

# 短期利率动态模型收益率和波动参数的估计

张东云

(河南师范大学 商学院,河南 新乡 453007)

**摘要:**利用局部逼近的方法研究了短期利率动态扩散模型中参数的局部估计问题,给出了动态 CKLS 模型中的收益率参数的局部加权最小二乘估计和波动率参数的局部极大似然估计.基于上海银行间市场同业拆借利率(Shibor)的实证分析,展示了局部估计的效果,并研究了动态 CKLS 模型在利率波动率预报上的表现,结果显示,利率波动率的预报能较好地反映利率的实际波动.

**关键词:**核回归;局部加权最小二乘估计;局部极大似然估计;Shibor

**中图分类号:**O212; F832

**文献标志码:**A

中国利率改革的长远目标是建立以市场资金供求为基础,以中央银行基准利率为调控核心,由市场资金供求决定各种利率水平的市场利率体系的市场利率管理体系,使市场机制在金融资源配置中发挥主导作用.短期利率是自由金融市场中最敏感的经济变量之一,为描述短期利率的随机表现,研究者们提出了很多随机模型,如能很好描述利率动态变化的扩散模型.对扩散模型的研究,大致归属于两类模型,即时间齐次扩散模型和非齐次扩散模型.对时间齐次的短期利率模型的研究,可以参见文献[1-4].但是在金融领域和金融研究中,各种经济条件随时间变动是基本的事实,由于时间齐次模型没有考虑时间的因素,在一定程度上具有局限性.对于带时变系数的扩散模型的研究,迄今已做了大量的工作,例如文献[5-12]考虑了时变的扩散模型,他们的模型清楚地表达了参数对时间的依赖性.

本文在 Yu 等<sup>[9]</sup>研究的基础上,基于局部加权最小二乘和局部极大似然估计的方法对上海银行间市场同业拆借利率(Shibor)进行实证研究,展示了短期利率动态模型中参数估计的效果,并分析了短期利率波动率预报上的表现.

## 1 短期利率动态扩散模型的估计方法

本节中,考虑如下的短期利率动态扩散模型:

$$dr_t = [\alpha(t) + \beta(t)r_t]dt + \sigma(t)(r_t)^\gamma dW_t, \quad (1)$$

其中  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  是依赖于时间  $t$  的收益率参数函数,也称为漂移参数, $\sigma(t)$  是依赖于时间  $t$  的波动率参数函数,也称为扩散参数. $\gamma$  是不依赖于时间  $t$  的扩散参数, $W_t$  是标准布朗运动.模型(1)包括了很多著名的短期利率模型,比如,当  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  和  $\sigma(t)$  是常数参数时(即它们均不依赖于时间),模型(1)就是 CKLS 模型.在 CKLS 模型中,若参数  $\gamma = 1$ ,则就是著名的 Black-Scholes 模型;若参数  $\gamma = 0$ ,则即是 Vasicek 模型;若参数  $\gamma = 0.5$ ,则就是 CIR 模型.所以,模型(1)是 CKLS 模型的推广形式.

假设模型中的参数函数均为关于时间  $t$  的二次连续可微函数.事实上,模型(1)是连续时间动态扩散模型,但是在实际应用中,由于本文的数据都是通过离散观测而得到的,所以其离散化形式同样具有很广泛的应用.假设给定时间点  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$  上的观测数据为  $\{r_i, i = 1, 2, \dots, n+1\}$ ,例如,若一个时间单位为一年,则周数据的抽样时间点为  $t_i = i/52, i = 1, 2, \dots, 52$ ,这里假设初始时间为零.令

收稿日期:2014-05-08;修回日期:2014-11-17.

基金项目:国家自然科学基金(71203056);河南师范大学青年骨干教师培养资助(051).

