文章编号:1000－2367(2018)02－0010－07　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.02.002

# 有未知延迟的下三角系统的输出反馈控制

毕卫平，高璐璐

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

**摘　要:**主要研究状态和输入都有未知时变延迟的下三角系统的输出反馈控制.关于延迟仅规定它是有界的,但它的边界和时变率是未知的.针对要研究的系统,首先提出一个新的自适应输出反馈控制器;然后,为了处理有未知时变的状态,给出了一个新的变换和技术;最后,说明在所给的输出反馈控制器下所研究的系统是全局可控的.仿真结果说明了控制器的有效性.

**关键词:**延迟;自适应;输出反馈控制器;下三角系统;全局控制

**中图分类号:**O231　　**文献标志码:**A

时延系统是有时间延迟的动态系统,即系统在 $t$ 时刻的行为与其状态在某一时段:之前的输入或状态值有关的系统[1].近百年来,控制系统的延迟问题备受关注,如文献[2－7],其中有时变延迟的系统又是当今的研究趋向.下三角系统是一类典型性的动力系统,许多实际的系统都具有下三角的结构,或在一定条件下可以转化为满足下三角形式的系统,如:单摆系统、质量弹簧系统、轮式移动机器人等.本文研究状态和输入都有延迟的下三角系统,形如:

$$\begin{cases}\dot{x}_i=a_ix_{i+1}(t-\tau_{i+1}(t)),i=1,\cdots,n-1,\\ \dot{x}_n=a_nu(t-\tau_{n+1}(t)),\\ y=x_1(t-\tau_1(n)),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 是系统状态,$u\in\mathbf{R}$ 是系统输入,$y\in\mathbf{R}$ 是系统输出.同时,$x_i(t-\tau_i(t))$ 和 $u(t-\tau_{n+1}(t))$ 分别是 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $u$ 的延迟.针对系统(1),假设下列条件成立.

**假设 1**　存在未知的 $\bar{\tau}_i$,满足对所有的 $t\geq 0$,都有 $0\leq\tau_i(t)\leq\bar{\tau}_i$,$i=1,2,\cdots,n+1$.

**假设 2**　对于所有的 $i=1,2,\cdots,n$,$a_i\neq 0$ 是已知的常数.

问题陈述:在假设 1 和假设 2 下通过输出反馈控制使系统(1)是全局渐近可控的.

系统(1)的研究存在很多挑战性的问题.1)它的状态和输入都有未知延迟.假设 1 指出系统(1)的所有延迟可以任意大,快速变化,并且没有关于它的边界值和时变率的信息.2)由于未知的延迟 $\tau_1(t)$,系统输出 $y$ 和状态 $x_1$ 其实是不同的.在很多已有的文章中,经常假设 $y-h(x(t))$,而不是 $y=h(x(t-\tau(t)))$.

当 $a_i=1$ 时,系统(1) 转化为有延迟的一串积分器系统.当 $\tau_1(t)=\cdots=\tau_n(t)=0,\tau_{n+1}(t)=\tau$ 时,假设 1 减弱为文献[2－3] 中的条件,文献[2－3] 分别提出一个自适应输出反馈控制器和一个有界状态反馈控制器.当 $\tau_1(t)=\cdots=\tau_n(t),\tau_{n+1}(t)=\tau(t)$ 时,假设 1 转化为文献[5] 中的条件,提出一个成熟的自适应输出反馈控制器.当 $\tau_i(t)=\tau_{i-1}(t),i=2,3,\cdots,n+1$ 且没有输出时,假设 1 变成文献[6－7] 中的条件,其中文献[6] 为了有限时间镇定提出了状态反馈控制器,文献[7] 设计了一个低增益状态反馈控制器.通过状态反馈控制系统的还有文献[8－9],但是系统中不含延迟且为不确定系统.因此,从控制问题的观点上,考虑的问题与上述结论比较普遍.

文献[10－11]研究有延迟的下三角形系统.但是文献[10]处理的是常数延迟,文献[11]中系统延迟仅存

**收稿日期:**2017-04-01;**修回日期:**2017-06-15.

**基金项目:**国家自然科学基金联合基金(U1504620)

**作者简介:**毕卫平(1963－),女,河南新乡人,河南师范大学教授,博士,研究方向为运筹学与控制论.

**通信作者:**高璐璐,E-mail:492361190@qq.com.

在与非线性部分.显而易见，文献[10－11]的结论不能用于本文考虑的系统.

一般的线性延迟系统也存在很多结论.在文献[12]中，Krstic 给出了一个新的以预报器为基础的控制来处理输出中的不确定延迟，但延迟不是像假设 1 那样是未知且仅输出中有延迟.对于输入有常数延迟的线性系统，文献[13]提出了饱和型控制器.在文献[14]中，为了处理线性系统中的常数输出延迟和干扰设计了一个基于反演的控制器.文献[15]主要考虑输入有未知延迟的线性系统.

