第 47 卷　第 6 期　河南师范大学学报(自然科学版)　Vol.47　No.6
2019 年 11 月　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　Nov. 2019

文章编号:1000-2367(2019)06-0008-07　**DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2019.06.002

双线性分数次极大算子的交换子的紧性

周疆,郭庆栋

(新疆大学 数学与系统科学学院,乌鲁木齐 830046)

摘　要:定义 $\mathscr{M}_\alpha$ 为双线性分数次极大算子以及令 $\vec{b}=(b_1,b_2)$ 是一个局部可积函数集合.主要研究双线性分数次极大算子的交换子在 Lebesgue 空间上的紧性,其中交换子包括分数次极大线性交换子 $\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}$,分数次极大迭代交换子 $\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}$.且所得结论在单线性时也是新的结果.

关键词:交换子;紧性;分数次极大算子;Lebesgue 空间

中图分类号:O174.2　**文献标志码**:A

设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数,$0<\alpha<n$,分数次极大函数的定义为 $M_\alpha(f)(x)=\sup\limits_{B\ni x}1/|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y$.由分数次极大函数和局部可积函数 b 生成的交换子定义 $M_{\alpha,b}(f)(x)=\sup\limits_{B\ni x}1/|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}\int_B|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y$,其中上确界取遍 $\mathbf{R}^n$ 中所有包含 x 的球 B.交换子 $M_{\alpha,b}$ 的有界性已经被许多作者研究,例如文献[1-3].在 2014 年,Zhang 等[2] 证明了对于 $1<p<\infty$,$b\in \mathrm{BMO}\Leftrightarrow M_{\alpha,b}(f)(x):L^p\to L^q$.

最近,多线性算子引起了许多作者的研究兴趣,它是单线性的一种推广.在 1978 年,Coifman 和 Meyer[4] 开始研究多线性算子,后来 Calderón 把交换子与多线性理论结合研究,之后 Grafakos 和 Torres[5] 又对此进行系统研究.在多线性情形中,Calderón-Zygmund 算子的交换子和极大算子的交换子被人们广泛关注.在 2015 年,Cao 等[6] 研究了如下的多线性分数次极大函数

$$\mathscr{M}_\alpha(\vec{f})(x)=\sup_{B\ni x}|B|^{\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^m\frac{1}{|B|}\int_B|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i,$$

其中 $0<\alpha<mn$,$\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$ 是一个局部可积函数的集合.在 2017 年,如下的分数次极大迭代交换子的有界性被 Gurbuz[7] 研究,$\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(\vec{f})(x)=\sup\limits_{B\ni x}|B|^{\frac{\alpha}{n}}\prod\limits_{i=1}^m\frac{1}{|B|}\int_B|b_i(x)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i$,其中 $\vec{b}$ 是一个局部可积函数的集合.另一形式的分数次极大线性交换子也被人们广泛研究,$\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(\vec{f})(x)=\sum\limits_{i=1}^m\mathscr{M}^i_{\alpha,b_i}(\vec{f})(x)$,其中 $\mathscr{M}^i_{\alpha,b_i}(\vec{f})(x)=\sup\limits_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{m-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\cdots\int_B|b_i(x)-b_i(y_i)|\prod\limits_{j=1}^m|f_j(y_j)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m$.

另一方面,Uchiyama[8] 在 1978 年把 Calderón-Zygmund 算子的交换子的有界性结果改进到紧性,其中 $b\in\mathrm{CMO}$,CMO 表示 C_c^∞ 在 BMO 范数下的闭包.在复分析中,交换子紧性的研究兴趣来自于交换子和 Hankel 类型算子的联系.近些年,交换子的紧性已经被人们广泛研究,例如 Wang[9] 研究了分数次积分算子的交换子的紧性.Chen 和 Hu[10] 研究了带粗糙核的奇异积分算子的交换子在 L^p 上的紧性.在多线性情形中,人们对紧性的问题刚刚开始研究.最近,Wang 等[11] 证明了如果 $\mathscr{M}$ 是一个双线性极大函数,$1<p,p_1,p_2<\infty$,$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$,当 $b_1,b_2\in\mathrm{CMO}$,则$[b_1,\mathscr{M}]_1$,$[b_2,\mathscr{M}]_2$ 是从 $L^{p_1}\times L^{p_2}$ 到 L^p 的一个紧算子.同样的指标范围,

收稿日期:2018-05-03;**修回日期**:2019-03-10.

