

## 专栏:基于 Lyapunov 方法的控制器设计与应用

【特约主持人】孟德元:国家自然科学基金优秀青年科学基金获得者

【主持人按语】控制理论是工程学与数学的跨领域分支,主要研究有输入信号的动力系统行为,现代控制理论是以状态空间概念为基础,利用数学方法和计算机辅助来进行复杂控制系统分析与综合的理论,适用于多输入-多输出系统,并能够处理其时变或非线性特性,已被广泛应用于航空航天、军事、通信等领域。目前,对于现代控制理论的研究往往从具体系统和一般系统两个角度展开。首先,航天器网络的姿态系统作为具体系统,是现代控制理论的研究热点之一,探索如何实现航天器网络的全局姿态同步具有重要的实际意义和研究价值。在论文《航天器网络基于四元数表征的全局姿态同步》中,针对具有任意初始姿态的航天器网络,作者提出了两类基于四元数表征的全局姿态同步协议,并基于四元数标量/矢量 Lyapunov 能量函数证实了这两类同步协议的有效性。其次,科学研究中的众多难题往往能够简化为以线性方程组为代表的一般系统的求解问题,例如分数阶积分微分方程、机器人的控制方案设计等。在论文《一类扰动线性方程组的迭代学习控制求解方法》中,作者基于迭代学习控制的思想,通过 Lyapunov 方法设计状态反馈控制器,获得一类系数矩阵中含有扰动的线性方程组的近似解,为一般系统的求解提供可行思路。

# 航天器网络基于四元数表征的全局姿态同步

孟德元,伞扬,张凡

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院,北京 100191)

**摘要:**针对航天器网络中的全局姿态同步问题,提出了两类基于四元数表征的同步协议。基于对四元数标量初值的预处理,第一类航天器姿态协议仅利用其四元数的矢量部分,能够在任意初始物理姿态情况下实现航天器姿态在数学意义下的全局同步。进一步,第二类航天器姿态协议通过融入航天器姿态的实时四元数标量符号,不仅能够避免对其标量部分进行单独分析,而且能够保证航天器姿态实现物理意义下的全局同步。通过航天器网络的仿真分析,验证了两类协议在任意初始物理姿态下的全局姿态同步效果。

**关键词:**航天器网络;四元数;姿态同步;全局同步

**中图分类号:**V448.22

**文献标志码:**A

自 20 世纪 90 年代以来,随着小卫星技术的发展,以小卫星编队为代表的航天器网络逐渐成为姿态控制问题的研究热点。航天器网络通常由空间上呈现一定构型的多个航天器构成<sup>[1]</sup>。为实现特定的合作目标,航天器网络的姿态协同至关重要,其中姿态同步是姿态协同中的重要研究部分<sup>[2]</sup>。如深空探测中,航天器网络中的遥测设备等有效载荷需指向同一方向,才能实现完整的信息采集;交会对接时,主从航天器的姿态同步

收稿日期:2021-11-05;修回日期:2022-01-17.

基金项目:国家自然科学基金(62273018;61922007;61873013)

作者简介(通信作者):孟德元(1982-),男,山东曲阜人,北京航空航天大学教授,博士,研究方向为网络系统控制、迭代学习控制等,E-mail:dymeng@buaa.edu.cn.

是安全对接的必要条件<sup>[3]</sup>.因此,探索如何实现航天器网络的姿态同步具有重要的实际意义和研究价值.

对于航天器网络的全局姿态同步,如何合理表征各航天器的姿态是关键问题之一.常用的姿态表征方法主要有旋转矩阵、欧拉角和四元数.文献[4—5]使用旋转矩阵法表征姿态信息,但这种方法参数量大,计算复杂,且9个参数内含冗余信息.文献[6]中提出在大角度机动中,欧拉角法可能会因为旋转角度特殊而出现奇点.与以上两种方法相比,四元数法表征参数少,不存在奇点问题,因而在全局姿态表征方面具有天然优势.然而,四元数在表征姿态中存在着非唯一映射的问题,即同一个物理姿态可以映射为一对共轭四元数,导致全局姿态同步协议设计和分析上的困难<sup>[7]</sup>.

另一个关键问题是如何设计姿态协议实现全局姿态同步.由于四元数处于非欧氏空间,且利用四个参数表征三维空间的指向信息,若同步协议设计不当可能出现“非同步陷阱”,即仅矢量部分收敛,而标量部分不收敛,从而姿态并未实现同步.文献[8—9]针对航天器网络,构造基于四元数矢量的控制协议,仅能实现矢量部分的收敛,但未考虑四元数标量的收敛.文献[10]利用四元数的矢量和标量相除设计控制协议,虽然成功地将拓扑结构放宽到非结构平衡的强连通图,但对于初始姿态仅能得到几乎全局同步.因此,构造全局姿态同步协议仍具有挑战性.