总的来说，之前已存在的结论不再适用于本文所研究的问题.

## 1　控制设计

在假设 1 和假设 2 条件下为了通过输出反馈控制器全局渐近控制系统(1)，提出如下基于有动态增益的输出反馈控制器的观测器：

$$u-K(\gamma(t))z, \tag{2}$$

$$\dot{z}=Az+Bu-L(\gamma(t))(y-Cz), \tag{3}$$

其中 $K(\gamma(t))=[k_1/\gamma(t)^n,\cdots,k_n/\gamma(t)]$，和 $L(\gamma(t))=[l_1/\gamma(t),\cdots,l_n/\gamma(t)^n]^{\mathrm{T}}$. 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\a_n\end{bmatrix},C=[1,0,\cdots,0].$$

动态增益 $\gamma(t)$ 满足

$$\dot{\gamma}(t)=\frac{|y|+\|z\|_1}{1+|y|+\|z\|_1}\gamma(t)^{-1} \tag{4}$$

且 $\gamma(0)=1$.特别地，(4) 式的解为 $\gamma(t)=\sqrt{2\int_0^t(|y|+\|z\|_1)(1+|y|+\|z\|_1)\mathrm{d}s+1}$，是单调非增的.因此，$t\geq 0$ 时有 $1\leq\gamma(t)\leq\sqrt{2t+1}$，这意味着对于任意大的 $t<\infty$，$\gamma(t)$ 有界.

下面，设 $A_K(\gamma(t))=A+BK(\gamma(t))$，$A_L(\gamma(t))=A+L(\gamma(t))C$，$K=K(1)$，$L=L(1)$，$A_j(1)=A_j$，$j=K,L$，并且，定义 $E_{\gamma(t)}=\mathrm{diag}[1/\gamma(t)^{n-1},\cdots,1/\gamma(t),1]$.然后，如果给定 Hurwitz 矩阵 $A_K$ 和 $A_L$，对于 $j=K,L$ 可求得 Lyapunov 方程 $A_j^{\mathrm{T}}(\gamma(t))P_j(\gamma(t))+P_j(\gamma(t))A_j(\gamma(t))=-\gamma(t)^{-1}E_{\gamma(t)}^2$ 的解，其中 $P_j(\gamma(t))=E_{\gamma(t)}P_jE_{\gamma(t)}$，$A_j^{\mathrm{T}}P_j+P_jA_J=-I$，$I$ 是 $n\times n$ 阶单位矩阵[2].很明显存在正常数 $\pi_{j1}$，$\pi_{j2}>0$ 和 $D=\mathrm{diag}[(2n-1)/2,\cdots,(2(n-i)+1)/2,\cdots,1/2]$，$i=1,2,\cdots,n$ 对于 $j=K,L$ 满足 $\pi_{j1}I\leq P_jD+DP_j\leq\pi_{j2}I$[16].最后，规定 $\zeta_{n+1}=x_{n+1}=u$；如果 $r_2<r_1$，则 $\sum_{j=r_1}^{r_2}f_j=0$.同时，记 $f(t,x)|_{x=\tilde{x}}$ 为在 $f(t,x)$ 中用 $\tilde{x}$ 替换 $x$，记 $\lambda_{\max}(\bar{M})$ 和 $\lambda_{\min}(\bar{M})$ 分别是矩阵 $\bar{M}$ 的最大和最小特征值.范数 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|$ 分别为 1-范数和 Euclidean 范数.

## 2　全局控制

考虑变换 $\zeta=T(x)$，形式如下

$$\begin{aligned}&\zeta_i=x_i+a_i\int_{t-\bar{\tau}_{i+1}}^{t}x_{i+1}(s)\mathrm{d}s,i=1,2,\cdots,n-1,\\&\zeta_n=x_n+a_n\int_{t-\bar{\tau}_{n+1}}^{t}u(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{5}$$

注意下列关系式

$$x_i(t-\tau_i(t))-x_i(t-\bar{\tau}_i)=\int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\tau_i(t)}\dot{x}_i(s)\mathrm{d}s,i=1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

$$u(t-\tau_{n+1}(t))-u(t-\bar{\tau}_{n+1})=\int_{t-\bar{\tau}_{n+1}}^{t-\tau_{n+1}(t)}\dot{u}(s)\mathrm{d}s. \tag{7}$$

由(5)~(7)式及 $\dot{u}=\dot{K}(\gamma(t))z+K(\gamma(t))\dot{z}$，系统(1)变换为

$$\begin{aligned}&\dot{\zeta}_i=a_i\zeta_{i+1}+a_i\delta_i(t,\zeta,u),i=1,2,\cdots,n-1,\\&\dot{\zeta}_n=a_nu+a_n\delta_n(t,\zeta,u).\end{aligned}\tag{8}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n-1$ 时，

$$\delta_i=(t,\zeta,u)=\left(\int_{t-\bar{\tau}_{i+1}}^{t-\tau_{i+1}(t)}\dot{x}_{i+1}(s_1)\mathrm{d}s_1-a_{i+1}\int_{t-\bar{\tau}_{i+2}}^{t}x_{i+2}(s_1)\mathrm{d}s_1\right)\Big|_{x=T^{-1}(\zeta)},\tag{9}$$

$$\delta_n(t,\zeta,u)=\int_{t-\bar{\tau}_{n+1}}^{t-\tau_{n+1}(t)}(\dot{K}(\gamma(s))z(s)+K(\gamma(s))\dot{z}(s))\mathrm{d}s.\tag{10}$$