基金项目:国家自然科学基金(11826202;11661075)

作者简介:周疆(1968—),男,四川安岳人,新疆大学教授,研究方向为调和分析,E-mail:zhoujiang@xju.edu.cn.

通信作者:郭庆栋(1994—),男,湖北黄石人,新疆大学硕士研究生,研究方向为调和分析,E-mail:guoqingdongshuxin@126.com.

如果 $b_1,b_2\in\mathrm{CMO}$，则 $[b_2,[b_1,\mathscr{M}]_1]_2$ 是从 $L^{p_1}\times L^{p_2}$ 到 L^p 的一个紧算子.

类似于双线性算子，Ding 和 Mei[12] 首次给出了如下次双线性算子的紧性的定义.

定义 1　设 X,Y,Z 是赋范线性空间，$B_{r,X}=\{x\in X:\|x\|\leq r\}$ 表示赋范线性空间 X 中以原点为中心，r 为半径的闭球，S 是一个次双线性算子.如果 $S(B_{1,X}\times B_{1,Y})$ 在 Z 中是一个准紧集，则 $S:X\times Y\to Z$ 是一个紧算子.

受文献[11]的启发，能否得到关于双线性分数次极大算子的交换子的紧性的结果.本文将给出肯定的回答，且本文结论在单线性时也是新的结果.

本文的主要结论如下：

定理 1　设 $0<\alpha<2n$，$1<p_1,p_2<\infty$，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}$ 和 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-\dfrac{\alpha}{n}$，$1<p,q<\infty$，以及 $\vec{b}=(b_1,b_2)$ 且 $b_1,b_2\in\mathrm{CMO}$，则 $\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}:L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^q$ 是一个紧算子.

定理 2　设 $0<\alpha<2n$，$1<p_1,p_2<\infty$，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}$ 和 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-\dfrac{\alpha}{n}$，$1<p,q<\infty$，以及 $\vec{b}=(b_1,b_2)$ 且 $b_1,b_2\in\mathrm{CMO}$，则 $\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}:L^{p_1}\times L^{p_2}\to L^q$ 是一个紧算子.

推论 1　设 $0<\alpha<n$，$1<q,p<\infty$，$p<\dfrac{n}{\alpha}$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$ 和 $b\in\mathrm{CMO}$，则 $\mathscr{M}_{\alpha,b}:L^p\to L^q$ 是一个紧算子.

1　引理及其证明

在本文的定理证明中，需要下述引理.

引理 1　设 $b_1\in C_c^\infty$，$x,t\in\mathbf{R}^n$.对任意球 $B_1:=B(x_0,r)\ni x$ 和 $B_2:=B(x_0,r+|t|)$，使得对任意 $s\in(1,\infty)$，$0<\alpha s<n$，存在一个常数 $C>0$ 有

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_2}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right||b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^2|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\leq$$
$$C(|t|+|t|^{\frac{1}{s'}})\mathscr{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x),$$

其中 $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s'}=1$，$\mathscr{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x)=(\mathscr{M}_{\alpha s}(|f_1|^s,|f_2|^s)(x))^{\frac{1}{s}}$.

证明　下面分两种情况讨论.

情况 1　$r\leq|t|$.对任意的 $y_1\in B_2$，注意到 $|x+t-y_1|\leq|x-y_1|+|t|\leq C(r+|t|)\leq C|t|$，则有

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_2}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right||b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^2|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\leq$$
$$C\|\nabla b_1\|_\infty|t|\int_{B_2}\int_{B_2}\left(\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}+\frac{\chi_{B_2}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right)\prod_{i=1}^2|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\leq$$
$$C|t|\mathscr{M}_\alpha(f_1,f_2)(x)\leq C|t|\mathscr{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x).$$

情况 2　$r>|t|$. 下面通过加一项减一项，

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}|b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^2|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2,$$

以及

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}|b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^2|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2,$$

通过计算可得

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_2}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right||b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^{2}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\leq$$

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right||b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^{2}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+$$

