文章编号:1000－2367(2017)05－0081－06　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2017.05.014

一类具有 Machaelis-Menten 型功能性反应的非自治阶段结构捕食系统

梁桂珍[1]，宋鸽[1,2]

(1.新乡学院 数学与信息科学学院,河南 新乡 453003;2.郑州大学 数学与统计学院,郑州 450000)

摘　要:研究了捕食者具有阶段结构和 Machaelis-Menten 型功能性反应的捕食者－两竞争食饵系统.利用比较定理讨论了系统的一致持久性和灭绝性.此外,当系统是周期系统时,通过 Brouwer 不动点定理和构造 Lyapunov 函数,得到了系统正周期解的存在性和全局稳定的充分条件.最后,通过数值模拟来验证结论的正确性.

关键词:阶段结构;时滞;Machaelis-Menten 型功能性反应;持久性;周期性

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A

种群动力学是生物数学理论的重要分支,研究种群动力学对自然生态中控制种群数量,种群收获指导,濒危物种的保护等方面有着很重要的实际意义.自然界中的物种都不是孤立存在的,而是与其他的物种有着密不可分的联系.种群之间的关系基本上可以分为以下 3 种:捕食与被捕食、竞争和合作互惠.而其中的捕食一食饵系统是现代生态学研究的主要课题.早在 20 世纪后期,我国的学者已经研究了具有功能性反应函数的捕食系统,讨论了系统平衡点的存在性和稳定性.对于具有 Machaelis-Menten 型功能性反应的食饵一捕食者系统虽然已经有了不少研究[1-4],但是在研究工作中涉及竞争、时滞和阶段结构的问题尚不多见.受文献[4]的影响,在文献[5]的基础上,引入了时滞,讨论如下的具有竞争关系的食饵和具有阶段结构和时滞的捕食者的非自治食饵一捕食者系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)\left(r_1(t)-b_1(t)x_1(t)-e_1(t)x_2(t)-\dfrac{c_1(t)y_2(t)}{\alpha_1(t)y_2(t)+x_1(t)}\right),\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)\left(r_2(t)-b_2(t)x_2(t)-e_2(t)x_1(t)-\dfrac{c_2(t)y_2(t)}{\alpha_2(t)y_2(t)+x_2(t)}\right),\\ \dot{y}_1(t)=a_1(t)y_2(t)-d_1(t)y_1(t)-a_1(t-\tau_1)y_2(t-\tau_1)\,\mathrm{e}^{-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(s)\mathrm{d}s},\\ \dot{y}_2(t)=a_1(t-\tau_1)y_2(t-\tau_1)e^{-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(s)\mathrm{d}s}-d_2(t)y_2(t)-b_3(t)y_2{}^2(t)+\\ \qquad\dfrac{f_1(t)x_1(t-\tau_2)y_2(t)}{\alpha_1(t)y_2(t-\tau_2)+x_1(t-\tau_2)}+\dfrac{f_2(t)x_2(t-\tau_3)y_2(t)}{\alpha_2(t)y_2(t-\tau_3)+x_2(t-\tau_3)},\end{cases}\tag{1}$$

其中参数 $x_1(t)$,$x_2(t)$ 表示两类具有竞争关系的食饵在 t 时刻的种群密度,$y_1(t)$,$y_2(t)$ 分别代表捕食者种群 t 时刻在幼年期和成熟期的种群密度,并且假设幼年时期的捕食者无捕食能力,$r_i(t)$,$b_i(t)(i=1,2)$ 代表食饵种群的内禀增长率、种内密度制约,$e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 代表两类食饵种群之间的竞争率,$d_1(t)$,$d_2(t)$ 分别代表捕食者在幼年期和成熟期的种群死亡率,$\dfrac{c_i(t)y_2(t)}{\alpha_i(t)y_2(t)+x_i(t)}(i=1,2)$ 是捕食者捕食能力的 Machaelis-Menten 型功能性反应.时滞 $\tau_i(i=1,2,3)$ 为固定的正常数,在这里记 $\tau=\max\{\tau_i(i=1,2,3)\}$.

收稿日期:2016-12-21;**修回日期**:2017-06-25.