由 $g_i=\zeta_i-z_i,i=1,\cdots,n$，和控制器(2)~(4)，增大的闭环系统为

$$\dot{\zeta}=A_K(\gamma(t))\zeta+\bar{A}\delta(t,\zeta,u)-BK(\gamma(t))g,\tag{11}$$

$$\dot{g}=A_L(\gamma(t))g+\bar{A}\delta(t,\zeta,u)+\bar{\xi}(t,\zeta,u),\tag{12}$$

其中 $\zeta=[\zeta_1,\cdots,\zeta_n]^{\mathrm{T}},\delta(t,\zeta,u)=[\delta_1(t,\zeta,u),\cdots,\delta_n(t,\zeta,u)]^{\mathrm{T}},\bar{A}=\mathrm{diag}[a_1,\cdots,a_n]$ 且 $\bar{\delta}(t,\zeta,u)=L(\gamma(t))(x_1(t-\tau_1(t))-\zeta_1)|_{x=T^{-1}(\zeta)}$.

首先，设 $V_0(g)=g^{\mathrm{T}}P_L(\gamma(t))g$. 沿着轨线(12)式可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_0(g)\leq&-\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}g\|^2-\pi_{L1}\dot{\gamma}(t)\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}g\|^2+2\|P_L\bar{A}\|\|E_{\gamma(t)}g\|\|E_{\gamma(t)}\delta(t,\zeta,u)\|_1+\\&2\|P_L\|\|E_{\gamma(t)}g\|\|E_{\gamma(t)}\bar{\delta}(t,\zeta,u)\|_1.\end{aligned}\tag{13}$$

然后，设 $V_c(\zeta)=\zeta^{\mathrm{T}}P_K(\gamma(t))\zeta$. 沿着轨线(11)式可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_c(\zeta)\leq&-\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}\zeta\|^2-\pi_{K1}\dot{\gamma}(t)\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}\zeta\|^2+2\|P_K\bar{A}\|\|E_{\gamma(t)}\zeta\|\|E_{\gamma(t)}\delta(t,\zeta,u)\|_1+\\&2\gamma(t)^{-1}\|P_K\|\|BK\|\|E_{\gamma(t)}\zeta\|\|E_{\gamma(t)}g\|.\end{aligned}\tag{14}$$

不等式(13)和(14)的推导方法类似文献[17].为了估计(13)和(14)式中的 $\|E_{\gamma(t)}\delta(t,\zeta,u)\|_1$ 和 $\|E_{\gamma(t)}\bar{\delta}(t,\zeta,u)\|_1$，提出定理 1 和定理 2.令 $\sum_{i=1}^{n+1}\bar{\tau}_i=\bar{\tau}_s$.

**定理 1**　考虑变换(5)和控制器(2)，然后，可得

$$|x_1(t-\tau_1(t))-\zeta_1|\leq\rho_0\sum_{i=2}^{n}\sup_{-2\bar{\tau}_s\leq\theta\leq0}|\zeta_i(t+\theta)|+\rho_0\|K\|\sup_{-2\bar{\tau}_s\leq\theta\leq0}\|E_{\gamma(t+\theta)}z(t+\theta)\|,\tag{15}$$

其中 $\rho_0=|a_1|(1+c)(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2),c=\max_{i=1,2,\cdots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n-i+1}\prod_{k=i+1}^{i+j}\prod_{l=1}^{j}|a_{i+l-1}|\bar{\tau}_k\right\}$.

**证明**　首先，由(5)式，当 $i=1,2,\cdots,n$，令

$$x_i=\zeta_i+\sum_{j=1}^{n-i+1}(-1)^j\prod_{i=1}^{j}|a_{i+l-1}|\int_{t-\bar{\tau}_{i+1}}^{t}\int_{s1-\bar{\tau}_{i+2}}^{s_1}\int_{sj-1\,\bar{\tau}_{i+j}}^{s_{j-1}}\zeta_{i+j}(s_j)\mathrm{d}s_j\cdots\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1.\tag{16}$$

根据归纳逻辑可得(16)式成立.由(16)式和不等式 $\int_{t-a}^{t}f(s)\mathrm{d}s\leq a\sup_{-a\leq\theta\leq0}|f(t+\theta)|$ 其中 $a>0$，当 $i=1,2,\cdots,n$ 时，可得

$$|x_i|\leq|\zeta_i|+c\sum_{j=i+1}^{n+1}\sup_{-\bar{\tau}_s\leq\theta\leq0}|\zeta_j(t+\theta)|,\tag{17}$$

其中 $c=\max_{i=1,\cdots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n-i+1}\prod_{k=i+1}^{i+j}\prod_{l=1}^{j}|a_{i+l-1}|\bar{\tau}_k\right\}$.