作者简介:张东云(1978-),男,河南汤阴人,河南师范大学副教授,研究方向为金融统计分析、金融风险管理,E-mail: dongyunzhang@163.com

$$y_{t_i} = r_{t_{i+1}} - r_{t_i}, Z_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}, \Delta_i = t_{i+1} - t_i,$$

由布朗运动的独立增量性,  $\{Z_{t_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$  是独立的随机变量序列, 且  $Z_{t_i}$  服从均值为零, 方差为  $\Delta_i$  的正态分布. 则模型(1)的 Euler 离散化形式为

$$y_{t_i} = [\alpha(t_i) + \beta(t_i)r_{t_i}]\Delta_i + \sigma(t_i)(r_{t_i})^\gamma \sqrt{\Delta_i}\epsilon_{t_i}, \tag{2}$$

其中  $\{\epsilon_{t_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$  是独立同分布且皆服从标准正态分布的随机变量序列. 根据文献[13], 模型(1)的 Euler 离散化形式的近似误差很小. 因此, 可以通过离散化形式对模型中的参数做出估计.

### 1.1 收益率参数函数的加权最小二乘估计

由于收益率参数函数  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  是二次连续可微的, 所以可以用常数来局部近似. 即: 对给定的时间点  $t_0$ , 令  $\alpha(t) \approx \alpha(t_0)$  和  $\beta(t) \approx \beta(t_0)$ , 其中  $t$  是  $t_0$  某领域内的点. 直观的思路是, 距离  $t_0$  近的时间点上的观测数据对估计  $\alpha(t_0)$  和  $\beta(t_0)$  的影响较大, 距离  $t_0$  远的时间点上的观测数据对估计  $\alpha(t_0)$  和  $\beta(t_0)$  的影响较小. 为此, 我们选取一个权函数, 给每一个观测数据一个权重, 使距离  $t_0$  近的时间点上的观测数据所取的权重大一些, 相反, 使距离  $t_0$  远的时间点上的观测数据所取的权重小一些. 记这个权函数为  $K(\cdot)$ , 它是一个实值函数, 称其为核函数. 令  $h$  表示邻域的尺度大小, 称其为带宽参数或窗宽参数. 带宽参数控制着局部领域的大小, 其大小的选择对估计量的影响比较敏感. 下面利用局部加权最小二乘方法求参数函数  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  的加权最小二乘估计. 根据(2)式, 关于  $\alpha$  和  $\beta$  极小化下式

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_{t_i}}{\Delta_i} - \alpha - \beta r_{t_i} \right]^2 K_h(t_i - t_0), \tag{3}$$

可求得  $\alpha(t_0)$  和  $\beta(t_0)$  的局部估计, 其中  $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$ . 设  $\hat{\alpha}$  和  $\hat{\beta}$  为(3)式的极小值点, 可得:  $\hat{\alpha} = (A_0 B_2 - A_1 B_1)/(B_0 B_2 - B_1^2)$ ,  $\hat{\beta} = (A_1 B_0 - A_0 B_1)/(B_0 B_2 - B_1^2)$ , 这里  $A_j = \sum_{i=1}^n (y_{t_i}/\Delta_i)(r_{t_i})^j K_h(t_i - t_0)$ ,  $B_j = \sum_{i=1}^n (r_{t_i})^j K_h(t_i - t_0)$ ,  $j = 0, 1, 2$ . 令  $\alpha(t_0)$  和  $\beta(t_0)$  的估计分别为  $\hat{\alpha}(t_0) = \hat{\alpha}$  和  $\hat{\beta}(t_0) = \hat{\beta}$ . 为了得到参数函数  $\alpha(t)$  和  $\beta(t)$  的估计函数, 可以在不同的时间点上重复上述步骤即可. 这里, 核函数  $K(\cdot)$  可以取为 Epanechnikov 核, 即  $K(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)I_{(|x|\leq 1)}$ , 这里  $I_{(|x|\leq 1)} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ .

