第 44 卷 第 4 期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 44 No. 4
2016 年 7 月　　Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)　　Jul. 2016

文章编号:1000-2367(2016)04-0001-06　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.04.001

单位球上分数阶 Laplace 方程正解的径向对称性与单调性

窦美霞，李　静

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:首先研究单位球上分数阶 Laplace 方程分布意义下的解与其对应的积分方程等价，然后，基于微分方程与积分方程的等价性，对积分方程运用积分形式的移动平面法证明正解的径向对称性与单调性，从而得到分数阶 Laplace 方程正解的径向对称性与单调性.

关键词:分数阶 Laplacian 算子;积分形式的移动平面法;径向对称性;单调性

中图分类号:O175.5　　**文献标志码**:A

分数阶 Laplacian 算子随着偏微分方程理论的发展，引起了国内外许多数学研究者的广泛关注. 近年来，分数阶 Laplacian 算子得到了广泛的应用，在多种物理现象如:扩散、扰动、水波、波动和动力系统之中有着广泛的应用，同时在概率和金融数学中也起着十分重要的作用[1-4].

分数阶 Laplacian 算子作为一种非局部的伪微分算子，目前已经有了多种等价性的定义[5-7]. 本文采用的定义形式为

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u(x) = C_{n,\alpha}P.V.\int_{\mathbf{R}^n}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中 $0<\alpha<2$，$P.V.$ 代表柯西主值，$u\in L_\alpha\cap C_{loc}^{1,1}(\mathbf{R}^n)$，其中

$$L_\alpha = \{u:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\mid\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)|}{1+|x|^{n+\alpha}}\mathrm{d}x<\infty\}. \tag{2}$$

这样定义中右边的积分有意义,按照这种定义当 $\alpha\to 2$ 时,分数阶 Laplacian 算子与整数阶 Laplacian 算子完全一致. 对于椭圆型方程

$$-\Delta u(x) = |x|^a u^p(x),\quad x\in\Omega. \tag{3}$$

$a=0$ 时，此方程称为 Lane-Emden 方程,Chen 和 Li 已经研究[8]. 研究这些方程解的性质与 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式有着密切的关系,为了寻找不等式的最佳常数,致力于寻找对应泛函的极值,由此得出相应的欧拉－拉格朗日方程. 1981 年,Gidas 和 Spruck 得到了方程(3) 的最佳 Liouville 型定理[9]. 2012 年,Phan 和 Souplet 引入了 Hardy-sobolev 指数:

$$P_s(a) := \frac{n+2+2a}{n-2},$$

当 $n=2$ 时，$P_s(a)=\infty$，并得到了当 $a\in\mathbf{R}$ 时,此方程在全空间上的 Liouville 型定理[10]. 本文要研究的分数阶 Laplace 方程，即是其中的一个特殊情况.

受以上研究的启发，本文尝试把微分方程(3) 推广到分数阶 Laplace 方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x) = \dfrac{1}{|x|^{\gamma}}u^p(x), x\in \boldsymbol{B}_1,\\ u(x)=0, x\in\boldsymbol{B}_1^c.\end{cases} \tag{4}$$

收稿日期:2015-10-03;**修回日期**:2016-05-10.

基金项目:国家自然科学基金(11271111)

第 1 作者简介:窦美霞(1988-),女,河南周口人,河南师范大学硕士研究生,主要从事几何分析的研究,E-mail:meixiadou2009@163.com.

通信作者:李　静(1978-),女,河南安阳人,河南师范大学讲师,主要从事几何分析的研究,E-mail:htulijing@163.com.

其中 $0<\alpha<2$，$\frac{n}{n-\alpha}<p<\infty$，$0<\gamma<\alpha$. 不同于传统的延拓方法，这里不要求 $u(x)$ 有界，显然条件弱了，另外这里的指数 p 是大于 $\frac{n}{n-\alpha}$ 的任一常数，包括了超临界情形，在此条件下研究分布意义下的微分方程与相应的积分方程等价，然后再对积分方程施用移动平面，得到与之类似的正解的径向对称性与单调性.

本文将证明如下定理.

