文章编号:1000－2367(2015)01－0025－04　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.01.005

一类带有阻尼项的高阶非线性波动方程的整体解

王建平[1],张香伟[2]

(1.河南农业大学 信息与管理科学学院,郑州 450046;2.郑州师范学院 数学系,郑州 450044)

摘　要:研究了一类带阻尼项和源项的高阶非线性波动方程的初边值问题.首先对算子和非线性项进行假设,接着由 Holder 不等式、Young 不等式和 Gronwell 不等式,通过抽子序列,应用 Galerkin 方法及紧致性原理证明了该问题整体解的存在性.

关键词:阻尼项;非线性波动方程;初边值问题;整体解的存在性

中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A

考虑下面高阶非线性波动方程的初边值问题

$$u_{tt}+Au+|u_t|^p u_t+|u|^q u=f(x,t),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+,\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega,\tag{2}$$

$$D^\alpha u(x,t)\Big|_{\partial\Omega\times\mathbf{R}^+}=0,\ |\alpha|\le m-1,\tag{3}$$

其中算子 $Au=\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u)$,$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,是指 n 重指标,$D^\alpha=\prod\limits_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}$,$D^\beta=\prod\limits_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\beta_i}$,$|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^n|\alpha_i|$,$x=(x_1,\cdots,x_n)$,$\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域.

许多人用不同的方法和假设条件研究了 $A=-\Delta$ 时初边值问题整体解的存在性、衰减性及 Blow-up 现象(文献[1－4]).但是,对于问题(1)～(3)人们考虑得较少.W. V. Whal[5] 和 H. Pecher[6] 研究了不带阻尼项的问题(1)～(3)的正则解.然而,Y. J. Ye[7] 和 W. V. Whal[8] 解决了带有阻尼项的非线性波动方程经典周期解的存在性.

应用Galerkin方法和紧致性原理,并借助于文献[9－10]的技巧,本文证明了问题(1)～(3)整体解的存在性.文中所使用的函数都是实值函数.为方便起见,C 表示各种不同的依赖于已知常数的常数,用 $\|\cdot\|_r$ 表示 $L^r(\Omega)$ 范数.

1　预备知识

对算子 A 和函数 $f(x,t)$ 作如下假设.

H_1:算子 A 在 $\dot H^m$ 上是自伴和强制的,即存在常数 c_0,c_1 使得 $c_1^2\|u\|_{H^m}\ge\langle Au,u\rangle\ge c_0^2\|u\|_{H^m}$,$u\in\dot H^m$,其中

$$\langle Au,v\rangle=\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u(x)D^\beta v(x)\mathrm{d}x,u,v\in\dot H^m,$$

$$\|u\|_{H^m}=\Big(\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega|D^\alpha u|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

收稿日期::2014-08-08

基金项目:国家自然科学基金联合基金(U1204104)

作者简介:王建平(1972－),男,河南临颖人,河南农业大学副教授,主要从事微分方程研究,E-mail:Xwjpw007@126.com.

H_2:$f(x,t)$ 是定义在 $\Omega\times\mathbf{R}^+$ 上的实值函数,并且 $f(x,t)\in L_{loc}^{\frac{p+2}{p+1}}\left(\mathbf{R}^+;L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)\right)$,$\sup\limits_{t\in\mathbf{R}^+}\delta_0(t)<+\infty$;其中 $\delta_0(t)=\left\{\int_0^t\|f(s)\|_{\frac{p+2}{p+1}}^{\frac{p+2}{p+1}}\mathrm{d}s\right\}^{\frac{p+1}{p+2}}$.

H_3:$p,q>0$ 是常数,且 $1\leq n\leq 2m$ 时,$0<p,q<+\infty$;$n>2m$ 时,$0<p,q<\dfrac{4m}{n-2m}$.

为证明主要结果,需要下面的引理.