然后，由关系式 $x_1-x_1(t-\tau_1(t))=\int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{x}_1(s)\mathrm{d}s=\int_{t-\tau_1(t)}^{t}a_1x_2(s-\tau_2(s))\mathrm{d}s$，可得

$$\begin{aligned}x_1(t-\tau_1(t))-\zeta_1=&x_1(t-\tau_1(t))-x_1-a_1\int_{t-\bar{\tau}_2}^{t}x_2(s)\mathrm{d}s=\\&-a_1\int_{t-\tau_1(t)}^{t}x_2(s-\tau_2(s))\mathrm{d}s-a_1\int_{t-\bar{\tau}_2}^{t}x_2(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{18}$$

由(17)式，推得

$$\left|\int_{t-\tau_1(t)}^{t}x_2(s-\tau_2(s))\mathrm{d}s\right|\leq\bar{\tau}_1\sup_{-\tau_1\leq\theta\leq0}|x_2(t+\theta-\tau_2(t+\theta))|\leq\bar{\tau}_1\sup_{-(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)\leq\theta\leq0}|x_2(t+\theta)|\leq$$

$$\bar{\tau}_1 \sup_{-(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)\le\theta\le 0} |\zeta_2(t+\theta)| + \bar{\tau}_1 c \sum_{j=3}^{n+1} \sup_{-(\bar{\tau}_s+\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)\le\theta\le 0} |\zeta_j(t+\theta)|. \tag{19}$$

和

$$\left|\int_{t-\bar{\tau}_2(t)}^{t} x_2(s)\mathrm{d}s\right| \le \bar{\tau}_2 \sup_{-\bar{\tau}_2\le\theta\le 0} |x_2(t+\theta)| \le \bar{\tau}_2 \sup_{-\bar{\tau}_2\le\theta\le 0} |\zeta_2(t+\theta)| + \bar{\tau}_2 c \sum_{j=3}^{n+1} \sup_{-(\bar{\tau}_s+\bar{\tau}_2)\le\theta\le 0} |\zeta_j(t+\theta)|. \tag{20}$$

根据(18)～(20)式有

$$|x_1(t-\tau_1(t))-\zeta_1| \le \rho_0 \sum_{j=2}^{n+1} \sup_{-(\bar{\tau}_s+\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)\le\theta\le 0} |\zeta_j(t+\theta)|. \tag{21}$$

最后，由(21)式和 $\zeta_{n+1}=u=K(\gamma(t))z=\gamma(t)^{-1}KE_{\gamma(t)}z$，得到(15)式.

**定理 2**　应用变换(5)和控制器(2)，在(8)式中 $\delta_i(t,\zeta,u)$，$i=1,2,\cdots,n$，有上界

$$|\delta_i(t,\zeta,u)| \le \rho_1 \sum_{j=i+2}^{n} \sup_{-2\bar{\tau}_s\le\theta\le 0} |\zeta_j(t+\theta)| + \rho_1 \|K\| \sup_{-2\bar{\tau}_s\le\theta\le 0} \gamma(t+\theta)^{-1} \|E_{\gamma(t+\theta)} z(t+\theta)\|, i=1,\cdots,n-1, \tag{22}$$

$$|\delta_n(t,\zeta,u)| \le \rho_2 \sup_{-2\bar{\tau}_s\le\theta\le 0} \gamma(t+\theta)^{-2}(\|E_{\gamma(t+\theta)}\zeta(t+\theta)\| + \|E_{\gamma(t+\theta)}z(t+\theta)\|), \tag{23}$$

其中 $\rho_1=|a_{i+1}|\max_{i=1,2,\cdots,n-1}\{(\bar{\tau}_{i+1}+\bar{\tau}_{i+2})(1+c)\}$，并且当 $\bar{K}=[-nk_1,-(n-1)k_2,\cdots,-k_n]$ 时，$\rho_2=\bar{\tau}_{n+1}(\|\bar{K}\|+\|A_K\|\|K\|+\|L\|\|K\|+\rho_0\|L\|\|K\|(n+\|K\|))$.

定理 2 的证明可根据定理 1 和参考文献[5]中 Theorem 1 的部分内容得到.

现在，令 $|\gamma_t^{-1}|=\sup_{-2\bar{\tau}_s\le\theta\le 0}\gamma(t+\theta)^{-1}$，$\|E_{\gamma t}\zeta_t\|=\sup_{-2\bar{\tau}_s\le\theta\le 0}\|E_{\gamma(t+\theta)}\zeta(t+\theta)\|$ 和 $\|E_{\gamma t}g_t\|=\sup_{-2\bar{\tau}_s\le\theta\le 0}\|E_{\gamma(t+\theta)}g(t+\theta)\|$.