受上述已有工作的启发,本文提出了两类基于四元数表征的姿态同步协议,实现强连通航天器网络的全局姿态同步.第一类协议仅使用四元数的矢量部分,对四元数标量初值进行非负处理,然后分别对标量部分和矢量部分的演化进行分析,得到数学意义下的姿态同步结果.第二类协议进一步引入实时四元数标量符号,避免对标量部分的单独分析,最终得到更一般性的物理意义下的姿态同步结论.最后通过仿真分析,验证了两类协议在任意初始物理姿态下的姿态同步效果.

## 1 预备知识

### 1.1 网络拓扑

网络拓扑是研究航天器网络的基础,描述了各航天器之间的通信连接方式.网络拓扑可以利用有向图  $G = \{N, E, A\}$  进行描述,其中  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  表示  $n$  个航天器的集合,  $E \subseteq N \times N$  表示代表通信与感知的边的集合,  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示  $G$  的邻接矩阵.有向边  $(j, i) \in E$  表示航天器  $j$  是航天器  $i$  的邻居,此时  $a_{ij} = 1 (i \neq j)$ , 否则,  $a_{ij} = 0$ .航天器  $i$  的所有邻居节点构成的集合定义为  $N_i = \{j : j \in N \text{ 且 } (j, i) \in E\}$ .如果从航天器  $i$  到航天器  $j$  之间存在有向边的序列,那么这个序列称为有向路径.如果任意一个航天器均存在到达其他航天器的有向路径,则称有向图  $G$  是强连通.相应的拉普拉斯矩阵定义为  $L = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 其中对于  $i \neq j$ ,  $l_{ij} = -a_{ij}$ , 否则, 对于  $i = j$ ,  $l_{ii} = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ .

### 1.2 姿态表征

四元数  $(\epsilon, \mathbf{q}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  是一种基于欧拉旋转定理的姿态表征方式.欧拉旋转定理是指刚体绕定点的任意有限转动可由绕过该点的某根轴的一次转动实现.具体来说,四元数的具体定义如下<sup>[11]</sup>:

$$\epsilon = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \mathbf{q} = \mathbf{e} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (1)$$

其中单位矢量  $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^3$  表示欧拉轴,  $\varphi \in \mathbf{R}$  表示绕  $\mathbf{e}$  旋转的欧拉角.根据(1)式,可得单位约束如下:

$$\epsilon^2 + \mathbf{q}^\top \mathbf{q} = 1. \quad (2)$$

**注 1** 根据(1)和(2)式,可知  $(\epsilon, \mathbf{q})$  和  $(-\epsilon, -\mathbf{q})$  表示相同的物理姿态,因此相同的四元数表示相同的物理姿态,而相同的物理姿态可以表示为不同的四元数.根据如上表述,在下一节中对同步问题进行分类考虑.

## 2 问题描述

考虑由  $n$  个航天器组成的航天器网络,根据四元数定义,可以得到第  $i$  个航天器的姿态运动学为<sup>[11]</sup>:

$$\dot{\epsilon}_i(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_i^\top(t) \boldsymbol{\omega}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_i(t) \times \boldsymbol{\omega}_i(t) + \frac{1}{2} \epsilon_i(t) \boldsymbol{\omega}_i(t), \quad (3)$$

其中,  $\epsilon_i(t)$  和  $\mathbf{q}_i(t)$  分别为本体系相对于惯性系的四元数标量和矢量,  $\boldsymbol{\omega}_i(t)$  为本体系相对于惯性系的旋转

角速度在本体系上的投影,  $\times$  表示矢量叉乘运算。

根据姿态运动学(3)式,本文的目标为设计关于  $\boldsymbol{\omega}_i(t)$  的姿态同步协议,对于任意初始物理姿态,实现基于强连通拓扑的航天器网络的姿态同步.具体来讲,分为如下两个目标:

(a)数学意义下的姿态同步:当时间趋于无穷时,强连通网络下所有航天器的四元数  $(\boldsymbol{\epsilon}_i, \boldsymbol{q}_i)$  最终达到一致,即对于任意  $i \in N$  和  $j \in N$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\boldsymbol{\epsilon}_i(t) - \boldsymbol{\epsilon}_j(t)| = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{q}_i(t) - \boldsymbol{q}_j(t)\| = 0. \quad (5)$$

(b)物理意义下的姿态同步:当时间趋于无穷时,强连通网络下所有航天器的物理姿态最终达到同步,即对于  $i \in N$  和  $j \in N$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t))\boldsymbol{q}_i(t) - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t))\boldsymbol{q}_j(t)\| = 0, \quad (6)$$

其中,对于任意  $x \in \mathbf{R}$ ,符号函数定义为:如果  $x \geq 0$ ,则  $\operatorname{sgn}(x) = 1$ ,否则  $\operatorname{sgn}(x) = -1$ .