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right||b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^{2}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+$$

$$\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_2}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right||b_1(y_1)-b_1(x+t)|\prod_{i=1}^{2}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2=$$

$$J_1+J_2+J_3.$$

当 $y_1\in B_1$ 时,有 $|x+t-y_1|\leq|x-y_1|+|t|\leq Cr$,则

$$J_1=\frac{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}-|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\frac{1}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|b_1(y_1)-b_1(x+t)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\leq$$

$$C\frac{r^{2n-\alpha-1}|t|}{r^{2n-\alpha-1}}\mathcal{M}_\alpha(f_1,f_2)(x)\leq C|t|\mathcal{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x).$$

下面处理 J_2,对任意 $1<s<\infty$, 注意到

$$|b_1(x+t)-b_1(y_1)|=|b_1(x+t)-b_1(y_1)|^{\frac{1}{s'}}|b_1(x+t)-b_1(y_1)|^{1-\frac{1}{s'}}\leq$$

$$C\|b_1\|_\infty^{1-\frac{1}{s'}}\|\nabla b_1\|_\infty^{\frac{1}{s'}}|x+t-y_1|^{\frac{1}{s'}}\leq C\|b_1\|_\infty^{1-\frac{1}{s'}}\|\nabla b_1\|_\infty^{\frac{1}{s'}}r^{\frac{1}{s'}}.$$

则有

$$J_2\leq\frac{1}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_2\backslash B_1}|b_1(y_1)-b_1(x+t)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\leq$$

$$\frac{Cr^{\frac{1}{s'}}}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_2\backslash B_1}|f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\int_{B_2}|f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\leq$$

$$Cr^{\frac{1}{s'}}\left(\frac{|B_2|-|B_1|}{|B_2|}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\frac{1}{|B_2|^{2-\frac{\alpha s}{n}}}\int_{B_2}\int_{B_2}|f_1(y_1)|^s|f_2(y_2)|^s\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right)^{\frac{1}{s}}\leq$$

$$Cr^{\frac{1}{s'}}\frac{|t|^{\frac{1}{s'}}(r+|t|)^{\frac{n-1}{s'}}}{(r+|t|)^{\frac{n}{s'}}}\mathcal{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x)\leq C|t|^{\frac{1}{s'}}\mathcal{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x).$$

类似于 J_2 的过程,可得结论 $J_3\leq C|t|^{\frac{1}{s'}}\mathcal{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x)$, 至此,完成了引理 1 的证明.

引理 2 设 $1<p<\infty$ 和 $b,v\in\mathrm{BMO}$,则对于 $i=1,2$ 和 $x,t\in\mathbf{R}^n$, 有

(a) $|\mathcal{M}_{\alpha,b}^i(f_1,f_2)(x)-\mathcal{M}_{\alpha,v}^i(f_1,f_2)(x)|\leq\mathcal{M}_{\alpha,b-v}^i(f_1,f_2)(x)$;

(b) $\|\mathcal{M}_{\alpha,b}^i(f_1,f_2)\chi_{E_A}\|_{L^p}\leq\|\mathcal{M}_{\alpha,v}^i(f_1,f_2)\chi_{E_A}\|_{L^p}+\|\mathcal{M}_{\alpha,b-v}^i(f_1,f_2)\chi_{E_A}\|_{L^p}$;

(c) $\|\mathcal{M}_{\alpha,b}^i(f_1,f_2)(\cdot+t)-\mathcal{M}_{\alpha,b}^i(f_1,f_2)(\cdot)\|_{L^p}\leq\|\mathcal{M}_{\alpha,v}^i(f_1,f_2)(\cdot+t)-\mathcal{M}_{\alpha,v}^i(f_1,f_2)(\cdot)\|_{L^p}+2\|\mathcal{M}_{\alpha,b-v}^i(f_1,f_2)\|_{L^p}$.

证明 下面证明(a)

$$|\mathcal{M}_{\alpha,b}^i(f_1,f_2)(x)-\mathcal{M}_{\alpha,v}^i(f_1,f_2)(x)|\leq\sup_{B\ni x}\left|\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|b(x)-\right.$$

$$b(y_i)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2-\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|v(x)-$$

$$v(y_i)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2|\leq\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|b(x)-$$

$$v(x)-b(y_i)+v(y_i)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2=\mathcal{M}^i_{\alpha,b-v}(f_1,f_2)(x).$$

结论(b),(c)与(a)的过程类似,此处省略.

参考 Hanche[13] 与 Clop 和 Cruz[14] 的工作,他们给出了如下子集在 L^q 中是强准紧集的刻画.