定理 1 假设 u 是微分方程(4) 分布意义下的一个正解，则 u 的某一常数倍是积分方程

$$u(x)=\int_{\mathbf{R}^n}G_1(x,y)\frac{1}{|y|^{\gamma}}u^p(y)\mathrm{d}y \tag{5}$$

的一个解，反之亦然. 其中 $G_1(x,y)=\frac{A_{n,\alpha}}{|x-y|^{n-\alpha}}[1-C_{n,\alpha}I_1(g_1(x,y))]$ 是单位球上的格林函数.

定理 2 对 $\forall\ \frac{n}{n-\alpha}<p<\infty$，$0<\gamma<\alpha$，若 $u\in L^{\frac{n(p-1)}{\alpha}}(\mathbf{R}^n)$，则积分方程(5) 的任意正解 u 关于原点径向对称且沿径向方向单调递减.

1 主要定义及引理

定义 1 给定 $f\in L_{loc}^{1}{}^{1}(\mathbf{R}^n)$，$u\in L_\alpha$. 对于方程 $(-\Delta)^{\alpha/2}u=f(x)$，$x\in\mathbf{R}^n$，当且仅当 $\int_{\mathbf{R}^n}u(-\Delta)^{\alpha/2}\phi\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$，$\forall\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 时，称 u 是微分方程分布意义下的解.

引理 1[11](Hölder 不等式) 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中一区域，假设 $u\in L^p(\Omega)$，$v\in L^q(\Omega)$，其中 $1\leq p,q\leq\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，那么 $\int_\Omega|uv|\mathrm{d}x\leq\|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$.

引理 2[11](推广的 Höölder 不等式) 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域，$1\leq r,s,t\leq\infty$，并且 $\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$，则对任意的 $u\in L^s(\Omega)$ 和 $v\in L^t(\Omega)$，有 $\|uv\|_{L^r(\Omega)}\leq\|u\|_{L^s(\Omega)}\|v\|_{L^t(\Omega)}$.

引理 3[11](Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的等价形式) 设 $\frac{n}{n-\alpha}<p<\infty$，$g\in L^p(\mathbf{R}^n)$，定义 $Tg(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}g(y)\mathrm{d}y$，则有 $\|Tg\|_{L^p}\leq C(n,p,\alpha)\|g\|_{L^{\frac{np}{n+\alpha p}}}$.

引理 4[5] 在 Ω 中，若 $u\in L_\alpha$ 且 $(-\Delta)^{\alpha/2}u\geq 0$，则 u 是 Ω 上的下半连续函数.

引理 5[5] 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界区域，假设 v 在 $\overline{\Omega}$ 是下半连续且满足

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)\geq 0,x\in\Omega,\\ v(x)\geq 0,x\in\Omega^c,\end{cases} \tag{6}$$

则有 $v\geq 0,x\in\Omega$.

若令 $v=w$，和 $v=-w$，则有 $w(x)\equiv 0$. 故有下面的极值原理：

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w(x)=0,x\in\boldsymbol{B}_1,\\ w(x)=0,x\in\boldsymbol{B}_1^c,\end{cases} \tag{7}$$

则有 $w(x)\equiv 0,x\in\mathbf{R}^n$.

在介绍下面引理前首先引入一些记号，定义

$\sum_\lambda=\{x\in\boldsymbol{B}_1(0)\mid x_1<\lambda\}$，$\sum_\lambda^c=\boldsymbol{B}_1(0)\setminus\sum_\lambda$，$x^\lambda=(2\lambda-x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$，$u_\lambda(x)=u(x^\lambda)$.

引理 6[11] (i) 对任意的 $x,y\in\sum_\lambda$，$x\neq y$ 有

$$G_1(x^\lambda,y^\lambda)>\max\{G_1(x^\lambda,y),G_1(x,y^\lambda)\}. \tag{8}$$

$$G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y)>|G_1(x^\lambda,y)-G_1(x,y^\lambda)|. \tag{9}$$

(ii) 对任意的 $x\in\sum_\lambda$，$y\in\sum_\lambda^c$，有

$$G_1(x^\lambda,y) > G_1(x,y). \tag{10}$$

引理 7[11] 对任意的 $x \in \sum_\lambda$，下式成立：

$$u(x)-u_\lambda(x) \le \int_{\Sigma_\lambda} [G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y^\lambda)][\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)-\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y, \tag{11}$$

其中 $\gamma > 0, 1 < p < \infty$.