**注2** 根据单位约束(2)和(6)式,可以进一步得到两种结果:(I)  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\boldsymbol{\epsilon}_i(t) - \boldsymbol{\epsilon}_j(t)| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{q}_i(t) - \boldsymbol{q}_j(t)\| = 0$ , (II)  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\boldsymbol{\epsilon}_i(t) + \boldsymbol{\epsilon}_j(t)| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{q}_i(t) + \boldsymbol{q}_j(t)\| = 0$ . 其中,(I)即为目标(a),(II)中虽然四元数未收敛到一致,但是根据单位约束(2),其仍然表示相同的物理姿态。

**注3** 需要注意的是,尽管四元数遵循单位约束(2),但是目标(a)中仅根据(5)式,并不能得到(4)式,因此(4)和(5)式必须同时成立,否则可能导致所谓的“非同步陷阱”,即仅矢量部分收敛,而标量部分不收敛。

### 3 主要结果

本节分别给出基于初始四元数标量符号的控制协议和基于实时四元数标量符号的控制协议,并分别证明了在相应控制协议下航天器网络最终能够达到姿态同步。

#### 3.1 基于初始四元数标量符号的协议设计

首先,给出基于初始四元数标量符号的同步协议:

$$\boldsymbol{\omega}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\boldsymbol{q}_j(t) - \boldsymbol{q}_i(t)). \quad (7)$$

在此控制协议的基础上,对四元数标量进行分析,进而推导出航天器网络的全局姿态同步结果。

##### 3.1.1 四元数标量分析

在对航天器四元数进行分析时,根据单位限制(2)可知,四元数会出现非唯一映射问题.为解决这一问题,本节给出一个强连通拓扑下有关四元数映射唯一性的引理.该引理说明了四元数映射的唯一性与标量初值之间的关系。

**引理1** 针对由  $n$  个航天器组成的强连通网络(3),采用同步协议(7),如果所有航天器四元数标量均满足  $\epsilon_j(0) \geq 0$ ,则对于  $t > 0$ ,有  $\epsilon_i(t) \geq 0, \forall i \in N$ .

**证明** 假定  $k(t)$  为  $t$  时航天器网络中标量最小的航天器编号,即

$$\epsilon_{k(t)}(t) = \min_{i \in N} \{\epsilon_i(t)\}, \quad (8)$$

则有  $\epsilon_{k(t)}(t) \leq \epsilon_j(t), \forall j \in N_{k(t)}$ . 进而,可知  $\epsilon_{k(t)}(t)$  为连续分段可导函数.根据(2)和(8)式可得

$$\boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_{k(t)}(t) \geq \boldsymbol{q}_j^T(t) \boldsymbol{q}_j(t), \forall j \in N_{k(t)}. \quad (9)$$

当  $\epsilon_{k(t)}(t)$  导数存在时,有  $\dot{\epsilon}_{k(t)}(t) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{\omega}_{k(t)}(t)$ . 由(7)式,可得:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{k(t)}(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{j \in N_{k(t)}} a_{k(t)j} (\boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_j(t) - \boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_{k(t)}(t)) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j \in N_{k(t)}} (\boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_j(t) - \boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_{k(t)}(t)). \end{aligned}$$

进而可得:  $\dot{\epsilon}_{k(t)}(t) = \frac{1}{4} \sum_{j \in N_{k(t)}} (\boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_{k(t)}(t) + \boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_{k(t)}(t) - 2\boldsymbol{q}_{k(t)}^T(t) \boldsymbol{q}_j(t))$ . 再根据(9)式,可以得到

$$\dot{\epsilon}_{k(t)}(t) \geq \frac{1}{4} \sum_{j \in N_{k(t)}} (\mathbf{q}_{k(t)}^T(t) \mathbf{q}_{k(t)}(t) + \mathbf{q}_j^T(t) \mathbf{q}_j(t) - 2\mathbf{q}_{k(t)}^T(t) \mathbf{q}_j(t)). \text{ 进一步, 可知 } \dot{\epsilon}_{k(t)}(t) \geq \frac{1}{4} \sum_{j \in N_{k(t)}} \|\mathbf{q}_{k(t)}(t) - \mathbf{q}_j(t)\|^2 \geq 0.$$