引理 3　设 $1<q<\infty$,假如子集 $E\subset L^q$ 满足下述条件：

(i) $\sup\limits_{f\in E}\|f\|_{L^q}<\infty$;(ii) $\lim\limits_{t\to 0}\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_{L^q}=0$,对 $\forall f\in E$;(iii) $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{|x|>A}|f(x)|^q\mathrm{d}x=0$,对 $\forall f\in E$.则子集 E 是 L^q 中的准紧集.

2　定理的证明

定理 1 的证明　因为 C_c^∞ 在 CMO 中稠密,所以对于 $b_i\in \mathrm{CMO}(i=1,2)$ 和任意一个 $\eta>0$,存在一个 $b_i^\eta\in C_c^\infty$ 使得

$$\|b_i-b_i^\eta\|_{\mathrm{BMO}}<\eta. \tag{1}$$

定义 $\vec{b^\eta}=(b_1^\eta,b_2^\eta)$ 和 $E^\eta=\{\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b^\eta}}(f_1,f_2):f_i\in L^{p_i},\|f\|_{L^{p_i}}\leq 1,i=1,2\}$.

在引理 3 中,只需要证明条件(i),(ii)和(iii)在子集 E^η 上成立就可证明定理 1.实际上,通过引理 2 和(1)式,有下面 3 个结论.

$$\sup_\Lambda\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)\|_{L^q}\leq\sup_\Lambda\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b^\eta}}(f_1,f_2)\|_{L^q}+C\eta<\infty, \tag{2}$$

其中 $\Lambda=\{(f_1,f_2):\|f_1\|_{L^{p_1}}\leq 1,\|f_2\|_{L^{p_2}}\leq 1\}$.

$$\lim_{A\to\infty}\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)\chi_{E_A}\|_{L^q}\leq\lim_{A\to\infty}\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b^\eta}}(f_1,f_2)\chi_{E_A}\|_{L^q}+$$
$$\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma(\vec{b}-\vec{b^\eta})}(f_1,f_2)\chi_{E_A}\|_{L^q}\leq C\eta\to 0,(\eta\to 0), \tag{3}$$

$$\lim_{|t|\to 0}\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot+t)-\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot)\|_{L^q}\leq\lim_{|t|\to 0}\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b^\eta}}(f_1,f_2)(\cdot+t)-$$
$$\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b^\eta}}(f_1,f_2)(\cdot)\|_{L^q}+2\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma(\vec{b}-\vec{b^\eta})}(f_1,f_2)\chi_{E_A}\|_{L^q}\leq C\eta\to 0,(\eta\to 0). \tag{4}$$

根据(2)～(4)式,容易得上述极限在 E^η 上一致成立.因此,为了证明定理1,只需要证明当 $b_1,b_2\in C_c^\infty$ 时,引理 3 中的条件(i),(ii)和(iii)在子集 $E=\{\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2):f_i\in L^{p_i},\|f\|_{L^{p_i}}\leq 1,i=1,2\}$ 上一致成立即可.

注意到当 $b\in C_c^\infty$ 时,对于 $b\in \mathrm{BMO}$ 的一些多线性交换子的问题变得容易处理.

$$|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(x)|=|\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|b_1(x)-b_1(y_1)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+$$

$$\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|b_2(x)-b_2(y_2)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2|\leq(2\|b_1\|_\infty+$$

$$2\|b_2\|_\infty)\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\leq(2\|b_1\|_\infty+2\|b_2\|_\infty)\mathcal{M}_\alpha(f_1,f_2)(x).$$

根据文献[15]中 $\mathcal{M}_\alpha$ 的有界性可得,$\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(x)\|_{L^q}\lesssim\|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}$,因此(i)成立.

下面证明(ii)成立,$\lim\limits_{|t|\to 0}\|\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot+t)-\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot)\|_{L^q}=0$.

根据 $\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}$ 从 $L^{p_1}\times L^{p_2}$ 到 L^q 的有界性,有 $\mathcal{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)\leq\mathcal{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(x)<\infty$　a.e..

