0, \Gamma > 0$ , 可以得到

$$-2\phi^T(We(t)) \Lambda \phi(We(t)) + 2\phi^T(We(t)) \Delta L We(t) \geq 0. \tag{15}$$

$$-2\phi^T(We(t - \tau(t))) \Gamma \phi(We(t - \tau(t))) + 2\phi^T(We(t - \tau(t))) \Gamma L We(t - \tau(t)) \geq 0. \tag{16}$$

利用系统方程(4), 对任意  $n \times n$  矩阵  $X$  和标量  $\delta \neq 0$ , 有

$$2[e^T(t) + \delta \dot{e}^T(t)] X [- (A + KC) e(t) - K D e(t - \tau(t)) + \phi(We(t - \tau(t))) + (B_1 - K B_2) w(t) - \dot{e}(t)] = 0. \tag{17}$$

把(15)~(17)式的左边加到(14)式右边, 可得

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) + \xi^T(t) \Xi \xi(t) + w^T(t) w(t). \tag{18}$$

由(6)式可知, 当  $w(t) \equiv 0$  时, 可知  $\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t)$ , 两边积分有

$$V(t) \leq e^{-\alpha t} V(0). \tag{19}$$

由(8)式可得

$$V(t) \geq \lambda_{\max}(P) \|e(t)\|^2. \tag{20}$$

$$V_1(0) \leq \left(\frac{\tau^2}{2} + 1\right) \lambda_{\max}(P) \sup_{-\tau < s < 0} \{ \|\phi(s)\|^2, \|\dot{\phi}(s)\|^2 \}. \tag{21}$$

$$V_2(0) \leq (1 + \rho^2) \tau \lambda_{\max}(Q) \sup_{-\tau < s < 0} \{ \|\phi(s)\|^2, \|\dot{\phi}(s)\|^2 \}, \rho = \max_{1 \leq i \leq n} \|l_i\|. \tag{22}$$

$$V_3(0) \leq \tau \lambda_{\max}(S) \sup_{-\tau < s < 0} \{ \|\phi(s)\|^2, \|\dot{\phi}(s)\|^2 \}. \tag{23}$$

$$V_4(0) \leq \frac{\tau^3}{2} \lambda_{\max}(Z) \sup_{-\tau < s < 0} \{ \|\phi(s)\|^2, \|\dot{\phi}(s)\|^2 \}. \tag{24}$$

令  $b = \left(\frac{\tau^2}{2} + 1\right) \lambda_{\max}(P) + (1 + \rho^2) \tau \lambda_{\max}(Q) + \tau \lambda_{\max}(S) + \frac{\tau^3}{2} \lambda_{\max}(Z)$ ,  $\rho = \max_{1 \leq i \leq n} \|l_i\|$ , 因而由(19)~(24)式

可得  $\|e(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} V(t) \leq \frac{b}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\alpha t} \sup_{-\tau < s < 0} \{ \|\phi(s)\|^2, \|\dot{\phi}(s)\|^2 \}$ . 因此, 系统(4)的平凡解是全局指数稳定的.

下面, 将证明在初始条件下, 对  $\forall w(t) \in L_2[0, \infty)$ , 有  $\|\bar{z}(t)\|_\infty < \gamma \|w(t)\|_2$  成立. 在初始条件下,  $-\alpha v(t) \leq 0$ , 因此  $\dot{V}(t) < w^T(t) w(t)$ . 对上式积分可知

$$V(t) < \int_0^t \omega^T(s)\omega(s)ds \leq \int_0^{+\infty} \omega^T(s)\omega(s)ds. \tag{25}$$

利用 Jensen 积分不等式(见文献[15]),可得

$$V(t) \geq \eta^T(t) \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \eta(t) + e^{-\alpha\tau} \frac{1}{\tau} \left[ \int_{t-\tau(t)}^t \begin{bmatrix} e(s) \\ \psi We(s) \end{bmatrix} ds \right]^T \left[ \int_{t-\tau(t)}^t \begin{bmatrix} e(s) \\ \psi We(s) \end{bmatrix} ds \right] + \frac{e^{-\alpha\tau}}{\tau} \left[ \int_{t-\tau}^t e^T(s)ds \right] S \left[ \int_{t-\tau}^t e(s)ds \right] + \frac{2e^{-\alpha\tau}}{\tau} \left[ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t e^T(s)ds d\theta \right] Z \left[ \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t e(s)ds d\theta \right],$$

故  $V(t) \geq \eta^T(t)\Phi\eta(t)$ , 其中  $\eta(t) = \left[ e^T(t) \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s)ds \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} e^T(s)ds \int_{t-\tau(t)}^t \phi^T(We(s))ds \right]^T$ .