基金项目:河南省科技厅科技攻关项目(132102310482);河南省高等学校重点科研项目(16A110021);新乡学院科技创新项目(12ZB17).

作者简介(通信作者):梁桂珍(1964－),女,内蒙古临河人,新乡学院教授,研究方向为生物数学,E-mail:lgz3361@163.com.

$a_1(t),r_i(t),c_i(t),d_i(t),e_i(t),f_i(t),\alpha_i(t)$ 和 $b_j(t)(i=1,2,j=1,2,3)$ 都是连续有界的正函数,即当 $t\in[-\tau,+\infty)$ 时,有:$0<g^L\triangleq\inf\limits_{t\in[-\tau,+\infty)}g(t)\leq g(t)\leq\sup\limits_{t\in[-\tau,+\infty)}g(t)\triangleq g^U<+\infty$.

在本文中,假设系统(1)的初始值 ϕ 满足以下条件:

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)\in C([-\tau,0],\mathbf{R}_+^4),\mathbf{R}_+^4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_i>0(i=1,2,3,4)\}. \tag{2}$$

基于生态学意义,本文只在 $\mathrm{Int}\mathbf{R}_+^4$ 对系统(1)进行相关研究.

由系统(1)的第 3 个方程及初始值 ϕ 的连续性,可以得到:

$$y_1(0)=\int_{-\tau_1}^{0}[a_1(s)y_2(s)\,\mathrm{e}^{-\int_s^0 d_1(s)\mathrm{d}s}]\mathrm{d}s, \tag{3}$$

$$y_1(t)=\int_{t-\tau_1}^{t}[a_1(s)y_2(s)\,\mathrm{e}^{-\int_s^t d_1(s)\mathrm{d}s}]\mathrm{d}s. \tag{4}$$

由(3)、(4)两式可知,$y_1(t)$ 的正性完全由 $y_2(t)$ 决定.因此,可以先研究下面的系统,再根据(3)、(4)式,得出 $y_1(t)$ 的性质.

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)(r_1(t)-b_1(t)x_1(t)-e_1(t)x_2(t)-\dfrac{c_1(t)y_2(t)}{\alpha_1(t)y_2(t)+x_1(t)}),\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)(r_2(t)-b_2(t)x_2(t)-e_2(t)x_1(t)-\dfrac{c_2(t)y_2(t)}{\alpha_2(t)y_2(t)+x_2(t)}),\\ \dot{y}_2(t)=a_1(t-\tau_1)y_2(t-\tau_1)\,\mathrm{e}^{-\int_{t-\tau_1}^t d_1(s)\mathrm{d}s}-d_2(t)y_2(t)-b_3(t)y_2{}^2(t)+\\ \qquad\dfrac{f_1(t)x_1(t-\tau_2)y_2(t)}{\alpha_1(t)y_2(t-\tau_2)+x_1(t-\tau_2)}+\dfrac{f_2(t)x_2(t-\tau_3)y_2(t)}{\alpha_2(t)y_2(t-\tau_3)+x_2(t-\tau_3)}.\end{cases} \tag{5}$$

1 系统的生存性态

引理 1 $\mathbf{R}_+^4$ 是系统(1)满足条件(2)的正向不变集.

证明 设 $(x_1(t),x_2(t),y_2(t))$ 是系统(5)在条件(2)的任意解.由(5)式的前两个方程可知:

$$x_1(t)=x_1(0)\exp(\int_0^t[r_1(s)-b_1(s)x_1(s)-e_1(t)x_2(t)-\frac{c_1(s)y_2(s)}{\alpha_1(s)y_2(s)+x_1(s)}]\mathrm{d}s)>0,$$

$$x_2(t)=x_2(0)\exp(\int_0^t[r_2(s)-b_2(s)x_2(s)-e_2(t)x_1(t)-\frac{c_2(s)y_2(s)}{\alpha_2(s)y_2(s)+x_2(s)}]\mathrm{d}s)>0.$$

结合(2)式可得,当 $t\geq-\tau$ 时,$x_1(t)>0,x_2(t)>0$.