根据定理 1 和 $E_{\gamma(t)}\bar{\delta}(t,\zeta,u)=(x_1(t-\tau_1(t))-\zeta_1)\gamma(t)^{-n}L$，可得

$$\|E_{\gamma(t)}\bar{\delta}(t,\zeta,u)\|_1 \le \rho_3\gamma(t)^{-2}(\|E_{\gamma t}\zeta_t\|+\|E_{\gamma t}g_t\|), \tag{24}$$

其中 $\rho_3=2\rho_0(n+\|K\|)\|L\|$. 同时，由定理 2，可得

$$\|E_{\gamma(t)}\delta(t,\zeta,u)\|_1 \le \rho_4 |\gamma_t^{-1}|^2(\|E_{\gamma t}\zeta_t\|+\|E_{\gamma t}g_t\|), \tag{25}$$

其中 $\rho_4=(n+2)(\rho_1(n-1)(\sqrt{n}+\|K\|)+\rho_2)$.

因为 $\dot{\gamma}(t)<1$ 和 $\gamma(t)>1$，所以存在 $q_1>1$ 使得

$$|\gamma_t^{-1}| < q_1\gamma(t)^{-1}. \tag{26}$$

然后，由(13)式、(14)式、(18)～(20)式，有

$$\dot{V}_0(g) \le -\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}\|^2 + 2\gamma(t)^{-2}(\rho_4 q_1+\rho_3)\|P_L\bar{A}\|\|E_{\gamma(t)}g\|(\|E_{\gamma t}\zeta_t\|+\|E_{\gamma t}g_t\|), \tag{27}$$

$$\dot{V}_c(\zeta) \le -\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}\zeta\|^2 + 2\gamma(t)^{-1}\|P_K\|\|BK\|\|E_{\gamma(t)}\zeta\|\|E_{\gamma(t)}g\| + 2\gamma(t)^{-2}\rho_4 q_1\|P_K\bar{A}\|\|E_{\gamma(t)}\zeta\|(\|E_{\gamma t}\zeta_t\|+\|E_{\gamma t}g_t\|). \tag{28}$$

现在，利用 Razumikhin 定理[18]来完成全局可控的证明.设一个复合的 Lyapunov 函数 $V(g,\zeta,\gamma(t))=V_0(g)+\gamma(t)^{-1}V_c(\zeta)$，$t\in[0,T_f]$，其中 $T_f$ 是任意大的有限时间.易知

$$m(\|E_{\gamma(t)}g\|^2+\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}\zeta\|^2) \le V(g,\zeta,\gamma(t)) \le M(\|E_{\gamma(t)}g\|^2+\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}\zeta\|^2), \tag{29}$$

其中 $m=\min\{\lambda_{\min}(P_L),\lambda_{\min}(P_K)\}$，$M=\max\{\lambda_{\max}(P_L),\lambda_{\max}(P_K)\}$.

由于当 $t\in[0,T_f]$ 时 $\gamma(t)$ 是有限的，因此当 $t\in[0,T_f]$ 时 Lyapunov 函数 $V(g,\zeta,\gamma(t))$ 是有意义的.同时，设函数 $p(s)=qs$，$q>1$ 使得当 $s>0$ 时 $p(s)>s$.由 $p(s)$、(29) 式和 $\gamma(t)^{-1}\le\gamma(t+\theta)^{-1}$，得 $V(g(t+\theta),\zeta(t+\theta),\gamma(t+\theta))<p(V(g,\zeta,\gamma(t)))$，当 $\theta\in[-2\bar{\tau}_s,0]$ 时. 然后，可得

$$M(\|E_{\gamma(t+\theta)}g_{\gamma(t+\theta)}\|^2+\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t+\theta)}\zeta_{\gamma(t+\theta)}\|^2) \le qm(\|E_{\gamma(t)}g\|^2+\gamma(t)^{-1}\|E_{\gamma(t)}\zeta\|^2), \tag{30}$$

当 $\theta\in[-2\bar{\tau}_s,0]$ 时.由(30) 式，很明显存在 $\bar{q}>1$ 使得 $\|E_{\gamma t}g_t\| \le \bar{q}(\|E_{\gamma(t)}g\|+\gamma(t)^{-\frac{1}{2}}\|E_{\gamma(t)}\zeta\|)$ 和 $\gamma(t)^{-\frac{1}{2}}\|E_{\gamma t}\zeta_t\| \le \bar{q}(\|E_{\gamma(t)}g\|+\gamma(t)^{-\frac{1}{2}}\|E_{\gamma t}\zeta\|$.结合这些不等式，可推断存在 $q_2\ge 2\bar{q}>1$ 使得

$$\| E_{\gamma t} g_t \| + \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} \| E_{\gamma t} \zeta_t \| \le q_2 ( \| E_{\gamma(t)} g \| + \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} \| E_{\gamma(t)} \zeta \| ). \tag{31}$$