下面给出收益率参数的带宽选择方法. 本节中, 利用最小化平均预报误差(The Average Prediction error(APE)) 准则来选择带宽参数. 对给定的时间点  $t_j^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , 平均预报误差(APE)是关于带宽参数的函数, 即:

$$APE = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{(y_{t_j^*} - \hat{y}_{t_j^*})^2}{\sigma^2(t_j^*, r_{t_j^*})}, \tag{4}$$

这里  $\hat{y}_{t_j^*} = [\hat{\alpha}(t_j^*) + \hat{\beta}(t_j^*)r_{t_j^*}]\Delta_{t_j^*}$ ,  $\sigma(t_j^*, r_{t_j^*}) = \hat{\sigma}(t_j^*)(r_{t_j^*})^\gamma$ , 其中  $\hat{\sigma}(t_j^*)$  和  $\hat{\gamma}$  可以 1.2 节波动率参数的估计方法求得. 最小化(4)式即得收益率参数的带宽参数.

### 1.2 波动率参数的核加权极大似然估计

由(2)式, 可得模型的加权对数似然函数为

$$- \sum_{i=1}^n \left\{ K_h(t_i - t_0) \left[ \frac{1}{\Delta_i} \frac{\{y_{t_i} - \mu(t_i, r_{t_i})\Delta_i\}^2}{\sigma^2(t_i, r_{t_i})} + \lg(\sigma^2(t_i, r_{t_i})) \right] \right\}, \tag{5}$$

其中  $\mu(t, r_t) = \alpha(t) + \beta(t)r_t$ ,  $\sigma^2(t, r_t) = \sigma^2(t)r_t^{2\gamma}$ . 考虑到波动率参数函数  $\sigma(t)$  的非负性, 利用局部对数线性来逼近, 即: 对给定的时间点  $t_0$ , 令  $\lg \sigma^2(t) \approx v_0 + v_1(t - t_0)$ , 其中  $t$  是  $t_0$  某邻域内的点. 令  $\hat{\mu}(t, r_t) = \hat{\alpha}(t) + \hat{\beta}(t)r_t$ ,  $\hat{E}_{t_i} = (1/\sqrt{\Delta_i})[y_{t_i} - \hat{\mu}(t, r_t)\Delta_i]$ , 这里  $\hat{\alpha}(t)$  和  $\hat{\beta}(t)$  由 1.1 节所述的估计方法得到. 则(5)式可以写为

$$- \sum_{i=1}^n \{ K_h(t_i - t_0) [ \hat{E}_{t_i}^2 \exp\{-[v_0 + v_1(t_i - t_0)]\} r_{t_i}^{-2\gamma} + v_0 + v_1(t_i - t_0) + \gamma \lg(r_{t_i}^2) ] \}, \tag{6}$$

可以通过最大化(6)式, 求出参数  $v_0, v_1, \gamma$  的估计, 进而得到波动率参数的估计. 具体步骤如下.

步骤 1 首先给定参数  $\gamma$ , (6)式分别关于  $v_0, v_1$  求偏导并令其为零, 整理得到如下两个等式

$$\exp(v_0) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(t_i - t_0) \hat{E}_{t_i}^2 \exp\{-v_1(t_i - t_0)\} r_{t_i}^{-2\gamma}}{\sum_{i=1}^n K_h(t_i - t_0)}, \quad (7)$$

$$\exp(v_0) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(t_i - t_0) \hat{E}_{t_i}^2 (t_i - t_0) \exp\{-v_1(t_i - t_0)\} r_{t_i}^{-2\gamma}}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_0) K_h(t_i - t_0)}. \quad (8)$$

令(7)式和(8)式相等可以求出  $v_1$ , 把  $v_1$  代入到(7)式或者(8)式即可得到  $v_0$ , 其解分别记为  $\hat{v}_0(t_0)$  和  $\hat{v}_1(t_0)$ .

步骤2 扩散参数的局部估计为  $\hat{\sigma}(t_0) = \exp\left(\frac{\hat{v}_0(t_0)}{2}\right)$ , 为了得到  $\sigma(t)$  的估计函数, 可以在不同的时间点重复上述步骤.