由(2)式得,当 $t\in[0,\tau]$ 时,即 $(t-\tau)\in[-\tau,0]$,则 $y_2(t-\tau)>0$. 由(5)式的第 3 个方程得:$\dot{y}_2(t)\geq-d_2(t)y_2(t)-b_3(t)y_2{}^2(t)$,则有 $y_2(t)\geq y_2(0)\exp\{\int_0^t[-d_2(s)-b_3(s)y_2(s)]\mathrm{d}s\}>0$.

故当 $t\in[0,\tau]$ 时,$y_2(t)>0$. 当 $t\in[\tau,2\tau]$ 时,即 $(t-\tau)\in[0,\tau]$,同理可知,$y_2(t)>0$. 同样的做法,可以证得当 $t\in[0,+\infty)$ 时,$y_2(t)>0$. 再结合(2)式可得,当 $t\geq-\tau$ 时,有 $y_2(t)>0$. 由(4)式可知,当 $t\geq-\tau$ 时,有 $y_1(t)>0$.

综上所述,集合 $\mathbf{R}_+^4$ 是系统(1)的正向不变集.

定义 1 若存在有界紧集 $D\subset\mathrm{Int}\mathbf{R}_+^4$,使得系统(1)的任一正解都将进入并滞留在集合 D 中,则称系统(1)是一致持久的.

定理 1[6] 若 $a>0,b>0,\dot{x}(t)\geq(b-ax(t))x(t)$,且 $x(0)>0$,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf x(t)\geq\dfrac{b}{a}$.

定理 2[6] 若 $a>0,b>0,\dot{x}(t)\leq(b-ax(t))x(t)$,且 $x(0)>0$,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup x(t)\leq\dfrac{b}{a}$.

定理 3[7] 若 $a>0,b>0,c>0,\dot{x}(t)=ax(t-\tau)-bx(t)-cx^2(t)$,且当 $-\tau\leq t\leq0$ 时,$x(t)>0$,则(1) 若 $a>b$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\dfrac{a-b}{c}$;(2) 若 $a<b$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

定理 4(第一比较定理)[8]　设有 Cauchy 问题 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0$；$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y),y(x_0)=y_0$，其中数量值函数 f 与 F 均在域 $G\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 内连续且对 y 满足局部 Lipschitz 条件，$(x_0,y_0)\in G$. 并设上式的解均在区间 (a,b) 内存在，分别记为：$y=y(x)$ 与 $y=Y(x)$. 若 $f(x,y)<F(x,y),\forall(x,y)\in G$，则 $y(x)<Y(x),x_0<x<b,y(x)>Y(x),a<x<x_0$.

定理 5(第二比较定理)[8]　设有 Cauchy 问题 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0$；$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y),y(x_0)=y_0$，其中数量值函数 f 与 F 均在域 $G\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 内连续，满足局部 Lipschitz 条件，$(x_0,y_0)\in G$，并设上式的解均在闭区间 $[a,b]$ 内存在，分别记为：$y=y(x)$ 与 $y=Y(x),a\leq x\leq b$. 若 $f(x,y)\leq F(x,y),\forall(x,y)\in G$，则 $y(x)\leq Y(x),x_0\leq x\leq b,y(x)\geq Y(x),a\leq x\leq x_0$.

定理 6　假设 $(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$ 是系统(1)的任一解且满足条件(2)，当下列条件成立时

$$r_1^L>e_1^UM_2+c_1^U,r_2^L>e_2^UM_1+c_2^U,\tag{6}$$

$$0<d_2^L-f_1^U-f_2^U<a_1^U\exp(-d_1^L\tau_1),\tag{7}$$

$$0<d_2^U-\frac{f_1^Lm_1}{\alpha_1^UM_4+M_1}-\frac{f_2^Lm_2}{\alpha_2^UM_4+M_2}<a_1^L\exp(-d_1^U\tau_1).\tag{8}$$

则系统(1)是持续生存的，其中 $0<M_i^*\leq M_i,0<m_i\leq m_i^*(i=1,2,3,4)$.