2 主要结果

定理 1 假设 u 是微分方程(4) 分布意义下的一个正解，则 u 的某一常数倍是积分方程(5) 的一个解，反之亦然.

证明 (i) 满足微分方程(4) 的正解 u 也满足积分方程(5).

令 $v(x) = \int_{\mathbf{R}^n} G_1(x,y)\,\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)dy$，其中格林函数 $G_1(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}G_1(x,y) = \delta(x-y), x,y \in \boldsymbol{B}_1, \\ G_1(x,y) = 0, x,y \in \boldsymbol{B}_1^c.\end{cases} \tag{12}$$

则

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(x) = \frac{1}{|x|^\gamma}u^p(x), x \in \boldsymbol{B}_1, \\ v(x) = 0, x \in \boldsymbol{B}_1^c.\end{cases} \tag{13}$$

令 $w(x) = u(x) - v(x)$，则有

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w(x) = 0, x \in \boldsymbol{B}_1, \\ w(x) = 0, x \in \boldsymbol{B}_1^c.\end{cases} \tag{14}$$

由引理 5 知 $w(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R}^n$，故有 $u(x) = v(x) = \int_{\mathbf{R}^n} G_1(x,y)\,\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)\mathrm{d}y$，即得 u 满足积分方程.

(ii) 满足积分方程(5) 的正解 u 也满足微分方程(4).

当 $x \in \boldsymbol{B}_1$ 时，形式地交换微分与积分算子，有

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x) = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\mathbf{R}^n} G_1(x,y)\,\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^n}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}G_1(x,y)f\,\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)\mathrm{d}y =$$
$$\int_{\mathbf{R}^n}\delta(x-y)\,\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{|x|^\gamma}u^p(x). \tag{15}$$

当 $x \in \boldsymbol{B}_1^c$ 时，由 $G_1(x,y) = 0$，故 $u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} G_1(x,y)\,\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)\mathrm{d}y = 0$，当然 $u = 0$ 也是微分方程的解.

综上，即得 u 也满足微分方程(4).

到此完成了微分方程与积分方程解的等价性的证明.

定理 2 对 $\forall\ \frac{n}{n-\alpha} < p < \infty, 0 < \gamma < \alpha$，若 $u \in L^{\frac{n(p-1)}{\alpha}}(\mathbf{R}^n)$，则积分方程(5) 的任意正解 u 关于原点径向对称且沿径向方向单调递减.

证明 将用积分形式的移动平面法分两步证明此定理，首先引入一些记号，移动的平面 $T_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = \lambda, \lambda \in \mathbf{R}\}$，$\sum_\lambda = \{x \in \boldsymbol{B}_1(0) \mid x_1 \in \lambda\}$，$\widetilde{\sum}_\lambda = \{x^\lambda \mid x \in \sum_\lambda\}$，$\sum_\lambda^c = \boldsymbol{B}_1(0)\setminus\sum_\lambda$，设 $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 关于平面 T_λ 的对称点. 同时引入新函数 $u_\lambda(x) = u(x^\lambda), w_\lambda(x) = u_\lambda(x) - u(x)$，定义 $\sum_\lambda^- = \{x \in \sum_\lambda \mid w_\lambda(x) < 0\}$.

在第 1 步中，确定移动平面的起点，即当 λ 充分接近于 -1，有

$$w_\lambda(x) \ge 0, \text{a.e.}\quad \forall x \in \sum_\lambda. \tag{16}$$

这给提供了沿着 x_1 轴移动平面 T_λ 的一个起始点.

在第 2 步中，沿着 x_1 轴向右连续的移动平面且保持(16) 式成立，导出矛盾，得到极限位置.