由(31)式,知

$$\gamma(t)^{-1} ( \| E_{\gamma t} g_t \| + \| E_{\gamma t} \zeta_t \| ) \le \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} ( \| E_{\gamma t} g_t \| + \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} \| E_{\gamma t} \zeta_t \| ) \le \\ q_2 \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} ( \| E_{\gamma t} g \| + \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} \| E_{\gamma(t)} \zeta \| ). \tag{32}$$

故由 $\dot V(g,\zeta,\gamma(t)) = \dot V_0(g) + \gamma(t)^{-1} \dot V_c(\zeta) - \gamma(t)\gamma(t)^{-2} V_c(\zeta) \le \dot V_0(g) + \gamma(t)^{-1} \dot V_c(\zeta)$,(27)式、(28)式和(32)式,可得

$$\dot V(g,\zeta,\gamma(t)) \le - \begin{bmatrix} \| E_{\gamma(t)} g \| \\ \| E_{\gamma(t)} \zeta \| \end{bmatrix}^{\mathrm T} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Pi \\ \Pi & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \| E_{\gamma(t)} g \| \\ \| E_{\gamma(t)} \zeta \| \end{bmatrix}, \tag{33}$$

其中

$$\Gamma_1 = \gamma(t)^{-1} - 2(\rho_4 q_1 + \rho_3) q_2 \| P_L \bar A \| \gamma(t)^{-\frac{3}{2}}, \tag{34}$$

$$\Gamma_2 = \gamma(t)^{-2} - 2\rho_4 q_1 q_2 \| P_K \bar A \| \gamma(t)^{-3}, \tag{35}$$

$$\Pi = (\rho_4 q_1 + \rho_3) q_2 \| P_L \bar A \| \gamma(t)^{-2} + \rho_4 q_1 q_2 \| P_K \bar A \| \gamma(t)^{-\frac{5}{2}} + \| P_K \| \, \| BK \| \gamma(t)^{-2}. \tag{36}$$

很明显,当 $\gamma(t) \ge \bar\gamma$ 时,$\Gamma_1 > 0$ 且 $\Gamma_1 \Gamma_2 - \Pi^2 > 0$ 成立,就存在 $\bar\gamma$ 和 $t^*$ 使得 $t \in [t^*, T_f]$ 时(33)式右端是负的.然后,根据定理 3 得到当 $\gamma(t)$ 收敛到一个小于 $\bar\gamma$ 的值时系统(1)是全局可控制的.

**定理 3** 在假设 1 和假设 2 下,控制器(2)~(4)应用于系统(1).如果 $\gamma(t)$ 收敛到一个小于 $\bar\gamma$ 的值,则(1)式的所有状态是全局可控的.

定理 3 的证明类似于文献[2]中 Lemma 1 的证明.

下面,只需考虑当 $t \in [t^*, T_f]$ 时 $\gamma(t) \ge \bar\gamma$ 这种情况即可. 已知 $\gamma(t) = \sqrt{2\int_0^t (|y| + \|z\|_1)/(1 + |y| + \|z\|_1) \mathrm{d}s + 1}$ 是单调非减的.由(34)~(36)式,易知存在充分大的常数 $\bar\gamma > 0$,当 $\gamma(t) \ge \bar\gamma$ 时,使得 $\Gamma_1 > 0$ 和 $\Gamma_1\Gamma_2 - \Pi^2 > 0$ 成立.考虑存在有限时间 $t^* \in (0, T_f)$ 使得 $\gamma(t^*) > \bar\gamma$ 这种情况.然后,正定矩阵(33)式的最小特征值是 $O(\gamma(t)^{-1})$[2,18],可得

$$\dot V(g,\zeta,\gamma(t)) \le -\rho\gamma(t)^{-1} ( \| E_{\gamma(t)} g \|^2 + \| E_{\gamma(t)} \zeta \|^2 ) \le \\ -\rho\gamma(t)^{-1} ( \| E_{\gamma(t)} g \|^2 + \gamma(t)^{-1} \| E_{\gamma(t)} \zeta \|^2 ), \tag{37}$$

其中 $\rho > 0$ 为常数,$t \in [t^*, T_f]$.

由(33)式,可得 $\| E_{\gamma(t)} g \|$ 和 $\| E_{\gamma(t)} \zeta \|$ 的边界.类似文献[5],

$$\int_{t^*}^t \gamma(s)^{-1} \mathrm{d}s \ge \sqrt{2t+1} - \sqrt{2t^*+1}. \tag{38}$$

由(29)式、(33)式、(38)式,当 $t \in [t^*, T_f]$ 时 $\gamma(t) \ge \bar\gamma$,有

$$\sqrt{\| E_{\gamma(t)} g \|^2 + \gamma(t)^{-1} \| E_{\gamma(t)} \zeta \|^2} \le M_1 \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2M}\int_{t^*}^t \gamma(s)^{-1}\mathrm{d}s} \le M_1 \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2M}(\sqrt{2t+1} - \sqrt{2t^*+1})}, \tag{39}$$

其中 $M_1 = \sqrt{M/m} \sqrt{\| E_{\gamma(t^*)} g(t^*) \|^2 + \| E_{\gamma(t^*)} \zeta(t^*) \|^2 / \gamma(t^*)}$.