$$M_1^*=\frac{r_1^U}{b_1^L},M_2^*=\frac{r_2^U}{b_2^L},M_4^*=\frac{a_1^U\exp(-d_1^L\tau_1)+f_1^U+f_2^U-d_2^L}{b_3^L},m_1^*=\frac{r_1^L-e_1^UM_2-c_1^U}{b_1^U},$$

$$m_2^*=\frac{r_2^L-e_2^UM_1-c_2^U}{b_2^U},m_4^*=\frac{a_1^L\exp(-d_1^U\tau_1)-d_2^U}{b_3^U}+\frac{f_1^Lm_1}{(\alpha_1^UM_4+M_1)b_3^U}+\frac{f_2^Lm_2}{(\alpha_2^UM_4+M_2)b_3^U}.$$

证明　由系统(5)的前两个方程，可知：

$$\dot{x}_1(t)\leq x_1(t)(r_1^U-b_1^Lx_1(t))=x_1(t)b_1^L(M_1^*-x_1(t)),$$

$$\dot{x}_2(t)\leq x_2(t)(r_2^U-b_2^Lx_2(t))=x_2(t)b_2^L(M_2^*-x_2(t)).$$

由定理 2 可知：$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup x_i(t))\leq M_i^*(i=1,2)$，又因为 $0<M_i^*\leq M_i(i=1,2)$，故 $\exists T_1>0$，使得当 $t\geq T_1$ 时，有 $x_1(t)\leq M_1,x_2(t)\leq M_2$.

由(5)式的第 3 个方程，可得：$\dot{y}_2(t)\leq a_1^U\exp(-d_1^L\tau_1)y_2(t-\tau_1)-y_2(t)(d_2^L-f_1^U-f_2^U)-b_3(t)^Ly_2^2(t)$.

由定理 2、定理 3 和比较定理，可知：$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup y_2(t)\leq M_4^*\leq M_4$，故 $\exists T_2>0$，使得当 $t\geq T_2$ 时，有 $y_2(t)\leq M_4$.

故 $\exists T_3=\max\{T_1,T_2\}>0$，使得当 $t\geq T$ 时，有 $x_1(t)\leq M_1,x_2(t)\leq M_2,y_2(t)\leq M_4$.

由(5)式的前两个方程，可得：

$$\dot{x}_1(t)\geq x_1(t)(r_1^L-b_1^Ux_1(t)-e_1^UM_2-c_1^U)=b_1^Ux_1(t)(m_1^*-x_1(t)),$$

$$\dot{x}_2(t)\geq x_2(t)(r_2^L-b_2^Ux_2(t)-e_2^UM_1-c_2^U)=b_2^Ux_2(t)(m_2^*-x_2(t)).$$

由定理 1 可知：$\lim\limits_{t\to+\infty}\inf x_i(t)\geq m_i^*(i=1,2)$，又 $0<m_i\leq m_i^*(i=1,2)$，所以 $\exists T_4>0$，使得当 $t\geq T_4$ 时，有 $x_1(t)\geq m_1,x_2(t)\geq m_2$.

由(5)式的第 3 个方程，可得：

$$\dot{y}_2(t)\geq a_1^L\exp(-d_1^U\tau_1)y_2(t-\tau_1)-y_2(t)(d_2^U-\frac{f_1^Lm_1}{\alpha_1^UM_4+M_1}-\frac{f_2^Lm_2}{\alpha_2^UM_4+M_2})-b_3(t)^Uy_2^2(t).$$

由定理 1、定理 3 和比较定理，可得：$\lim\limits_{t\to+\infty}\inf y_2(t)\}\geq m_4^*$，即 $\exists T_5>0$，使得当 $t\geq T_5$ 时，$y_2(t)\geq m_4$.

因此 $\exists T_6=\max\{T_3,T_4,T_5\}>0$，使得当 $t\geq T_6$ 时，有 $m_1\leq x_1(t)\leq M_1,m_2\leq x_2(t)\leq M_2,m_4\leq y_2(t)\leq M_4$. 再结合(2)、(4) 式，可知当时间 t 充分大时，$\exists m_3>0,M_3>0$，使得 $m_3\leq y_1(t)\leq M_3$.