第 1 步　当 λ 充分接近于 -1 时,首先通过估计一些积分范数证明 $\sum_\lambda^-$ 是零测集,确定移动平面的起点. 根据引理 6、引理 7、中值定理,对 $\forall x\in\sum_\lambda^-$,有:

$$
\begin{aligned}
u(x)-u_\lambda(x)\le&\int_{\Sigma_\lambda}[G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y^\lambda)][\frac{1}{|y|^\lambda}u^p(y)-\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y=\int_{\Sigma_\lambda^-}[G_1(x^\lambda,y^\lambda)-\\
&G_1(x,y^\lambda)][\frac{1}{|y|^\lambda}u^p(y)-\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y+\int_{\Sigma_\lambda\setminus\Sigma_\lambda^-}[G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y^\lambda)][\frac{1}{|y|^\lambda}u^p(y)-\\
&\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y\le\int_{\Sigma_\lambda^-}-[G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y^\lambda)][\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)-\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y=\\
&\int_{\Sigma_\lambda^-}[G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y^\lambda)][(\frac{1}{|y|^\gamma}u^p(y)-\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y))+(\frac{u^p(y)}{|y^\lambda|^\gamma}-\frac{u^p(y^\lambda)}{|y^\lambda|^\gamma}]\mathrm{d}y\le\\
&\int_{\Sigma_\lambda^-}[G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y^\lambda)][\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y)-\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y\le\\
&\int_{\Sigma_\lambda^-}G_1(x^\lambda,y^\lambda)[\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y)-\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y=\\
&\int_{\Sigma_\lambda^-}G_1(x^\lambda,y^\lambda)\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}[u^p(y)-u^p(y^\lambda)]\mathrm{d}y=\\
&p\int_{\Sigma_\lambda^-}G_1(x^\lambda,y^\lambda)\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}\psi_\lambda^{p-1}(y)[u(y)-u(y^\lambda)]\mathrm{d}y=\\
&p\int_{\Sigma_\lambda^-}G_1(x^\lambda,y^\lambda)\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}|\psi_\lambda^{p-1}(y)||w_\lambda(y)|\mathrm{d}y=\\
&p\int_{\Sigma_\lambda^-}G_1(x^\lambda,y^\lambda)|\tilde g(\psi(y))||w_\lambda(y)|\mathrm{d}y,
\end{aligned}\tag{17}
$$

其中 $\psi_\lambda(y)$ 介于 $u(y^\lambda)$ 与 $u(y)$ 之间，记 $|\tilde g(\psi(y))|=\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma}|\psi_\lambda^{p-1}(y)|$. 公式中第 5 行到第 6 行是因为 $|y|>|y^\lambda|$，又由引理6知，$G_1(x^\lambda,y^\lambda)>G_1(x,y^\lambda)$，故$(G_1(x^\lambda,y^\lambda)-G_1(x,y^\lambda))(\frac{u^p(y)}{|y|^\gamma}-\frac{u^p(y)}{|y^\lambda|^\gamma})<0$. 又因为在 $\sum_\lambda^-$ 上，$w_\lambda(y)<0$，又 $w_\lambda(y)=u_\lambda(y)-u(y)$，故 $u(y^\lambda)=u_\lambda(y)<u(y)$，又 $G_1(x,y^\lambda)>0$，从而公式中第 6 行到第 7 行成立. 由

$$G_1(x,y)=\frac{A_{n,\alpha}}{|x-y|^{n-\alpha}}[1-C_{n,\alpha}I_1(g_1(x,y))],\quad C_{n,\alpha}>0,\quad I_1(g_1(x,y))>0.$$

故有 $1-C_{n,\alpha}I_1(g_1(x,y))<1$. 从而有

$$|G_1(x,\ y)|\le\frac{C}{|x-y|^{n-\alpha}}.\tag{18}$$

因此对 $\forall x\in\sum_\lambda^-$，有

$$0<u(x)-u_\lambda(x)\le C\int_{\Sigma_\lambda^-}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|\tilde g(\psi(y))||w_\lambda(y)|\mathrm{d}y.\tag{19}$$

运用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的等价形式和 Hölder 不等式，可以得出对 $\forall\ \frac{n}{n-\alpha}<q<\infty$，有

$$||w_\lambda||_{L^q(\Sigma_\lambda^-)}\le c||\tilde g(\psi(y))w_\lambda||_{L^{\frac{nq}{n+\alpha q}}(\Sigma_\lambda^-)}\le c||\tilde g(\psi(y))||_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\Sigma_\lambda^-)}||w_\lambda(y)||_{L^q(\Sigma_\lambda^-)},\tag{20}$$