下面,研究 $\gamma(t)$ 的收敛性.

根据(39)式和 $\dot\gamma(t) \le (|y| + \|z\|_1)/\gamma(t) \le 2(\|g\| + \|\zeta\|)/\gamma(t) \le 4\sqrt{\|g\|^2 + \gamma(t)^{-1}\|\zeta\|^2}$,可得

$$\int_{t^*}^{T_f} \dot\gamma(t)\mathrm{d}t \le 4M \mathrm{e}^{\frac{\rho}{2M}\sqrt{2t^*+1}} \int_{t^*}^{T_f} \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2M}\sqrt{2t+1}} \mathrm{d}t = 4M_1 \mathrm{e}^{\frac{\rho}{2M}\sqrt{2t^*+1}} \frac{2M}{\rho} \left\{ \left( \sqrt{2t^*+1} + \right.\right. \\ \left.\left. \frac{2M}{\rho} \right) \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2M}\sqrt{2t^*+1}} - \left( \sqrt{2T_f+1} + \frac{2M}{\rho} \right) \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2M}\sqrt{2T_f+1}} \right\}. \tag{40}$$

由此,易得 $\gamma(t)$ 趋于一个很大的有限常数 $T_f$.令 $T_f \to \infty$,可推得 $\gamma(t)$ 仍然有界,$\forall t$ 且当 $t \to \infty$ 时 $\gamma(t) \to \gamma_{ss} < \infty$.因此,由(37)式和 Razumikhin 定理,当 $t \to \infty$ 时 $\|e\| \to 0$ 和 $\|\zeta\| \to 0$.所以,易得当 $t \to \infty$ 时 $\|x\| \to 0$. 然后,全局控制实现.

根据上面的讨论,可得定理 4.

**定理 4**　在假设 1 和假设 2 下，选择合适的 $K$ 和 $L$ 使得 $A_K$ 和 $A_L$ 是 Hurwitz 并且由 $A_j^{\mathrm{T}}P_j+P_jA_j=-I,j=K,L$ 解得 $P_j$.然后，输出反馈控制器(2)～(4)全局控制系统(1).同时，当 $t\rightarrow\infty$ 时动态增益 $\gamma(t)$ 收敛到一个有限的常数.

## 3　仿　真

为编程简单，考虑 3 阶系统(1).4 个未知延迟取 $\tau_1=0.02+0.01\sin(1\,000t)$，$\tau_2=0.002\sin^2(t)$，$\tau_3=0.04\sin^2(10t)$，$\tau_4=0.03+0.02\sin(100t)$.系统的参数选取为 $a_1=5$，$a_2=-1$，$a_3=2$.在控制器(2)～(4)中选择 $K=[-1,-6,-12]$ 和 $L=[-1,-6-12]^{\mathrm{T}}$.初始状态为 $x_1(0)=-15$，$x_2(0)=1$，$x_3(0)=-0.5$ 的仿真结果如图 1 所示.