令 $D=\{(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))\mid m_1\leq x_1(t)\leq M_1,m_2\leq x_2(t)\leq M_2,m_3\leq y_1(t)\leq M_3,m_4\leq y_2(t)\leq M_4(m_i>0,M_i>0,i=1,2,3,4)\}$，由以上的证明过程可知，满足条件(2) 的系统(1) 的任一正解都将进入并最终滞留在集合 D 内，由定义(1)知，系统(1)的是持续生存的.

定理 7 如果系统(1)满足条件(2)、(6)式及下列条件

$$d_2^L > a_1^U \exp(-d_1^L \tau_1) + f_1^U + f_2^U, \tag{9}$$

则食饵种群持续生存,捕食者将灭绝(其中 $m_i, M_i (i = 1,2,3,4)$ 与定理 6 保持一致).

证明 由条件(6)和定理 6 的证明过程可得:$\exists T = \max\{T_1, T_4\} > 0$,使得当 $t \geq T$ 时,有 $m_1 \leq x_1(t) \leq M_1, m_2 \leq x_2(t) \leq M_2$.

由(5)式的第 3 个方程,可得:$\dot{y}_2(t) \leq a_1^U \exp(-d_1^L \tau_1) y_2(t-\tau_1) - y_2(t)(d_2^L - f_1^U - f_2^U) - b_3(t)^L y_2^2(t)$,由定理 2、定理 3、比较定理和(9)式得:$\lim\limits_{t\to+\infty} \sup y_2(t) \leq 0$. 故可取 $M_4^* = 0$,对于充分小的 $\forall \varepsilon > 0$,令 $M_4 = \varepsilon$,可知:$\lim\limits_{t\to+\infty} \inf y_2(t) \geq 0$. 又由于 $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup y_2(t) \leq 0$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$. 由(4)可知:$\lim\limits_{t\to+\infty} y_1(t) = 0$. 证毕.

2 正周期解的存在性和全局稳定性

本节假设系统(1)除了满足条件(2)外,所有系数都是以 ω 为周期的连续有界的正的周期函数,则系统(1)与系统(5)都是 ω 周期系统.

定理 8(Brouwer 不动点定理)[9] 设 B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭单位球,又设 $f: B \to B$ 是一个连续映射,那么映射 f 必有一个不动点 $x \in B$,使得 $f(x) = x$.

定理 9 如果定理 6 中的所有条件都成立,则周期系统(1)至少存在一个正周期解.

证明 设 $A(t,\phi) = (x_1(t,\phi_1), x_2(t,\phi_2), y_1(t,\phi_3), y_2(t,\phi_4))$ 是周期系统(1) 满足条件(2) 的任意一个正解. 由定理 6 的证明过程可以知道,D 是周期系统(1) 的正不变集,显然集合 D 是 $\mathbf{R}_+^4$ 内的有界的、闭的、凸子集. 定义 Poincare 映射 $f: \mathbf{R}_+^4 \to \mathbf{R}_+^4$,且 $f(\theta) = A(\omega,\theta)$,则 $f(\phi) = A(\omega,\phi)$. 因为 $D \subsetneqq \mathbf{R}_+^4$,则 $f(D) \subseteq D$. 由解对初值的连续依赖性可得:$f: D \to D$ 是连续映射. 由定理 8 知,至少存在一点 $a \in D$,满足 $f(a) = a$,即 $A(t,a)$ 是系统(1) 的周期为 ω 的正周期解.

定理 10 如果定理 6 中的所有条件都成立,且有如下的 $A_i > 0, (i = 1,2,3)$ 其中

$$A_1 = b_1^L - e_2^U - \frac{c_1^U M_4 + f_1^U \alpha_1^U M_4}{(\alpha_1^L m_4 + m_1)^2}, A_2 = b_2^L - e_1^U - \frac{c_2^U M_4 + f_2^U \alpha_2^U M_4}{(\alpha_2^L m_4 + m_2)^2},$$

$$A_3 = b_3^L - a_1^U - a_1^U(1 + \frac{1}{m_4})\exp(-d_1^L \tau_1) - \frac{c_1^U M_1 + f_1^U \alpha_1^U M_1}{(\alpha_1^L m_4 + m_1)^2} - \frac{c_2^U M_2 + f_2^U \alpha_2^U M_2}{(\alpha_2^L m_4 + m_2)^2}.$$

则周期系统(1)是全局稳定的.