由此可得, 当  $\dot{\epsilon}_{k(t)}(t)$  存在时, 则  $\dot{\epsilon}_{k(t)}(t) \geq 0$ . 由于  $\epsilon_{k(t)}(t)$  为连续函数, 且  $\epsilon_{k(t)}(t)$  的不可导点构成零测度集, 根据文献[12]的连续归纳法, 可得对  $t \geq 0$ , 有  $\epsilon_{k(t)}(t) \geq \epsilon_{k(t)}(0)$ . 由(8)式可知, 如果对于任意航天器  $i$ , 均存在  $\epsilon_i(0) \geq 0$ , 则对  $t \geq 0$  必有  $\epsilon_i(t) \geq 0$ , 引理1得证.

**注4** 根据引理1, 如果所有航天器均符合  $\epsilon_i(0) \geq 0$ , 则同步协议(7)可以保证所有的四元数标量始终保持非负. 考虑单位限制(2), 若已知四元数的矢量, 则可以唯一确定对应的标量数值, 这样即可避免“非同步陷阱”. 另外, 根据四元数定义(1),  $\epsilon_i(0) \geq 0$  可以映射所有物理姿态, 即可进行全局姿态表征.

### 3.1.2 数学意义下的姿态同步分析

本节对强连通拓扑下航天器网络的姿态同步进行分析, 首先给出关于强连通拓扑的一个引理.

**引理2**<sup>[13]</sup> 针对由  $n$  个航天器组成的强连通网络(3), 存在  $\mathbf{p} = [p_i] \in \mathbf{R}^n$ , 其中  $p_i > 0, \forall i \in N$ , 使得

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} p_i a_{ij} \mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_i(t) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_j} p_i a_{ij} \mathbf{q}_j^T(t) \mathbf{q}_j(t). \quad (10)$$

引理1和引理2给出了在强连通拓扑下网络中航天器四元数标量和矢量的性质. 要证明航天器网络的全局姿态同步, 还需对整个时域上航天器四元数的一致性进行分析. 进一步, 给出基于初始四元数标量符号的协议设计的定理:

**定理1** 针对由  $n$  个航天器组成的强连通网络(3), 对于任意初始物理姿态, 如果  $\epsilon_i(0) \geq 0$ , 且采用同步协议(7), 所有航天器的四元数表征最终趋于一致, 实现全局同步, 即(4)和(5)式成立.

**证明** 考虑以下能量函数:

$$V(t) = \sum_{i \in N} p_i (2 - 2\epsilon_i(t)). \quad (11)$$

对(11)式中的能量函数求导, 并考虑姿态运动学(3)和协议(7), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i \in N} p_i \mathbf{q}_i^T(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_i \mathbf{q}_i^T(t) a_{ij} (\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) = \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_i a_{ij} (\mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_i(t)). \end{aligned} \quad (12)$$

将(10)式代入(12)式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_i a_{ij} (\mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_j(t) - \frac{1}{2} \mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_i(t) - \frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T(t) \mathbf{q}_j(t)) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_i a_{ij} (-2\mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_j(t) + \\ &= \mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_i(t) + \mathbf{q}_j^T(t) \mathbf{q}_j(t)) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_i a_{ij} \|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

考虑强连通图的性质, 在  $a_{ij} \neq 0$  时, 当且仅当  $\|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)\| = 0$  成立, 有  $\dot{V}(t) = 0$ , 此时系统达到稳定, 故(5)式的结论成立.

根据(5)式和四元数的单位限制(2), 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} (|\epsilon_i(t)| - |\epsilon_j(t)|) = 0$ . 进一步, 因为对于所有航天器  $\epsilon_i(0) \geq 0$  成立, 根据引理1,  $\epsilon_i(t)$  均保持非负. 故(4)式成立. 因此, 航天器网络的四元数趋于相同, 即物理姿态最终趋于同步. 定理得证.

**注5** 定理1中的条件  $\epsilon_i(0) \geq 0, \forall i \in N$  是合理的. 根据(1)式, 可知当  $\epsilon_i(0) \geq 0$ , 相应的欧拉角  $\varphi_i(0)$  范围为  $[-\pi, \pi]$ , 即符合此初值的四元数集合可以映射所有物理姿态空间. 另外需要说明的是, 如果四元数初值  $(\epsilon_i(0), \mathbf{q}_i(0))$  中  $\epsilon_i(0) < 0$ , 根据注1可以将四元数初值预处理为  $(-\epsilon_i(0), -\mathbf{q}_i(0))$ .