对两个任意固定的点 $x,t\in\mathbf{R}^n$,且$|t|<1$,不失一般性,可以假设

$$\mathcal{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x+t)\leq\mathcal{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x),\mathcal{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)\leq\infty,$$

因此对任意的 $\epsilon\in(0,1)$,存在一个方体 $B_1:=B(x_0,r)\ni x$,使得

$$\frac{1}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|b_1(x)-b_1(y_1)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\geq(1-\epsilon)\mathcal{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x). \tag{5}$$

由 $x+t\in B(x_0,r+|t|)=:B_2$,可有

$$\frac{1}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_2}\int_{B_2}|b_1(y_1)-b_1(x+t)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \le \mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x+t) \quad (6).$$

根据(5)式和(6)式,可得

$$\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)-\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x+t)-\epsilon\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)\le\frac{1}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|b_1(x)-b_1(y_1)|\times$$

$$|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2-\frac{1}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_2}\int_{B_2}|b_1(y_1)-b_1(x+t)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\le$$

$$\frac{|b_1(x)-b_1(x+t)|}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+\frac{1}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|b_1(x+t)-b_1(y_1)|\times$$

$$|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2-\frac{1}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_2}\int_{B_2}|b_1(y_1)-b_1(x+t)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\le$$

$$\|\nabla b_1\|_\infty|t|\mathscr{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x)+\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_2}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right||b_1(y_1)-$$

$$b_1(x+t)|\prod_{i=1}^{2}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

由引理 1 且让 $\epsilon=|t|$,可得

$$|\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)-\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x+t)|\lesssim(|t|+|t|^{\frac{1}{s'}})\mathscr{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x)+|t|\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x).$$

类似地,根据上述可有

$$|\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(x)-\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(x+t)|\lesssim(|t|+|t|^{\frac{1}{s'}})\mathscr{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x)+|t|\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(x).$$

因此对于 $1<s<\min\{p_1,p_2\}$,$\|\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot)-\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot+t)\|_{L^q}\lesssim|t|+|t|^{\frac{1}{s'}}$.
显然可得 $\lim\limits_{t\to0}\|\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot)-\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot+t)\|_{L^q}=0$.

为了证明(iii)成立,假设 R 很大,使得$\mathrm{supp}b_1\cup\mathrm{supp}b_2\subset B_R:=B(0,R)$,则对于 $|x|>A\ge\max\{2R,1\}$,有

$$|\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)|=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|b_1(y_1)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\lesssim$$

$$\sup_{B\ni x}\frac{\|b_1\|_\infty\|f_2\|_{L^{p_2}}}{|B|^{1+\frac{1}{p_2}-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B\cap\mathrm{supp}b_1}|f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1.$$

根据 $B\ni x$,且 $|x|>A\ge\max\{2R,1\}$,以及 $B\cap\mathrm{supp}b_1\ne\varnothing$,可得 $|B|\gtrsim|x-R|^n\gtrsim|x|^n$,因此有 $|\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)|\lesssim|x|^{-n+\alpha-\frac{n}{p_2}}$.

对上述不等式两边同时升 q 次方,以及在范围 $|x|>A$ 上同时积分,

$$\int_{|x|>A}|\mathscr{M}^1_{\alpha,b_1}(f_1,f_2)(x)|^q\mathrm{d}x\lesssim\int_{|x|>A}|x|^{-(n-\alpha+\frac{n}{p_2})q}\mathrm{d}x\lesssim\int_{|x|>A}|x|^{-(n-\alpha)q}\mathrm{d}x,$$

类似有

$$\int_{|x|>A}|\mathscr{M}^2_{\alpha,b_2}(f_1,f_2)(x)|^q\mathrm{d}x\lesssim\int_{|x|>A}|x|^{-(n-\alpha)q}\mathrm{d}x.$$

注意到,$1<q<\infty$,$\dfrac{n-\alpha}{n-p\alpha}>1$,所以

$$\int_{|x|>A}|\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}(f_1,f_2)(x)|^q\mathrm{d}x\lesssim\int_{|x|>A}|x|^{-(n-\alpha)q}\mathrm{d}x=\int_{|x|>A}|x|^{-\frac{n-\alpha}{n-p\alpha}np}\mathrm{d}x\to0(A\to\infty).$$

因此当 $b_1,b_2\in\mathrm{CMO}$,则 $\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}$ 是从 $L^{p_1}\times L^{p_2}$ 到 L^q 的一个紧算子.至此,定理 1 的证明全部完成.