其中 $q=\frac{n(p-1)}{\alpha}$,由于 $p>\frac{n}{n-\alpha}$,可以直接算出 $q>\frac{n}{n-\alpha}$ 和 $w_\lambda\in L^q(\mathbf{R}^n)$. 因为 $u\in L^{\frac{n(p-1)}{\alpha}}(\mathbf{R}^n)$,所以 $\tilde g(\psi(y))\in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbf{R}^n)$. 对充分接近于 -1 的 λ，此时 $\sum_\lambda^-$ 测度很小很小，故有 $c||\tilde g(\psi(y))||_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\Sigma_\lambda^-)}\le\frac{1}{2}$. 则由(20),故有 $||w_\lambda(y)||_{L^q(\Sigma_\lambda^-)}\le\frac{1}{2}||w_\lambda(y)||_{L^q(\Sigma_\lambda^-)}$. 从而得 $||w_\lambda(y)||_{L^q(\Sigma_\lambda^-)}=0$. 因此 $\sum_\lambda^-$ 必为零测

集，从而(16) 得证.

第 2 步　现在连续的向右移动平面 T_λ 且保持(16) 式成立，定义

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda \in (-1,0) \mid w_k(x) \geq 0, x \in \sum\nolimits_k; k \leq \lambda\},$$

将证明 λ_0 必为 0，即有 $w_{\lambda_0}(x) \equiv 0, x \in \sum_{\lambda_0}$，即得极限位置 T_0.

反证　如若不然，设 $\lambda_0 < 0$，首先在 $\sum_{\lambda_0}$ 的内部区域，有：

$$w_{\lambda_0}(x) > 0. \tag{21}$$

根据引理 6、引理 7，有：

$$\begin{aligned} u_{\lambda_0}(x) - u(x) = {} & \int_{\Sigma_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y) - G_1(x, y)] \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y + \int_{\Sigma_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y^\lambda) - G_1(x, y^\lambda)] \frac{u^p(y^\lambda)}{|y^\lambda|^\gamma}\mathrm{d}y + \\ & \int_{\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y) - G_1(x, y)] \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y \geq \int_{\Sigma_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y) - G_1(x^\lambda, y^\lambda)] \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y + \\ & \int_{\Sigma_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y^\lambda) - G_1(x, y^\lambda)] \frac{u^p(y^\lambda)}{|y^\lambda|^\gamma}\mathrm{d}y + \int_{\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y) - G_1(x, y)] \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y = \\ & \int_{\Sigma_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y^\lambda) - G_1(x, y^\lambda)][\frac{1}{|y^\lambda|^\gamma} u^p(y^\lambda) - \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)]\mathrm{d}y + \\ & \int_{\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y) - G_1(x, y)] \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y \geq \\ & \int_{\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y) - G_1(x, y)] \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{22}$$

若(21) 式不成立，则存在点 $x_0 \in \sum_{\lambda_0}$，使得 $u(x_0) = u_{\lambda_0}(x_0)$.

则由(22) 式得 $\int_{\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}} [G_1(x^\lambda, y) - G_1(x, y)] \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y \leq 0$.

由引理 6 可得：

$$\frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y) \equiv 0, \forall y \in \sum\nolimits_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\sum}\nolimits_{\lambda_0}. \tag{23}$$

从而有

$$u(y) \equiv 0, \forall y \in \sum\nolimits_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\sum}\nolimits_{\lambda_0}, \tag{24}$$

对 $\forall x \in \sum_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\sum}_{\lambda_0}$，结合积分方程 $u(x) = \int_{\boldsymbol{B}_1} G_1(x, y) \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y$，有

$$\begin{aligned} 0 \equiv u(x) = \int_{\boldsymbol{B}_1} G_1(x, y) \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y = {} & \int_{\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}} G_1(x, y) \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y + \\ & \int_{\boldsymbol{B}_1 \setminus (\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0})} G_1(x, y) \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{25}$$

故有 $\int_{\boldsymbol{B}_1 \setminus (\Sigma_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\Sigma}_{\lambda_0})} G_1(x, y) \frac{1}{|y|^\gamma} u^p(y)\mathrm{d}y = 0$. 从而有 $u(y) \equiv 0, \forall y \in \boldsymbol{B}_1 \setminus (\sum_{\lambda_0}^c \setminus \tilde{\sum}_{\lambda_0})$.