**注6** 相比于文献[8], 本文提出的基于初始四元数标量符号的协议设计, 可以保证四元数的标量部分和矢量部分分别收敛, 从而保证姿态同步, 避免了文献[8]中的“非同步陷阱”.

### 3.2 基于实时四元数标量符号的协议设计

在定理1的基础上, 进一步将四元数标量的符号引入控制协议, 就可以避免对四元数初始值标量符号的判断和处理, 只需根据控制协议直接对航天器网络进行同步分析. 同样地, 首先给出同步协议为:

$$\boldsymbol{\omega}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t)) \text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t)) \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)). \quad (13)$$

基于此协议(13),给出如下姿态同步定理.

**定理 2** 针对由  $n$  个航天器组成的强连通网络(3),给定任意初始四元数,若采用分布式同步协议(13),则所有航天器的物理姿态最终趋于同步,即(6)式成立.

**证明** 采用定理 1 中的能量函数(11),对其求导并代入姿态运动学(3)和姿态协议(13),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i \in N} p_i \mathbf{q}_i^T(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t)) \text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t)) \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) = \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} p_i \mathbf{q}_i^T(t) a_{ij} (\text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t)) \text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t)) \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) = \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} p_i a_{ij} (\text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t)) \text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t)) \mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_i(t)). \end{aligned} \quad (14)$$

根据引理 2,对(14)式进行进一步化简:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} p_i a_{ij} (\text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t)) \text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t)) \mathbf{q}_i^T(t) \mathbf{q}_j(t) - \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_i(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_j(t)\|^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} p_i a_{ij} \|\text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t)) \mathbf{q}_i(t) - \text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t)) \mathbf{q}_j(t)\|^2. \end{aligned}$$

考虑  $a_{ij} \neq 0$  时,当且仅当  $\|\text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_i(t)) \mathbf{q}_i(t) - \text{sgn}(\boldsymbol{\epsilon}_j(t)) \mathbf{q}_j(t)\| = 0, \forall i, j \in N$ , 有  $\dot{V}(t) = 0$ , 即(6)式成立.因此,航天器网络的物理姿态最终趋于同步,实现全局姿态同步,定理得证.

**注 7** 相比于定理 1,定理 2 在姿态同步协议(13)中引入了符号函数,这种方式的优势在于,在分析收敛性时不必考虑航天器四元数标量的符号.尽管当时间趋于无穷时,各个航天器的四元数未必趋于相同,但是保证了物理意义下的姿态同步目标的实现,符合实际应用需求.

## 4 数值仿真

在本节中,对所提两类姿态同步协议(7)和(13)的有效性进行验证,利用刚体航天器网络进行数值仿真,仿真步长为 0.1 s,仿真时长为 20 s.邻接矩阵  $\mathbf{A}$  的非零项设置为  $a_{12} = 1, a_{15} = 1, a_{23} = 1, a_{24} = 1, a_{34} = 1, a_{41} = 1, a_{54} = 1$ . 四元数初值矢量部分分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(0) &= [0.293 \ 4, -0.155 \ 6, 0.769 \ 5]^T, \mathbf{q}_2(0) = [-0.248 \ 0, 0.305 \ 9, -0.876 \ 1]^T, \\ \mathbf{q}_3(0) &= [-0.255 \ 8, -0.730 \ 6, 0.556 \ 5]^T, \mathbf{q}_4(0) = [0.763 \ 1, -0.306 \ 8, 0.381 \ 5]^T, \\ \mathbf{q}_5(0) &= [-0.521 \ 1, 0.077 \ 5, 0.841 \ 6]^T. \end{aligned}$$

为验证仿真协议(7),取标量的初值为:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1(0) = 0.684 \ 6, \boldsymbol{\epsilon}_2(0) = 0.219 \ 4, \boldsymbol{\epsilon}_3(0) = 0.279 \ 8, \boldsymbol{\epsilon}_4(0) = 0.410 \ 3, \boldsymbol{\epsilon}_5(0) = 0.093 \ 9.$$

为验证仿真协议(13),取标量的初值为:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1(0) = -0.684 \ 6, \boldsymbol{\epsilon}_2(0) = 0.219 \ 4, \boldsymbol{\epsilon}_3(0) = -0.279 \ 8, \boldsymbol{\epsilon}_4(0) = 0.410 \ 3, \boldsymbol{\epsilon}_5(0) = -0.093 \ 9.$$

对标量和矢量分别作图,以判断其收敛性.结果如图 1 和图 2 所示.