引理 1(Sobolev 不等式) 设 $u\in\dot{H}^m$,则 $\|u\|_l\leq S_l\|u\|_A$.其中 S_l 是 Sobolev 常数.$0<l\leq\dfrac{2n}{n-2m}$ 时,$n>2m$;$0<l<+\infty$ 时,$1\leq n\leq 2m$.

引理 2(Young 不等式) 设 $a,b\geq 0$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,$1<p,q\leq+\infty$,则 $ab\leq\delta a^p+C(\delta)b^q$.其中 $\delta>0$ 是任意的常数,$C(\delta)>0$ 是依赖于 δ 的常数.

2 整体解的存在性

定理 1 设 $u_0\in\dot{H}^m(\Omega)\cap L^{q+2}(\Omega)$,$u_1\in L^2(\Omega)$,并且假设条件 H_1,H_2,H_3 均满足,则问题(1)~(3)存在整体解 $u(x,t)$,且使得

$$u(x,t)\in L^\infty(0,T;\dot{H}^m(\Omega)\cap L^{q+2}(\Omega));u_t(x,t)\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

证明 令 $\|u\|_A\equiv<Au,u>^{\frac{1}{2}}$,$\forall u\in\dot{H}^m$,并在 $\dot{H}^m$ 上定义泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|_A+\frac{1}{q+2}\|u\|_{q+2}^{q+2}.$$

设 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ 是由 A 的特征函数所组成的 $\dot{H}^m$ 的基.即 $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ 是下列 Dirichlet 边值问题的解

$$A\phi_j=u_j\phi_j,x\in\Omega;D^\alpha\phi_j=0,x\in\partial\Omega,|\alpha|\leq m-1.\tag{4}$$

考虑常微分方程组的 Cauchy 问题

$$(u_{rtt}(t),\phi_j)+(Au_r(t),\phi_j)+(|u_{rt}(t)|^pu_{rt}(t),\phi_j)+(|u_r(t)|^qu_r(t),\phi_j)=(f(x,t),\phi_j),\tag{5}$$

$$u_r(0)=u_{0r},u'_r(0)=u_{1r},\tag{6}$$

其中 $u_r(t)=\sum\limits_{j=1}^r\lambda_{jr}(t)\phi_j$.

$$u_{0r}=\sum_{j=1}^r\lambda_{jr}(0)\phi_j\to u_0,\ r\to\infty,\text{在 }\dot{H}^m(\Omega)\cap L^{q+2}(\Omega)\text{ 中}.\tag{7}$$

$$u_{1r}=\sum_{j=1}^r\lambda'_{jr}(0)\phi_j\to u_1,\ r\to\infty,\text{在 }L^2(\Omega)\text{ 中}.\tag{8}$$

根据常微分方程的存在性定理知,$u_r(t)$ 在区间$[0,t_r]$上存在.下面对 $u_r(t)$ 在各种范数下进行估计.

(5) 式两边同乘以 $\lambda'_{jr}(t)$,并对 j 从 1 到 r 求和得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\|u_{rt}(t)\|_2^2+J(u_r(t))\right]+\|u_{rt}(t)\|_{p+2}^{p+2}=\int_E f(x,t)u_{rt}(x,t)\mathrm{d}x.\tag{9}$$

对于 $t\in[0,t_r]$,上式两边在$[0,t]$上积分得

$$\frac{1}{2}\|u_{rt}(t)\|_2^2+J(u_r(t))+\int_0^t\|u_{rt}(s)\|_{p+2}^{p+2}\mathrm{d}s=$$
$$\frac{1}{2}\|u_{1r}\|_2^2+J(u_r(0))+\int_0^t\int_E f(x,s)u_{rt}(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\tag{10}$$

由 Hölder 不等式和引理 2 知

$$\left|\int_0^t\int_E f(x,s)u_{rt}(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|\leq\int_0^t\|f(s)\|_{\frac{p+2}{p+1}}\|u_{rt}(s)\|_{p+2}\mathrm{d}s\leq$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t\|u_r(s)\|_{p+2}^{p+2}ds+\frac{1}{2}\int_0^t\|f(s)\|_{\frac{p+2}{p+1}}^{\frac{p+2}{p+1}}\mathrm{d}s.\tag{11}$$