故对 $\forall y \in \boldsymbol{B}_1$，均有 $u(y) \equiv 0$，这与假设 $u > 0$ 矛盾，因此(21) 式成立.

再由 Lusin 定理，对 $\forall \delta > 0$，存在 $\sum_{\lambda_0}$ 的闭子集 F_δ 且满足 $\mu(\sum_{\lambda_0} \setminus F_\delta) < \delta$，使得 $w_{\lambda_0} \mid F_\delta$ 关于 x 是连续的，因此当 λ 充分接近于 λ_0 时，$w_\lambda \mid F_\delta$ 关于 λ 是连续的. 由(21) 式存在 $\varepsilon > 0$，使得对 $\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$，有 $w_\lambda(x) \geq 0, \forall x \in F_\delta$. 从而对这样的 λ，有 $\mu(\sum_\lambda^-) \leq \mu(\sum_{\lambda_0} \setminus F_\delta) + \mu(\sum_\lambda \setminus \sum_{\lambda_0}) \leq \delta + 2\varepsilon$.

与第 1 步类似的，可选取 δ, ε 充分小，使得 $C \| \tilde{g}(\psi(x)) \|_{L^{\frac{n}{\alpha}}(\Sigma_\lambda^-)} \leq \frac{1}{2}$.

因此由(20) 式，有 $\| w_\lambda(x) \|_{L^q(\Sigma_\lambda^-)} = 0$. 从而 $\sum_\lambda^-$ 必为零测集，即有 $w_\lambda(x) \geq 0$, a. e. $\forall x \in \sum_\lambda, \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$，这便与 λ_0 的定义矛盾，因此 $\lambda_0 = 0$. 由于 x_1 的方向可以任意选取，可得 $u(x)$ 关于原点径向对

称，在移动平面的过程中可得 u 沿径向方向单调递减. 定理 2 得证.

参 考 文 献

[1] Caffarelli L, Silvestre L. An extension equations related to the fractional[J]. Comm in PDE, 2007, 32: 1245-1260.

[2] Ma L, Zhao L. Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation[J]. Arch Ration Mech Anal, 2010, 195: 455-467.

[3] Dancer E N. On the number of positive solutions of weakly nonlinear elliptic equations when parameter is large[J]. Proc London Mat Soc, 1986, 53: 429-452.

[4] Li C, Ma L. Uniqueness of positive bound states to Shr"odinger systems with critical exponents[J]. SIAMJ Appl Anal, 2008, 40: 1049-1057.

[5] Silvestre L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator[J]. Comm Pure Appl Math, 2007, 2: 67-112.

[6] Cabré X, Tan J. Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian[J]. Adv in Math, 2010, 224: 2052-2093.

[7] Guan Q. Integration by parts formula for regional fractional Laplacian[J]. Comm Math Phys, 2006, 266: 289-329.

[8] Chen W X, Li C M. An integral system and the Lane-Emden conjecture[J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2009, 24: 1167-1184.

[9] Gidas B, Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1981, 34: 525-598.

[10] Phan Q H, Souplet P. Liouville-type theorems and bounds of solutions of Hardy-Hénon equations[J]. Diff Equ, 2012, 252: 2544-2562.

[11] Chen W X, Li C M. Methods on Nonlinear Elliptic Equations[M]. Wilmington: AIMS, 2010.

Radial Symmetry and Monotonicity of the Fractional Laplacian Equation in the Unit Ball

DOU Meixia, LI Jing

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: This paper investigates radial symmetry and monotonicity of the fractional Laplacian equation in the unit ball. Firstly, we show the equivalence between the differential equation and the integral equation. Based on the equivalence, we prove the radial symmetry and monotonicity by using the moving planes approach to the integral equation, and we also get the radial symmetry and monotonicity of the fractional Laplacian equation.

Keywords: fractional Laplacian operator; the moving planes method in integral equation; radial symmetry; monotonicity