步骤3 参数  $\gamma$  的估计可以通过最大化下式得到

$$- \sum_{i=1}^n [\hat{E}_{t_i}^2 \exp\{-\hat{v}_0(t_i)\} r_{t_i}^{-2\gamma} + \gamma \lg(r_{t_i}^2)],$$

其中  $\hat{v}_0(t_0)$  由步骤1得到, 记参数  $\gamma$  的估计量为  $\hat{\gamma}$ .

下面给出波动率参数的带宽选择方法.

在波动率参数的带宽选择中, 选用文献[14]中的 ROT(Rule of Thumb) 带宽选择方法, 此方法是基于最小化 MISE(The Asymptotic Mean Integrated Squared Errors) 的准则. 详细的阐述参见文献[14], 这里直接给出波动率参数的带宽参数为

$$h = \{2R(K)V_1/[a_2^2(K)Bn]\}^{1/5}.$$

其中,  $R(K) = \int_{-1}^1 K^2(z) dz$ ,  $V_1 = \int_{-1}^1 \exp\{2(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3)\} dt$ ,  $a_2(K) = \int_{-1}^1 z^2 K(z) dz$ ,  $B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (c_2 + 3c_3 t_i)^2 \exp\{2(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3)\}$ , 这里  $c_i (i = 0, 1, 2, 3)$  可以由文献[14]中的第4节所述的方法得到.

## 2 上海银行间市场同业拆借利率(Shibor)实证研究

上海银行间市场同业拆借利率(Shibor)是央行为稳步推进利率市场化改革, 提高金融机构自主定价能力, 指导货币市场产品定价, 完善货币政策传导机制而大力培育的中国市场基准利率体系. 自2007年1月正式运行以来, Shibor 在国内金融市场的地位日益重要, 其利率基准性问题也受到了业界的广泛关注. 本节中, 我们选用1月 Shibor 数据作为市场利率的代表, 数据跨度为2007年1月4日至2012年12月31日共计1499个日数据. 数据来源于中国银行间同业拆借利率网站: [http://www. Shibor.org](http://www.Shibor.org). 1月 Shibor 数据的走势图和利率变化的走势图如图1、图2所示.