证明 记 $B_1 = a_1^U(1 + \frac{1}{m_4})\exp(-d_1^L \tau_1), B_2 = \frac{f_1^U \alpha_1^U M_4}{(\alpha_1^L m_4 + m_1)^2}, B_3 = \frac{f_1^U \alpha_1^U M_1}{(\alpha_1^L m_4 + m_1)^2}, B_4 = \frac{f_2^U \alpha_2^U M_4}{(\alpha_2^L m_4 + m_2)^2}$, $B_5 = \frac{f_2^U \alpha_2^U M_2}{(\alpha_2^L m_4 + m_2)^2}$. 由定理 9 可知,周期系统(1)至少存在一个周期解,假设 $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ 是周期系统(1) 满足条件(2) 的正的周期解,(x_1, x_2, y_1, y_2),是周期系统(1) 满足条件(2) 的任一正解,则有 $(x_1, x_2, y_1, y_2), (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) \in D (t \geq 0)$.

定义 Lyapunov 函数:

$$V(t) = | \ln x_1 - \ln x_1^* | + | \ln x_2 - \ln x_2^* | + | y_1 - y_1^* | + | \ln y_2 - \ln y_2^* | + B_1 \int_{t-\tau_1}^{t} | y_2(s) - y_2^*(s) | ds + B_2 \int_{t-\tau_2}^{t} | x_1(s) - x_1^*(s) | ds + B_3 \int_{t-\tau_2}^{t} | y_2(s) - y_2^*(s) | ds + B_4 \int_{t-\tau_3}^{t} | x_2(s) - x_2^*(s) | ds + B_5 \int_{t-\tau_3}^{t} | y_2(s) - y_2^*(s) | ds.$$

沿系统(1)计算 $V(t)$ 的上右导数,可得:

$$D^+ V(t) = \mathrm{sign}(x_1 - x_1^*)\{-b_1(t)(x_1 - x_1^*) - e_1(t)(x_2 - x_2^*) - c_1(t)[\frac{y_2}{\alpha_1(t) y_2 + x_1} - \frac{y_2^*}{\alpha_1(t) + y_2^* + x_1^*}]\} + \mathrm{sign}(x_2 - x_2^*)\{-b_2(t)(x_2 - x_2^*) - e_2(t)(x_1 - x_1^*) - c_2(t)[\frac{y_2}{\alpha_2(t) y_2 + x_2} - \frac{y_2^*}{\alpha_2(t) y_2^* + x_2^*}]\} + \mathrm{sign}(y_1 - y_1^*)[a_1(t)(y_2 - y_2^*) - d_1(t)(y_1 - y_1^*) - a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^{t} d_1(s) ds)(y_2(t-\tau_1) -$$

$$y_2^*(t-\tau_1))]+\mathrm{sign}(y_2-y_2^*)\{a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(s)\mathrm{d}s)[\frac{y_2(t-\tau_1)}{y_2}-\frac{y_2^*(t-\tau_1)}{y_2^*}]-$$
$$b_3(t)(y_2-y_2^*)+f_1(t)[\frac{x_1(t-\tau_2)}{\alpha_1(t)y_2(t-\tau_2)+x_1(t-\tau_2)}-\frac{x_1^*(t-\tau_2)}{\alpha_1(t)y_2^*(t-\tau_2)+x_1^*(t-\tau_2)}]+$$
$$f_2(t)[\frac{x_2(t-\tau_3)}{\alpha_2(t)y_2(t-\tau_3)+x_2(t-\tau_3)}-\frac{x_2^*(t-\tau_3)}{\alpha_2(t)y_2^*(t-\tau_3)+x_2^*(t-\tau_3)}]\}+B_1(|y_2-y_2^*|-$$
$$|y_2(t-\tau_1)-y_2^*(t-\tau_1)|)+B_2(|x_1-x_1^*|-|x_1(t-\tau_2)-x_1^*(t-\tau_2)|)+B_3(|y_2-$$
$$y_2^*|-|y_2(t-\tau_2)-y_2^*(t-\tau_2)|)+B_4(|x_2-x_2^*|-|x_2(t-\tau_3)-x_2^*(t-\tau_3)|)+$$
$$B_5(|y_2-y_2^*|-|y_2(t-\tau_3)-y_2^*(t-\tau_3)|)\le -A_1|x_1-x_1^*|-A_2|x_2-x_2^*|-$$
$$d_1^l|y_1-y_1^*|-A_3|y_2-y_2^*|-\frac{a_1^U\exp(-d_1^L\tau_1)}{m_4}|y_2(t-\tau_1)-y_2^*(t-\tau_1)|+D_1.$$