由(10)和(11)得

$$\frac{1}{2}\|u_{rt}(t)\|_2^2+J(u_r(t))+\frac{1}{2}\int_0^t\|u_{rt}(s)\|_{p+2}^{p+2}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\|u_{1r}\|_2^2+J(u_r(0))+\frac{1}{2}\int_0^t\|f(s)\|_{\frac{p+2}{p+1}}^{\frac{p+2}{p+1}}\,\mathrm{d}s.$$

由式(7)、(8)以及假设 H_2 有

$$\frac{1}{2}\|u_{rt}(t)\|_2^2+J(u_r(t))+\frac{1}{2}\int_0^t\|u_{rt}(s)\|_{p+2}^{p+2}\,\mathrm{d}s\le C. \tag{12}$$

其中 C 是一个正常数.

由此可见，解的存在区间$[0,t_r]$可以延拓到$[0,T]$，不等式(12)意味着，当 $r\to\infty$ 时，

$$\{u_r\}\text{ 在 }L^\infty(0,T;\dot{H}^m(\Omega)\cap L^{q+2}(\Omega))\text{ 中有界；} \tag{13}$$

$$\{u_{rt}\}\text{ 在 }L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\text{ 中有界；} \tag{14}$$

$$\{u_{rt}\}\text{ 在 }L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))\text{ 中有界；} \tag{15}$$

$$\{Au_r\}\text{ 在 }L^\infty(0,T;H^{-m}(\Omega))\text{ 中有界.} \tag{16}$$

现在来估计$\{u_{rtt}\}$，由于作近似解的 Galerkin 基也在 $\dot{H}^m$ 中，所以应用文献[11]中所述的映射原理，从近似方程(5)和估计(13)～(16)可得

$$\{u_{rtt}\}\text{ 在 }L^{p+2}(0,T;H^{-m}(\Omega))\text{ 中有界.} \tag{17}$$

根据(13)～(16)知，$\{u_r(t)\}$存在一个子列，为方便起见，子列仍记为$\{u_r(t)\}$，使得

$$u_r\rightharpoonup u\text{ 在 }L^\infty(0,T;\dot{H}^m(\Omega)\cap L^{q+2}(\Omega))\text{ 中弱 * 收敛；} \tag{18}$$

$$u_{rt}\rightharpoonup u_t\text{ 在 }L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\text{ 中弱 * 收敛；} \tag{19}$$

$$u_{rt}\rightharpoonup u_t\text{ 在 }L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))\text{ 中弱收敛；} \tag{20}$$

$$Au_r\rightharpoonup Au\text{ 在 }L^\infty(0,T;H^{-m}(\Omega))\text{ 中弱 * 收敛；} \tag{21}$$

$$|u_{rt}|^p u_{rt}\rightharpoonup\chi_1\text{ 在 }L^{\frac{p+2}{p+1}}\left(0,T;L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)\right)\text{ 中弱收敛；} \tag{22}$$

$$|u_r|^q u_r\rightharpoonup\chi_2\text{ 在 }L^\infty\left(0,T;L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)\right)\text{ 中弱 * 收敛.} \tag{23}$$

由(13)和(14)并应用 J. L. lions-Aubin 紧性引理得

$$u_r\to u\text{ 在 }L^2(0,T;L^2(\Omega))\text{ 中强收敛.} \tag{24}$$

因为 $H^m\to L^{p+2}(\Omega)$ 紧，于是由(15)和(17)有

$$u_{rt}\to u_t\text{ 在 }L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))\text{ 中强收敛.} \tag{25}$$

由式(7)、(8)、(24)和(25)知：$u(0,x)=u_0(x)$，$u_t(0,x)=u_1(x)$.