定理 2 的证明 与定理 1 类似,只需要证明当 $b_1,b_2\in C_c^\infty$ 时,引理 3 中的条件(i),(ii) 和(iii)在子集 $E=\{\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2):f_i\in L^{p_i},\|f\|_{L^{p_i}}\le1,i=1,2\}$ 上一致成立即可.根据文献[7],立即可知(i)式成立.下

面证明 $|\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x+t)-\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x)|$ 在 L^q 上的估计.对两个任意固定的点 $x,t\in\mathbf{R}^n$，且 $|t|<1$，不失一般性，可以假设

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x+t)\le\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x),\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x)\le\infty.$$

因此对任意的 $\epsilon\in(0,1)$，存在一个方体 $B_1:=B(x_0,r)\ni x$，使得

$$|B_1|^{\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}|b_i(x)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\ge(1-\epsilon)\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x).\tag{7}$$

因为 $x+t\in B(x_0,r+|t|)=:B_2$，可有

$$|B_2|^{\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}|b_i(x+t)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\le\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x+t).\tag{8}$$

根据(7)、(8)式，可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x)-\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x+t)-\epsilon\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x)\le|B_1|^{\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}|b_i(x)-\\&\quad b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i-|B_2|^{\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}|b_i(x+t)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\le\\&\quad\frac{|b_1(x)-b_1(x+t)||b_2(x)-b_2(x+t)|}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+\\&\quad\frac{|b_1(x)-b_1(x+t)|}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|b_2(y_1)-b_2(x+t)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+\\&\quad\frac{|b_2(x)-b_2(x+t)|}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B_1}\int_{B_1}|b_1(y_1)-b_1(x+t)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+\\&\quad|B_1|^{\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}|b_i(x+t)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i-|B_2|^{\frac{\alpha}{n}}\\&\quad\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}|b_i(x+t)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i.\end{aligned}$$

根据 $|b_i(x)-b_i(x+t)|\le\|\nabla b_i\|_\infty|t|$，可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x)-\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x+t)-\epsilon\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x)\le|t|^2\|\nabla b_1\|_\infty\|\nabla b_2\|_\infty\mathcal{M}_\alpha(f_1,f_2)(x)+\\&\quad|t|\,\|\nabla b_1\|_\infty\|b_2\|_\infty\mathcal{M}_\alpha(f_1,f_2)(x)+|t|\,\|b_1\|_\infty\|\nabla b_2\|_\infty\mathcal{M}_\alpha(f_1,f_2)(x)+\\&\quad\int_{B_2}\int_{B_2}\left|\frac{\chi_{B_1}(y_1)\chi_{B_1}(y_2)}{|B_1|^{2-\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\chi_{B_2}(y_1)\chi_{B_2}(y_2)}{|B_2|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\right|\prod_{i=1}^{2}|b_i(y_i)-b_i(x+t)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.\end{aligned}$$

类似引理 1 的估计且让 $\epsilon=|t|$，则可得

$$|\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x)-\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x+t)|\lesssim(|t|+|t|^{\frac{1}{s'}})\mathcal{M}_{\alpha,s}(f_1,f_2)(x)+|t|\mathcal{M}_{\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(x).$$

因此对于 $1<s<\min\{p_1,p_2\}$，有 $\|\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot)-\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot+t)\|_{L^q}\lesssim|t|+|t|^{\frac{1}{s'}}$，可得 $\lim\limits_{t\to0}\|\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot)-\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(f_1,f_2)(\cdot+t)\|_{L^q}=0.$

为证明(iii)成立，假设 R 很大，使得 $\operatorname{supp}b_1\cup\operatorname{supp}b_2\subset B_R:=B(0,R)$，则当 $|x|>A\ge\max\{2R,1\}$，有

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(x)|&=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|^{2-\frac{\alpha}{n}}}\int_B\int_B|b_1(y_1)||b_2(y_2)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\lesssim\\&\quad\sup_{B\ni x}\frac{\|b_1\|_\infty\|b_2\|_\infty\|f_2\|_{L^{p_2}}}{|B|^{1+\frac{1}{p_2}-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B\cap\operatorname{supp}b_1}|f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1.\end{aligned}$$

根据 $B\ni x$，且 $|x|>A\ge\max\{2R,1\}$，以及 $B\cap\operatorname{supp}b_1\ne\varnothing$，可得 $|B|\gtrsim|x-R|^n\gtrsim|x|^n$，因此有 $|\mathcal{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(x)|\lesssim|x|^{-n+\alpha-\frac{n}{p_2}}$.