其中，当 $y_2\ge y_2^*$ 时，$D_1=a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)(\frac{y_2(t-\tau_1)}{y_2}-\frac{y_2^*(t-\tau_1)}{y_2^*})\ge a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)\ \frac{y_2(t-\tau_1)-y_2^*(t-\tau_1)}{y_2^*}$；当 $y_2<y_2^*$ 时，$D_1=a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)(\frac{y_2^*(t-\tau_1)}{y_2^*}-\frac{y_2(t-\tau_1)}{y_2})<a_1(t-\tau_1)\exp(-\int_{t-\tau_1}^{t}d_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma)\ \frac{y_2^*(t-\tau_1)-y_2(t-\tau_1)}{y_2}$. 故 $D_1\le\frac{a_1^U\exp(-d_1^L\tau_1)}{m_4}|y_2(t-\tau_1)-y_2^*(t-\tau_1)|$.

因此，$D^+V(t)\le -A_1|x_1-x_1^*|-A_2|x_2-x_2^*|-d_1^L|y_1-y_1^*|-A_3|y_2-y_2^*|$.

取 $\lambda=\min\{A_1,A_2,A_3,d_1^L\}>0$，则有：

$$D^+V(t)\}\le -\lambda(|x_1-x_1^*|+|x_2-x_2^*|+|y_1-y_1^*|+|y_2-y_2^*|). \tag{10}$$

对(10)式两端关于 t 从 0 到 t 进行积分，可得：

$$\int_0^{+\infty}(|x_1-x_1^*|+|x_2-x_2^*|+|y_1-y_1^*|+|y_2-y_2^*|)\mathrm{d}t\le\frac{V(0)-V(+\infty)}{\lambda}\le\frac{V(0)}{\lambda}<+\infty.$$

由文献[10]中引理 2 可知，$\lim\limits_{t\to+\infty}(|x_1-x_1^*|+|x_2-x_2^*|+|y_1-y_1^*|+|y_2-y_2^*|)=0$.

所以，周期系统(1)的正周期解是全局稳定的.

3 数值模拟

本节将通过数值模拟来验证定理 9 结论的正确性，为此，构建如下的系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)(5+\cos t-2x_1(t)-0.3x_2(t)-\dfrac{(1+0.5\sin t)y_2(t)}{(3.5+0.5\sin t)y_2(t)+x_1(t)}),\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)(4+\sin t-2x_2(t)-0.3x_1(t)-\dfrac{(1+0.5\cos t)y_2(t)}{(3.5+0.5\cos t)y_2(t)+x_2(t)}),\\ \dot{y}_1(t)=2y_2(t)-0.1y_1(t)-2y_2(t-0.3)\exp(-0.03),\\ \dot{y}_2(t)=2y_2(t-0.3)\exp(-0.03)-0.7y_2(t)-3y_2{}^2(t)+\\ \qquad\dfrac{(0.1+0.05\sin t)x_1(t-0.1)y_2(t)}{(3.5+0.5\sin t)y_2(t-0.1)+x_1(t-0.1)}+\\ \qquad\dfrac{(0.1+0.05\cos t)x_2(t-0.2)y_2(t)}{(3.5+0.5\cos t)y_2(t-0.2)+x_2(t-0.2)}.\end{cases} \tag{11}$$