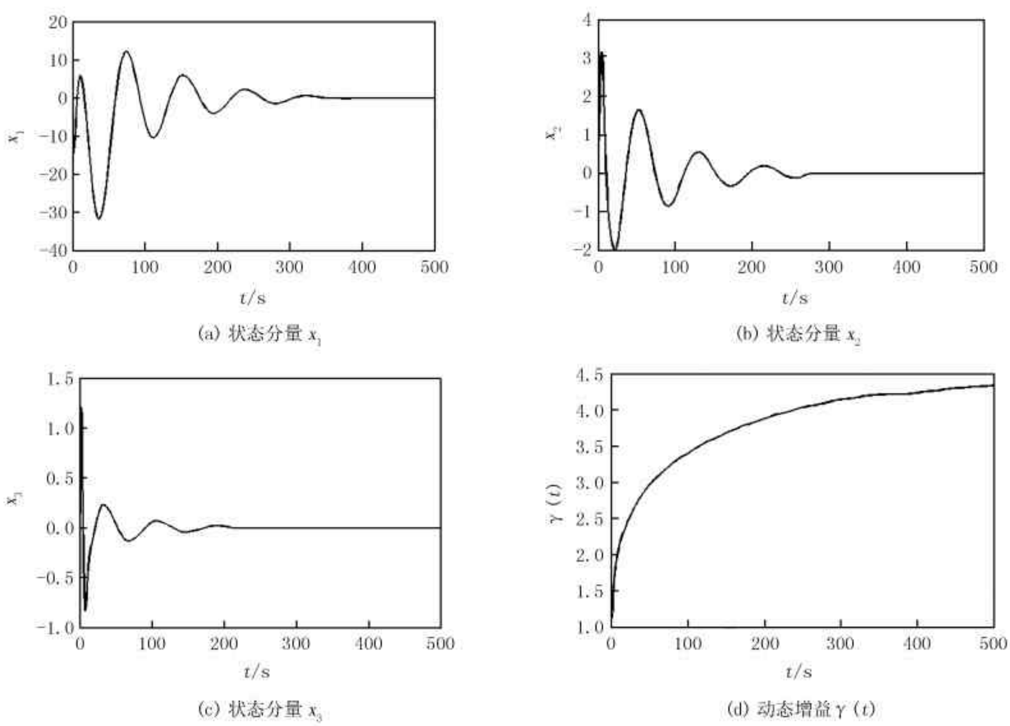


图 1　$n$=3 时系统(1)的状态和动态增益仿真

## 4　结　论

本文在提出了基于有动态增益的输出反馈控制器的观测器下研究状态和输入有未知延迟的下三角形系统的控制问题，其中仅知道时变延迟是有界的.为了分析系统(1)在控制器下的全局可控性本文给出了新的变换.通过仿真结果，设计的控制器能全局控制系统(1).本文结论的优势有两点：1)延迟的信息需要的少；2)也可用于研究通过非奇异的变换化成下三角形系统的系统.

### 参　考　文　献


[1]　何思谦.数学辞海[M].太原：山西教育出版社，2002.

[2]　Choi H L，Lim J T.Stabilization of a chain of integrators with an unknown delay in the input by adaptive output feedback[J].IEEE Transactions on Automatic Control，2006，51：1359-1363.

[3]　Mazenc F，Mondié S，Niculescu S.Global asymptotic stabilization for chains of integrators with a delay in the input[J].IEEE Transactions on Automatic Control，2003，48(1)：57-63.

[4]　关琳燕，周洪，胡文山.基于 Hamilton 理论的广域非线性时滞多机电力系统的稳定与控制[J].电力系统保护与控制，2016，44(19)：17-24.

[5]　Choi H L，Lim J T.Output feedback regulation of a chain of integrators with an unknown time-varying delay in the input[J].IEEE Trans-

actions on Automatic Control,2010,55(1):263-268.
[6] Karafyllis I.Finite-time global stabilization by means of time-varying distributed delay feedback[J].SIAM Journal on Control and Optimization,2006,45(1):320-342.
[7] Zhou B,Li Z Y,Zheng W X,et al.Stabilization of some linear systems with both state and input delays[J].Systems & Control Letters,2012,61(10):989-998.
[8] 薛春善,童艳春,王岩岩,等.不确定离散系统量化反馈镇定[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(2):34-39.
[9] 高兴泉,胡云峰.带有时域硬约束的不确定系统最优保代价控制[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(1):25-30.
[10] Bekiaris-Liberis N,Krstic M.Stabilization of linear strict-feedback systems with delayed integrators[J].Automatica,2010,46:1902-1910.
[11] Zhang X F,Liu L,Feng G,et al.Output feedback control of large-scale nonlinear systems in lower triangular form[J].Automatica,2013,49:3476-3483.
[12] Krstic M.Lyapunov stability of linear predictor feedback for time-varying input delay[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2010,55(2):554-559.
[13] Yakoubi K,Chitour Y.Linear systems subject to input saturation and time delay: global asymptotic stabilization[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2007,52(5):874-879.
[14] Bresch-Pietri D,Chauvbin J,Petit N.Adaptive control scheme for uncertain time-delay systems[J].Automatica,2012,48(8):1536-1552.
[15] Polyakov A,Efimov D,Perruquetti W,et al.Output stabilization of time-varying input delay systems using interval observation technique[J].Automatica,2013,49(11):3402-3410.
[16] Lei H,Lin W.Adaptive regulation of uncertain nonlinear systems by output feedback:A universal control approach[J].Systems and Control Letters,2007,56: 529-537.
[17] Koo M S,Choi H L,Lim J T.Global regulation of a class of feedforward and non-feedforward nonlinear systems with a delay in the input[J].Automatica,2012,48: 2607-2613.
[18] Hale J K,Verduyn Lunel S M.Introduction to Functional Differential Equations[M].New York:Springer Verlag,1993.

# Output feedback regulation of lower triangular system with unknown time-varying delays

Bi Weiping, Gao Lulu

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract**: The output feedback control of a lower triangular system with unknown time-varying delays in both states and input have been studied in this paper.The time-varying delays are only known to be bounded, and their bounds and time-varying rates are unknown.First, a newly designed adaptive output feedback controller is proposed in this note.Then, in order to deal with new phenomena associated with unknown time-varying delays in states, we give a new transformation and techniques.Finally, the system is globally regulated by the output feedback controller. A simulation example shows the effectiveness of the controller.

**Keywords**: time-varying delays; adaptive; output feedback controller; lower triangular system; globally regulation

[责任编校 陈留院]