根据(8)式和 Schur 补定理,有  $\Phi - \text{diag}\{(1/\gamma^2) \ H^T H \ 0 \ 0 \ 0\} > 0$ , 因此

$$V(t) \geq \eta(t)\Phi\eta(t) \geq (1/\gamma^2)e^T(t)H^T He(t). \tag{26}$$

由(25)式和(26)式可知

$$\bar{z}^T(t)\bar{z}(t) = e^T(t)H^T He(t) < \gamma^2 \int_0^{+\infty} \omega^T(s)ds. \tag{27}$$

对上式两端关于  $t > 0$  取上确界,有  $\|z(t)\|_\infty < \gamma \|w(t)\|_2$ .

**注 1** 本文在处理积分项  $\int_{t-\tau}^t e^T(s)Ze(s)ds$  时利用了 Wirtinger 不等式(引理 3),而文献[11-13]采用的是 Jensen 不等式.相对于 Jensen 不等式,Wirtinger 不等式在对项  $\int_{t-\tau}^t e^T(s)Ze(s)ds$  进行界定时更加精确,因此所得结果将具有较小的保守性.

**注 2** 近 10 年内,时滞动态系统的  $L_2$ - $L_\infty$  状态估计和滤波问题受到广泛研究,但大多文献在进行  $L_2$ - $L_\infty$  性能分析时并没有充分利用时滞信息,这导致所得结果具有一定的保守性<sup>[13-14]</sup>.本文在进行  $L_2$ - $L_\infty$  性能分析时,充分利用了系统的时滞信息,有效地降低了所得结果的保守性.具体地,在对  $V(t)$  的下界进行估计时有效地利用了时滞项,见(26)式.

当神经元之间的时滞为常数,即  $\tau(t) \equiv \tau$  时,选取如下的 L-K 泛函  $\tilde{V}(t) = \sum_{i=1}^4 \tilde{V}_i(t)$ , 其中  $\tilde{V}_1(t) = \left[ e^T(t) \int_{t-\tau}^t e^T(s)ds \right]^T \tilde{P} \left[ e^T(t) \int_{t-\tau}^t e^T(s)ds \right]^T, \tilde{V}_2(t) = \int_{t-\tau}^t e^{\alpha(s-t)} [e^T(s) \ \phi^T(We(s))] \tilde{Q} [e^T(s) \ \phi^T(We(s))]^T ds, \tilde{V}_3(t) = \int_{t-\tau}^t e^{\alpha(s-t)} e^T(s) \tilde{S} e(s) ds, \tilde{V}_4(t) = \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t-\theta}^t e^{\alpha(s-t)} e^T(s) \tilde{Z} e(s) ds d\theta$ . 类似于定理 1 的证明,容易得到下面常时滞的情形.

**推论 1** 假设(1)式中的激励函数  $f(x(\cdot))$  满足(2)式,则对于给定的标量  $\tau > 0, \alpha > 0, \gamma > 0, \delta \neq 0$  和对角矩阵  $L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} > 0$ , 误差系统(4) 是全局指数稳定的且具有  $L_2$ - $L_\infty$  性能指标  $\gamma$ , 如果存在  $2n \times 2n$  矩阵  $\tilde{P} > 0, \tilde{Q} > 0, n \times n$  矩阵  $\tilde{S} > 0, \tilde{Z} > 0, \tilde{X}, n \times m$  矩阵  $\tilde{Y}$  和  $n \times n$  实对角矩阵  $\tilde{\Lambda} > 0, \tilde{\Gamma} > 0$ , 使得如下 LMIs 成立