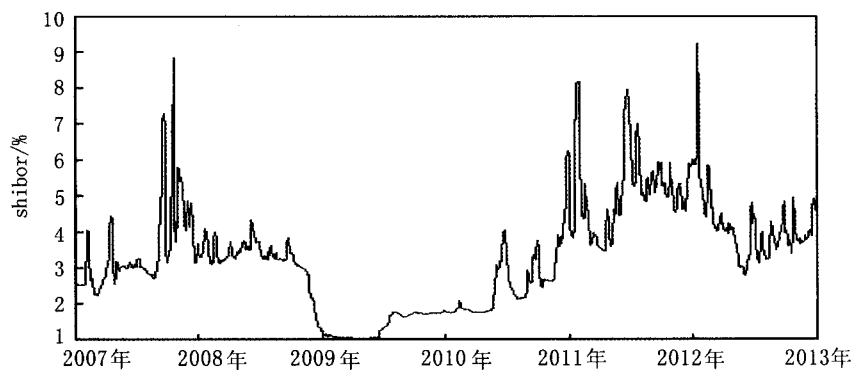


图1 上海银行间同业拆借利率(Shibor) ( $r_t$ ) 走势图

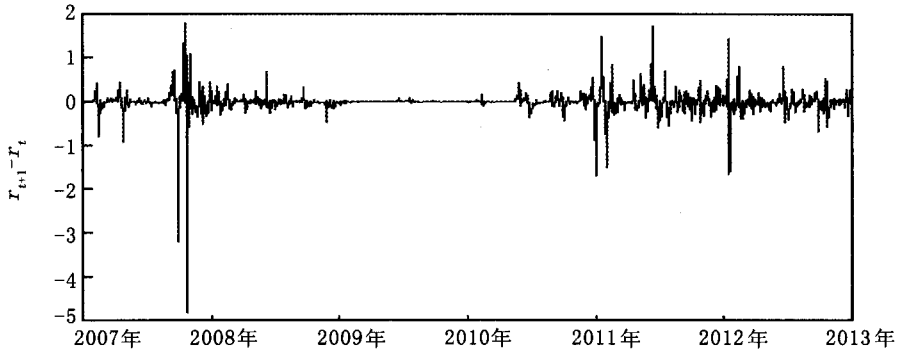


图2 上海银行间同业拆借利率(Shibor)变化( $r_{t+1}-r_t$ )走势图

### 2.1 参数函数的估计结果

利用 1 月 Shibor 数据,可以得到收益率参数函数和波动率参数的估计结果,如图 3 所示。

对于模型中的收益率参数来说, $\beta(t)$ 是较为重要的参数,若  $\beta(t)$  的值为负的,则说明利率变化有均值回复特征. 图 3 的结果显示, $\beta(t)$  的值随着时间的变化而正负交替,但是在一半以上的时间里,其值为负值,这与理论上利率所具有的特征一致,说明中国市场利率变化有一定的均值回复特征。

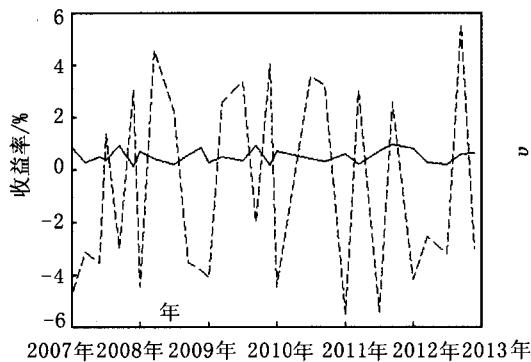


图3  $\alpha(t)$  (图中实线)和  $\beta(t)$  (图中虚线) 的估计结果

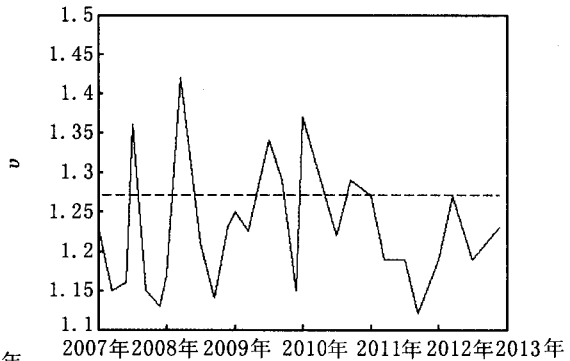


图4  $\sigma(t)$  (图中实线)和  $\gamma$  (图中虚线) 的估计结果

对于波动率参数来说, $\gamma$ 是较为重要的参数,它的大小反映了利率敏感程度的大小. 如果它的值较大,则表示波动率对利率有较高的敏感性. 由于模型中参数  $\gamma$  不依赖于时间,所以在图中它是一条水平线. 文献[4]通过对美国短期利率的实证研究得到了美国短期利率的敏感系数是 1.499 9. 从图 4 可以看到,中国银行间市场同业拆借利率(Shibor)的敏感系数  $\gamma$  值是 1.271 5, 这说明中国市场利率波动率的水平的效应较为显著,对利率具有一定的敏感性。

### 2.2 波动率的预报结果

利率的波动对衍生产品的定价以及风险管理起着举足轻重的作用,下面考察利率波动率的预报能否较好地反映利率的实际波动. 用利率变化的平方  $y_t^2 = (r_{t+1} - r_t)^2$  衡量利率的实际波动率,利率模型的条件期望波动率为  $\hat{\sigma}^2(t, r_t) = \exp(\hat{v}_0(t))r_t^{2\gamma} \Delta_t$ , 把它作为下一时刻的波动率的预报估计值. 波动率的具体结果如图 5 所示。