显然，系统(11)是以 2π 为周期的周期系统，而且满足定理 9 的所有条件，其中取 $M_1=3.5, M_2=3, M_4=0.7, m_1=0.7, m_2=0.3, m_4=0.4$，有：

$$r_1^L-e_1^UM_2-c_1^U=5-0.9-1.5=2.6>0, r_2^L-e_2^UM_1-c_2^U=3-1.05-1.5=0.45>0,$$
$$0<d_2^L-f_1^U-f_2^U=0.7-0.15-0.15=0.4<a_1^U\exp(-d_1^L\tau_1)=0.970,$$
$$0<d_2^U-\frac{f_1^Lm_1}{\alpha_1^U}M_4+M_1-\frac{f_2^Lm_2}{\alpha_2^UM_4+M_2}=0.7-0.006-0.008=0.686<a_1^L\exp(-d_1^U\tau_1)=0.970.$$

取定初始条件是 $x_1(0)=4.5, x_2(0)=2.5, y_1(0)=2, y_2(0)=2$，运用 MATLAB 软件数值模拟如图 1 所示.

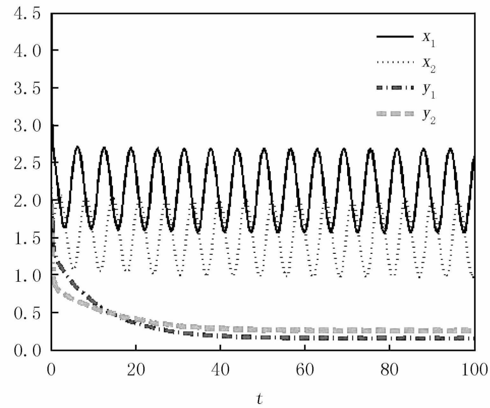

图1 系统(11)正周期解存在性图

从图 1 可知,系统(11)是持久生存的,并且存在一个以 2π 为周期的正周期解,从而验证了定理 9 的正确性.

参 考 文 献

[1] 吴强,高静.一类具有 Machaelis-Menten 响应函数的三种群捕食模型的定性分析[J].徐州师范大学学报(自然科学版),2006(4):27-30,71.

[2] 苟清明,刘学文.具有 Machaelis-Menten 型功能反应的 3 种群捕食者-食饵系统正周期解的存在性[J].四川师范大学学报(自然科学版),2002,25(1):39-41.

[3] 梁桂珍,陈静.一类具有扩散和混合时滞的非自治竞争系统的持久性分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2012,40(5):20-22.

[4] 张莉敏,郑宗剑.一类具有阶段结构和时滞的非自治捕食系统的持久性与周期性[J].北华大学学报(自然科学版),2015,16(2):145-149.

[5] 陈婷,魏凤英.具年龄结构-捕食两竞争食饵生态系统的持久性[J].福建师范大学福清分校学报,2009,94(5):6-10.

[6] 徐瑞,陈兰荪.具有时滞和基于比率的三种群捕食系统的持久性与全局渐进稳定性[J].系统科学与数学,2001,21(2):204-212.

[7] 梁桂珍,李坤.非自治的具有阶段结构和时滞的捕食系统的动力学行为(英)[J].数学杂志,2011,31(3):415-422.

[8] 马知恩,周义仓.常微分方程定性与稳定性方法[M].北京:科学出版社,2013:1-98.

[9] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义[M].北京:北京大学出版社,2012:48.

[10] 陈磊,张建勋.一类非自治一类非自治两捕食者-两互惠食饵系统的持久性和稳定性[J].宁波大学学报(理工版),2012,25(2):63-67.

Nonautonomous Stage-Structured Predator-Prey System with Machaelis-Menten Functional Response

Liang Guizhen[1], Song Ge[1,2]

(1. Department of Mathematics and Information Science, Xinxiang University, Xinxiang 453003, China;

2. Department of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450000, China)

Abstract: In this paper, a predator-and-two-competitive-prey model with stage structure and Machaelis-Menten functional response for predator is investigated. Using comparison theorem, the permanence and extinction of the system are obtained. Further, for the periodic case, a set of sufficient conditions for the existence and global asymptotic stability of a periodic solution is presented through Brouwer theorem and constructing a Lyapunov function. Numerical simulation illustrate the feasible of the main result.

Keywords: stage structure; time delay; Machaelis-Menten functional response; permanence; periodicity

[责任编辑 陈留院]