$$\tilde{\Xi} < 0, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi} & [H \ 0_{p \times 2n}]^T \\ [H \ 0_{p \times 2n}] & \gamma^2 I_p \end{bmatrix} > 0, \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi} = & \alpha \tilde{G}_1^T \tilde{P} \tilde{G}_1 + \tilde{Y}_1^T \tilde{Q} \tilde{Y}_1 - e^{-\alpha\tau} \tilde{Y}_2^T \tilde{Q} \tilde{Y}_2 - e^{-\alpha\tau} (\Pi_1^T \tilde{Z} \Pi_1 + 3\Pi_2^T \tilde{Z} \Pi_2) + \\ & \text{diag}\{\tilde{S}, -e^{-\alpha\tau} \tilde{S}, 0_n, -2\tilde{\Lambda}, -2\tilde{\Gamma}, -I, \tau^2 \tilde{Z}\} + \text{Sym}(\tilde{G}_1^T \tilde{P} \tilde{G}_2 + \\ & \tilde{E}_2^T (\tilde{\Lambda} L W) \tilde{E}_1 + \tilde{E}_4^T (\tilde{\Gamma} L W) \tilde{E}_3 + \tilde{E}_5^T \tilde{\Sigma}), \\ \tilde{\Phi} = & \frac{e^{-\alpha\tau}}{\tau} (\tilde{E}_6^T \tilde{Q} \tilde{E}_6 + \tilde{E}_7^T \tilde{S} \tilde{E}_7 + 2\tilde{E}_8^T \tilde{Z} \tilde{E}_8) + \text{diag}\{\tilde{P}, 0_n\}, \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= \begin{bmatrix} I & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \tau I & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} \end{bmatrix}, \tilde{G}_2 = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} & I \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times (3n+q)} & \mathbf{0}_n \end{bmatrix}, \tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0}_{n \times 2n} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times (2n+q)} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times 2n} & I & \mathbf{0}_{n \times (2n+q)} \end{bmatrix}, \\ \tilde{r}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & I & \mathbf{0}_{n \times 2n} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times (n+q)} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times 2n} & I & \mathbf{0}_{n \times (2n+q)} \end{bmatrix}, \Pi_1 = [I \quad -I \quad \mathbf{0}_{n \times (4n+q)}], \Pi_2 = [I \quad I \quad -2I \quad \mathbf{0}_{n \times (3n+q)}], \\ \tilde{E}_1 &= [I \quad \mathbf{0}_{n \times (5n+q)}], \tilde{E}_2 = [\mathbf{0}_{n \times 3n} \quad I \quad \mathbf{0}_{n \times (2n+q)}], \tilde{E}_3 = [\mathbf{0}_n \quad I], \tilde{E}_4 = [\mathbf{0}_{n \times 4n} \quad I \quad \mathbf{0}_{n \times (n+q)}], \\ \tilde{E}_5 &= [I \quad \mathbf{0}_{n \times (5n+q)} \quad \delta I], \tilde{E}_6 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tilde{E}_7 = [0 \quad I \quad 0], \tilde{E}_8 = [\tau I \quad -I \quad 0], \\ \tilde{\Sigma} &= [-\tilde{X}A - \tilde{Y}C \quad -\tilde{Y}D \quad \mathbf{0}_{n \times 2n} \quad \tilde{X} \quad \tilde{X}B_1 - \tilde{Y}B_2 \quad -\tilde{X}]. \end{aligned}$$

此时,增益矩阵由  $K = \tilde{X}^{-1}\tilde{Y}$  给出.

### 3 数值模拟

考虑时滞静态神经网络(1)式,其中参数如下:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(1.06, 1.42, 0.88), W = \begin{bmatrix} -0.32 & 0.85 & -1.36 \\ 1.10 & 0.41 & -0.5 \\ 0.42 & 0.82 & -0.95 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= [0.2 \quad 0.2 \quad 0.2]^T, B_2 = [0.4 \quad -0.3]^T, C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.6 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, J = [1.56 \quad -0.97 \quad 0.32]^T, f(x) = \tanh(x), \tau(t) = 0.5 + 0.5\sin(2t). \end{aligned}$$

从而可以得到  $L = I, \tau = 1, \mu = 1$ , 并且假设  $\omega(t) = 0.05 e^{-0.01t} \cos(0.3t)$ . 则当  $\delta = 0.5$  时,通过定理 1 可以得到对于不同的  $\alpha$  下性能指标  $\gamma$  的最小值,见表 1.

表 1 不同的  $\alpha$  下性能指标  $\gamma$  的最小值与状态估计矩阵  $K$

情形	$\alpha$			
	0	0.01	0.05	0.1
文献[13]	0.446	0.492	0.780	—
定理 1	0.217	0.229	0.277	0.337
$K$	$\begin{bmatrix} 0.730 & 0.069 \\ 0.450 & -0.149 \\ 0.613 & 0.219 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.739 & -0.053 \\ 0.455 & -0.156 \\ 0.609 & 0.218 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.737 & -0.027 \\ 0.485 & -0.184 \\ 0.610 & 0.228 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.730 & -0.141 \\ 0.483 & -0.260 \\ 0.605 & 0.225 \end{bmatrix}$

由表 1 可知,与文献[13]相比,本文提出的状态估计器设计条件具有较小的保守性.

图 1 描绘了误差信号的时间响应曲线.从仿真结果可以看到本文给出的定理对时滞静态神经网络的  $L_2-L_\infty$  性能的状态估计器设计是非常有效的.