从图 1 中可以看出,四元数矢量和标量分别收敛,此时航天器之间达成姿态一致.另外,通过标量的变化曲线可以看出,在初始值非负时,标量在整个时域内保持非负.因此,根据定理 1 的结论和图 1 的仿真结果可知,对于任意初始物理姿态的航天器网络,使用本文提出的控制协议(7)能够使系统实现全局姿态同步.

从图 2 中四元数标量部分的变化曲线可以看出,在对控制协议引入符号函数之后,即使存在标量初值为负的航天器四元数,在整个时域上各个航天器的四元数仍能趋于一致.因此,根据定理 2 的结论和图 2 的仿真结果可知,对于任意初始物理姿态的航天器网络,使用本文提出的控制协议(13)也能够使系统实现全局姿态同步.需要说明的是,定理 2 可以实现物理意义下的姿态同步,但并不能保证四元数一定实现同步.

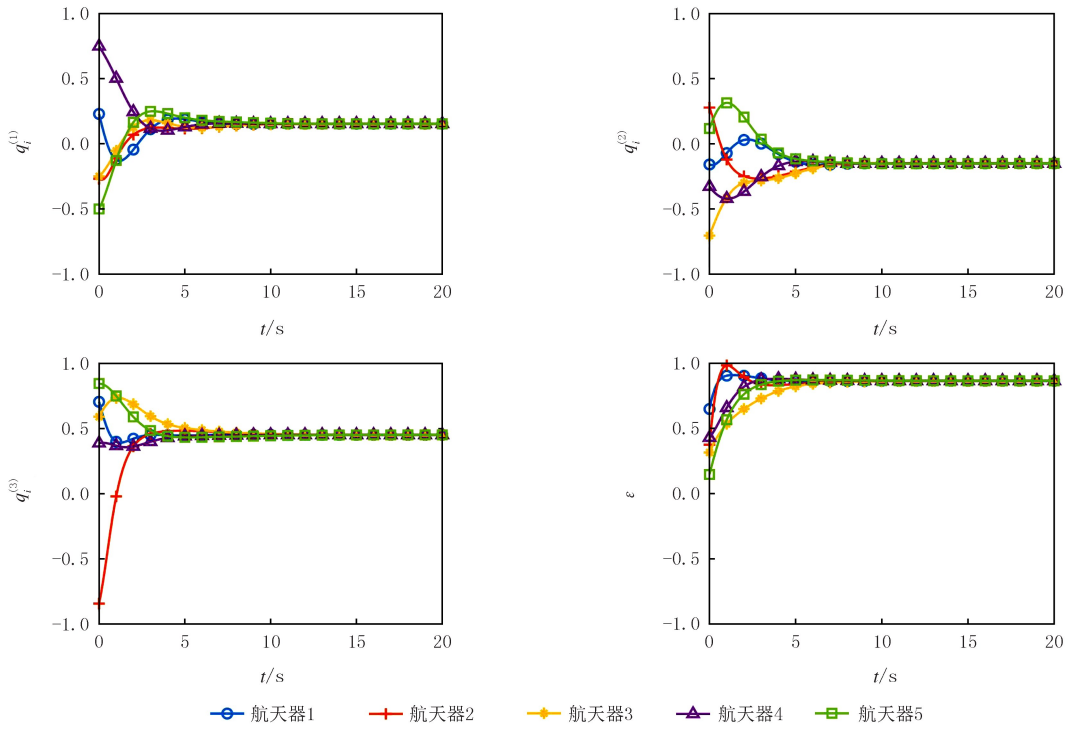


图1 同步协议(7)下的航天器姿态四元数变化

Fig.1 The evolution of quaternions representing spacecraft attitudes under synchronization protocol(7)