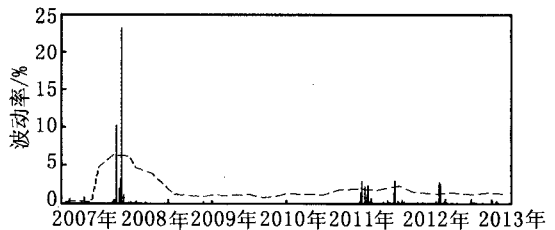


图5 实际波动率(图中实线)和波动率(图中虚线)的预报结果

由图 5 可以看出,利率波动率的预报能很好地反映利率的实际波动,对于利率大的波动做出相应的预报。

### 3 结 语

由于经济条件随时变动,短期利率的变化模式会随着时间的推移而变化,所以,带时变系数的动态模型能更好地描述短期利率的变化特征.本文基于时变系数的局部加权最小二乘方法和局部极大似然的方法,对上海银行间市场同业拆借利率进行了实证分析,研究结果表明,带时变系数的动态模型能更好地拟合短期利率的随机行为.

### 参 考 文 献

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *J Polit Economy*, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] Vasicek O A. An equilibrium characterization of the term structure[J]. *J Finan Econom*, 1977, 5(1): 177-188.
- [3] 韩 非,姚素霞,刘利敏. 扩散模型下保险公司的盈余依赖型最优投资策略[J]. *河南师范大学学报:自然科学版*, 2013, 41(1): 29-32.
- [4] Chan K C, Kayolyi G A, Longstaff F A, Sanders A B. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate[J]. *J Finance*, 1992, 47(3): 1209-1227.
- [5] 王继霞,肖庆宪. 扩散模型复合分位回归估计的渐近正态性[J]. *河南师范大学学报:自然科学版*, 2014, 42(2): 25-28.
- [6] Hull J, White A. Pricing interest-rate derivative securities[J]. *Rev Finan Stud*, 1990, 3(4): 573-592.
- [7] Black F, Karasinski P. Bond and option pricing when short rates are lognormal[J]. *Financial Analysts Journal*, 1991, 47(1): 52-59.
- [8] Fan J, Jiang J, Zhang C, et al. Time-dependent diffusion models for term structure dynamics and the stock price volatility[J]. *Statistica Sinica*, 2003, 13: 965-992.
- [9] Yu Y, Yu K, Wang H, et al. Semiparametric estimation for a class of time-inhomogeneous diffusion processes[J]. *Statistica Sinica*, 2009, 19: 843-867.
- [10] 谈正达,胡海鸥. 短期 Shibor 跳跃行为的利率模型解释[J]. *运筹与管理*, 2012, 21(4): 133-139.
- [11] 谈正达,胡海鸥. 短期利率跳跃-扩散模型的非参数门限估计[J]. *中国管理科学*, 2012, 20(1): 8-15.
- [12] 潘婉彬,陶利斌,缪柏其. 时间相依利率扩散模型的非参数估计[J]. *中国管理科学*, 2006, 14(6): 1-5.
- [13] Stanton R. A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk[J]. *J Finance*, 1997, 52(1): 1973-2002.
- [14] Yu K, Jones M C. Likelihood-based local linear estimation of the conditional variance function[J]. *J Amer Statist Assoc*, 2004, 99(1): 139-144.

## The Estimations of Yields and Volatility for Short-term Interest Rate Dynamic Models

ZHANG Dongyun

(Business School, Henan Normal University, Xixiang 453007, China)

**Abstract:** This paper studies local estimations of the parameters for short-term interest rate dynamic diffusion models by using local approximate method. In the dynamic CKLS models, the local weighted least-square estimations of the parameters of yields are gained, and local maximum likelihood estimation of the volatility parameter is proposed. Based on the real data analysis for Shanghai Inter-bank Offered Rate(Shibor), we display the performance of the local estimations proposed and study the forecasting power of the volatility for dynamic CKLS model. The results show that the forecast of the volatility reflects the real volatility well.

**Keywords:** kernel regression; local weighted least squares estimation; local maximum likelihood estimation; Shibor