### 4 结论

本文考虑了一类时滞静态神经网络的状态估计器设计问题,通过利用增广的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,结合 Wirtinger 积分不等式和新的  $L_2-L_\infty$  性能分析方法,得到了误差系统全局指数稳定的充分条件.估计器

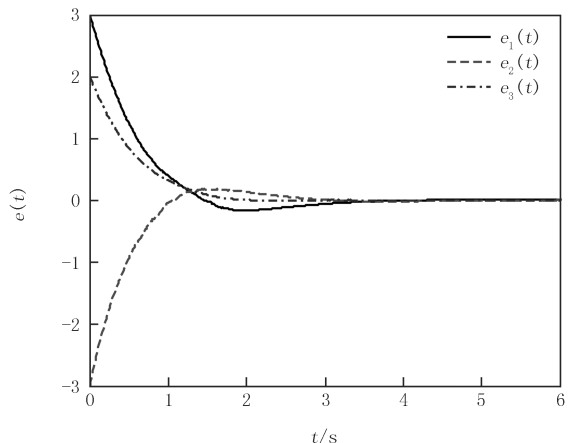


图 1 神经元状态估计误差

增益矩阵可通过求解 LMIs 获得,最后通过数值算例表明了本文方法的有效性.

## 参 考 文 献

- [1] 王新普,周想凌,邢杰,等.一种基于改进灰色 BP 神经网络组合的光伏出力预测方法[J].电力系统保护与控制,2016,44(18):81-87.
- [2] 刘春翔,范鹏,王海涛,等.基于 BP 神经网络的输电线路山火风险评估模型[J].电力系统保护与控制,2017,45(17):100-105.
- [3] 王军涛,郑群珍,苏展,等.具有漏泄时滞和时变区间时滞的递归神经网络新的稳定性准则[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(3):166-171.
- [4] 刘学婷,周立群.一类具多比例时滞广义细胞神经网络的全局指数稳定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(4):143-150.
- [5] Arik S.Stability analysis of delayed neural networks[J].IEEE Transactions on Circuits and Systems-I:Regular Papers,2000,47(7):1089-1092.
- [6] Wang Z D,Daniel W,Liu X H.State estimation for delayed neural networks[J].IEEE Transactions on Neural Networks,2005,16(1):279-284.
- [7] 张蕾,刘贺平,廖福成.时变时滞离散递归神经网络系统的状态估计器设计.控制与决策,2011,26(3):423-427.
- [8] Park J H,Kwon O.Further results on state estimation for neural networks of neutral-type with time-varying delay[J].Applied Mathematics and Computation,2009,208(1):69-75.
- [9] Li T,Fei S M,Zhu Q.Design of exponential state estimator for neural networks with distributed delays[J].Nonlinear Analysis:Real World Applications,2009,10(2):1229-1242.
- [10] Hua M G,Tan H S,Fei J T.State estimation for uncertain discrete-time stochastic neural networks with Markovian jump parameters and time-varying delays[J].International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2017,8(3):823-835.
- [11] Huang H,Feng G,Cao J D.Guaranteed performance state estimation of static neural networks with time-varying delay[J].Neurocomputing,2011,74(4):606-616.
- [12] Wen B,Li H,Zhong S M.New results on  $H_\infty$  state estimation of static neural networks with time-varying delay[J].Advances in Difference Equations,2017(1):17.
- [13] Huang H,Huang T W,Chen X P.Exponential Generalized  $H_2$  Filtering of Delayed Static Neural Networks[J].Neural Process Lett,2015,41:407-419.
- [14] Choi H D,Ahn C K,Shi P,et al. $L_2-L_\infty$  filtering for Takagi-Sugeno fuzzy neural networks based on Wirtinger-type inequalities[J].Neurocomputing,2015,153:117-1253.
- [15] Qian W,Chen Y G,Liu Y R,et al.Further results on  $L_2-L_\infty$  state estimation of delayed neural networks[J].Neurocomputing,2018,273:509-515.
- [16] Seurt A,Gouaisbaut F.Wirtinger-based integral inequality:Application to time-delay systems[J].Automatica,2013,49:2860-2866.

## New design of $L_2-L_\infty$ state estimator for delayed static neural networks

Chen Yuzhen<sup>1</sup>, Zhang Han<sup>2</sup>, Zhang Liangliang<sup>1</sup>, Chen Yonggang<sup>1</sup>

(1.School of Mathematical Sciences, Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang 453003, China;

2.International College, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract:** This paper investigates the state estimation problem for a class of static neural networks with time-varying delay. By using the augmented Lyapunov-Krasovskii functionals, the Wirtinger integral inequality and the new  $L_2-L_\infty$  performance analysis approach, new sufficient conditions of designing  $L_2-L_\infty$  state estimator are obtained, which are expressed by linear matrix inequalities. The designed state estimators of this paper not only guarantee the globally exponential stability of the error system, but also satisfy the prescribed  $L_2-L_\infty$  performance requirement. Finally, the numerical example verifies the superiority of the proposed design approach in this paper.

**Keywords:** static neural networks; time-varying delay; state estimator; exponential stability;  $L_2-L_\infty$  performance

[责任编辑 陈留院]