对上述不等式两边同时升 q 次方,以及在范围 $|x|>A$ 上同时积分,

$$\int_{|x|>A}|\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(x)|^q\mathrm{d}x\lesssim\int_{|x|>A}|x|^{-(n-\alpha+\frac{n}{p_2})q}\mathrm{d}x\lesssim\int_{|x|>A}|x|^{-(n-\alpha)q}\mathrm{d}x.$$

注意到,$1<q<\infty,\dfrac{n-\alpha}{n-p\alpha}>1$,所以

$$\int_{|x|>A}|\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}(x)|^q\mathrm{d}x\lesssim\int_{|x|>A}|x|^{-(n-\alpha)q}\mathrm{d}x=\int_{|x|>A}|x|^{-\frac{n-\alpha}{n-p\alpha}np}\mathrm{d}x\rightarrow 0(A\rightarrow\infty).$$

因此当 $b_1,b_2\in\mathrm{CMO}$,则 $\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}$ 是从 $L^{p_1}\times L^{p_2}$ 到 L^q 的一个紧算子.至此,定理 2 的证明全部完成.

参考文献

[1] Zhang P,Wu J.Commutators of the fractional maximal functions[J].Acta Mathematica Sinica,2009,52(6):1235-1238.

[2] Zhang P,Wu J.Commutators of the fractional maximal function on variable exponent Lebesgue spaces[J].Czechoslovak Mathematical Journal,2014,64(1):183-197.

[3] Guliyev V S,Shukurov P S.On the boundedness of the fractional maximal operator,Riesz Potential and their commutators in generalized Morrey spaces[J].Operator Theory: Advances and Applications,2013,229:175-194.

[4] Coifman R,Meyer Y.Au delà des opérateurs pseudo-différentiels[J].Astérisque Société Mathématique de France Paris,1978(不详):57.

[5] Grafakos L,Torres R,Multilinear Calderon-Zygmund theory[J].Advances in Mathematics,2002,165:124-164.

[6] Cao M,Xue Q,Yabuta K.On the boundedness of multilinear fractional strong maximal operator with multiple weights[J/OL].[2018-05-03].https://aYXiv.org/abs/1512.08681.

[7] Gurbuz F.Multilinear BMO estimates for the commutators of multilinear fractional maximal and integral operators on the product generalized Morrey spaces[J].International Journal of Analysis and Applications,2019,17(4):596-619.

[8] Uchiyama A.On the compactness of operators of Hankel type[J].Tohoku Mathematical Journal First,1978,30(1):163-171.

[9] 王世林.分数次积分交换子的紧致性[J].数学年刊 A 辑(中文版),1987(4):475-482.

[10] Chen J,Hu G.Compact commutators of rough singular integral operators[J].Canadian Mathematical Bulletin,2015,58(1):1-11.

[11] Wang D,Zhou J,Teng Z.On the compactness of commutators of bilinear Hardy-Littlewood maximal operator[J].Analysis Mathematica,2019,45(3):599-619.

[12] Ding Y,Mei T.Boundedness and compactness for the commutators of bilinear operators on morrey spaces[J].Potential Analysis,2015,42(3):717-748.

[13] Hanche-Olsen H,Holden H.The Kolmogorov-Riesz compactness theorem [J].Expositiones Mathematicae,2010,28(4):385-394.

[14] Clop A,Cruz V.Weighted estimates for beltrami equations[J].Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica,2013,38(1):91-113.

[15] Moen K.Weighted inequalities for multilinear fractional integral operators[J].Collectanea Mathematica,2009,60(2):213-238.

On the compactness of commutators of bilinear fractional maximal operator

Zhou Jiang,Guo Qingdong

(College of Mathematics and System Sciences,Xinjiang University,Urumqi 830046,China)

Abstract: Denote by $\mathscr{M}_\alpha$ be the bilinear fractional maximal operator and let $\vec{b}=(b_1,b_2)$ be a collection of locally integrable functions. In this paper we mainly study the compactness of commutators of bilinear fractional maximal operator on Lebesgue spaces, which commutators include the fractional maximal linear commutator $\mathscr{M}_{\alpha,\Sigma\vec{b}}$ and the fractional maximal iterated commutator $\mathscr{M}_{\alpha,\Pi\vec{b}}$. The results are new even in the linear case.

Keywords: commutator; compactness; fractional maximal operator; Lebesgue space

[责任编校 陈留院 赵晓华]