对于任意的 $v\in\dot{H}^m(\Omega)$，由上述收敛性，当 $r\to\infty$ 时，在近似方程

$$(u_{rtt}(t),v)+(Au_r(t),v)+(|u_{rt}(t)|^p u_{rt}(t),v)+(|u_r(t)|^q u_r(t),v)=(f(x,t),v),$$

两边取极限得

$$(u_{tt}(t),v)+(Au(t),v)+(\chi_1,v)+(\chi_2,v)=(f(x,t),v).$$

下面证明 $\chi_1=|u_t|^p u_t$，$\chi_2=|u|^q u$.

由(13)和(24)知，

$$\int_0^T\int_E\left||u_r|^q u_r\right|^{\frac{q+2}{q+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\|u_r(t)\|_{q+2}^{q+2}\,\mathrm{d}t\le C;$$

且 $|u_r|^q u_r\to|u|^q u$ 在$[0,T]\times\Omega$上几乎处处收敛. 因此，由 J. L. lions[11] 的引理 3 得

$$|u_r|^q u_r\rightharpoonup|u|^q u\text{ 在 }L^{\frac{q+2}{q+1}}\left(0,T;L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)\right)\text{ 中弱收敛.} \tag{26}$$

由(18)和(26)有 $\chi_2=|u|^q u$；同理可证 $\chi_1=|u_t|^p u_t$. 故定理 1 成立.

参 考 文 献

[1] Dell'Oro F, Pata V. Long-time analysis of strongly damped nonlinear wane equations[J]. Nonlinearity, 2011, 24(12): 3413-3435.

[2] Alves C O, Cavalcant M M. On existence, uniform decay rates and blow-up for solutions of the 2-D wave equation with exponential source[J]. Calculus of V ariations and Partial Differential Equations, 2009, 34(3): 377-411.

[3] Rammaha M A. The influence of damping and source terms on solutions of nonlinear wave equations[J]. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemtaica, 2007, 25(1/2): 77-90.

[4] Todorova G. Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source term[J]. J Math Anal and App, 1999, 239: 213-226.

[5] Wahl W V. Regular solutions of initial-boundary value problems for linear and nonlinear wave equations[J]. Manuscript Math, 1974, 13: 187-206.

[6] Pecher H. L^p-Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlinear wellengleichungen[J]. Math Z, 1976, 150: 159-183.

[7] Ye Y J. Existence and asymptotic behavior of global solutions for a class of nonlinear higher-order wave equation[J]. J Inequal Appl, 2010 (3): 1-14.

[8] Whal W V. Periodic solutions of nonlinear wave equations with a dissipative term[J]. Math Ann, 1971, 190: 313-322.

[9] Ye Y J. Existence and decay estimate of global solutions to systems of nonlinear wave equations with damping and source terms[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013(4): 1-9.

[10] Piskin E Polat N. Global existence, decay and blow-up solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms [J]. Turkish Journal of Mathematics, 2013, 30(1): 1-19.

[11] Lions J L. Quelqes méthodes de résolution de problèmes aux limites nonlinéaires[M] Paris: Dound-Gauthier Villars, 1969.

Existence and Asymptotic Property of Global Solutions for Some Nonlinear Wave Equation with Nonlinear Damping Term

WANG Jianping[1], ZHANG Xiangwei[2]

(1. College of Information and Management Science, Henan Agricultural University, Zhengzhou 450046, China;
2. Department of Mathematics, Zhengzhou Normal College, Zhengzhou 450044, China)

Abstract: In this paper, under suitable hypotheses on the operator and nonlinear term we study the initial boundary value problem for the nonlinear wave equation of higher order with damping and source terms. Using the Holder inequality, Young inequality and Gronwall inequality, by the classical Galerkin's method we establish the global existence of solution via verifying the compactness.

Keywords: damping term; nonlinear wave equation; initial boundary value problem; global solutions