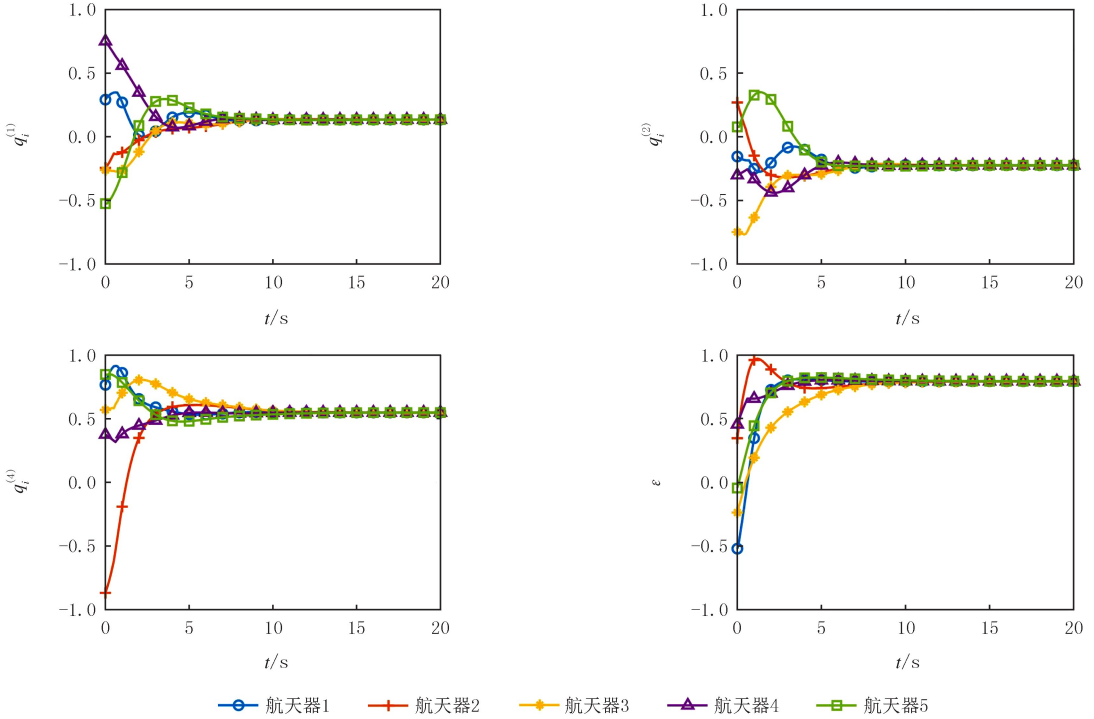


图2 同步协议(13)下的航天器姿态四元数变化

Fig.2 The evolution of quaternions representing spacecraft attitudes under synchronization protocol(13)

### 5 结 论

本文针对拓扑结构为强连通的航天器网络的全局姿态同步问题,设计了两类基于四元数的同步协议.第

一类协议仅使用四元数矢量部分.首先,基于四元数非唯一映射,通过预处理保证初始四元数标量非负,进而证明在第一类协议下,标量部分始终非负.然后,通过构造能量函数证明趋于一致.根据单位约束,可以证明标量部分也收敛到相同的数值,即数学意义下的姿态同步.第二类协议在第一类协议的基础上,引入实时四元数标量符号,无需对标量部分的演化单独分析,可以得到更一般性的物理意义下的姿态同步.通过对给定的强连通航天器网络的仿真分析,验证了两类协议的全局姿态同步效果.

### 参 考 文 献

- [1] 李宏枫.小卫星编队飞行姿态协同控制研究[D].北京:中国科学院研究生院(空间科学与应用研究中心),2008.  
LI H F.The coordinated attitude control for the formation flying of satellites[D].Beijing:Graduate School of Chinese Academy of Sciences (National Space Science Center),2008.
- [2] 孟子阳.基于一致性算法的多航天器姿态协同控制研究[D].北京:清华大学,2010.  
MENG Z Y.Study on spacecraft attitude coordination control based on consensus algorithm[D].Beijing:Tsinghua University,2010.
- [3] 李兆铭,高永明,牛亚峰,等.分离模块航天器虚拟对接姿态鲁棒自适应协同控制[J].航天控制,2013,31(5):55-61.  
LI Z M,GAO Y M,NIU Y F,et al.The robust adaptive cooperative attitude control for fractionated spacecraft virtual docking[J].Aerospace Control,2013,31(5):55-61.
- [4] 康磊.四旋翼飞行器姿态控制系统的设计与实现[D].沈阳:东北大学,2014.  
KANG L.The design and implementation of four-rotor aircraft attitude control system[D].Shenyang:Northeastern University,2014.
- [5] ZLOTNIK D E, FORBES J R.Rotation-Matrix-Based Attitude Control without Angular Velocity Measurements[C]//2014 American Control Conference.Oregon:IEEE,2014:4931-4936.
- [6] SINGLA P,MORTARI D,JUNKINS J L.How to Avoid Singularity for Euler Angle Set[C]//2004 The AAS Space Flight Mechanics Conference.Maui:Spaceflight Mechanics,2004:1-18.
- [7] 周江华,苗育红,李宏,等.四元数在刚体姿态仿真中的应用研究[J].飞行力学,2000,18(4):28-32.  
ZHOU J H,MIAO Y H,LI H,et al.Research of attitude simulation using quaternion[J].Flight Dynamics,2000,18(4):28-32.
- [8] DU H B,LI S H.Attitude synchronization control for a group of flexible spacecraft[J].Automatica,2014,50(2):646-651.
- [9] ABDESSAMEUD A,TAYEBI A,POLUSHIN I G.Attitude synchronization of multiple rigid bodies with communication delays[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2012,57(9):2405-2411.
- [10] JIN X,SHI Y,TANG Y,et al.Event-triggered attitude consensus with absolute and relative attitude measurements[J].Automatica,2020,122:109245.
- [11] HUGHES P C.Spacecraft Attitude Dynamics[M].New York:Wiley,1986.
- [12] DUREN JR W L.Mathematical Induction in Sets[J].American Mathematical Monthly,1957,64(8P2):19-22.
- [13] 李全.主从模式下航天器编队的姿态一致性控制[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2020.  
LI Q.The leader-following attitude consensus for spacecraft formation[D].Harbin:Harbin Institute of Technology,2020.

## Global attitude synchronization for networked spacecraft with quaternion-based representations

Meng Deyuan, San Yang, Zhang Fan

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University(BUAA), Beijing 100191, China)

**Abstract:** This paper develops two quaternion-based protocols for the global attitude synchronization problem of networked spacecraft. Thanks to the pretreatment of the scalar parts of initial quaternions, the first protocol achieves the global synchronization of the spacecraft's attitudes with arbitrary initial attitudes in the mathematical sense by resorting only to the vector parts of their quaternions. Moreover, the second protocol incorporates the signs of the scalar parts of real-time quaternions for the spacecraft's attitudes, which thus can not only avoid analyzing the evolution of their scalar parts separately, but also ensure the global synchronization of the spacecraft's attitudes in the physical sense. Simulations for networked spacecraft are presented to show the global attitude synchronization performances under two proposed protocols.

**Keywords:** networked spacecraft; quaternion; attitude synchronization; global synchronization

[责任编辑 陈留院 赵晓华]

## 本期专家介绍



孟德元,北京航空航天大学教授,博士生导师,国家自然科学基金优秀青年科学基金获得者.主要研究兴趣包括网络系统控制、迭代学习控制及数据驱动控制等控制方法的理论与应用,并(在线)发表相关学术论文 140 余篇,授权相关国家发明专利 10 余件等.目前,担任中国自动化学会数据驱动控制、学习与优化专业委员会委员、副秘书长,中国自动化学会控制理论专业委员会委员,以及中国指挥与控制学会集群智能与协同控制专业委员会委员等;担任期刊《空天技术》编委会委员,以及 *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 客座编辑;担任美国数学评论的评论员(*Mathematical Reviews, Reviewer*)等.此外,曾担任中国人工智能学会智能空天系统专业委员会委员、副秘书长,中国人工智能学会智能服务专业委员会委员, *IEEE Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS)*, *Editorial Chair, Chinese Control Conference (CCC)*, *Program Committee Member*, 以及 *Chinese Intelligent Systems Conference, General Secretary* 等.

李钧涛,河南师范大学教授,2010 年 1 月博士毕业于北京航空航天大学控制理论与控制工程专业,长期从事复杂系统建模与控制、统计机器学习、生物信息挖掘等方面研究.近年来主持、参与国家自然科学基金 6 项,主持、参与河南省高校科技创新人才计划、河南省重点科技攻关计划等省部级重大、重点项目 10 余项;完成河南省科技成果鉴定 1 项;发表学术论文 40 篇(其中 SCI, EI 检索论文 30 余篇),获得授权发明专利 1 件.现为国家自然科学基金信息科学部通讯评议专家,中国自动化学会数据驱动控制、学习与优化专业委员会委员,中国人工智能学会智能空天系统专业委员会委员,广东、江西等多省科技厅项目评审专家.先后获得“河南省高校科技创新人才”“河南省高校青年骨干教师”“河南省优秀硕士学位论文指导教师”等荣誉称号.



茹振钢,河南科技学院二级教授,河南大学兼职博士生导师,主要从事小麦新品种选育及相关应用基础研究.曾任河南省小麦抗病虫育种首席专家,现任河南省小麦研究会副理事长、河南省品种审定委员会委员、河南省杂交小麦重点实验室主任、全国高校黄大年式教师团队负责人.曾入选全国优秀共产党员、中原学者、河南省优秀专家、全国杰出专业技术人才、国务院特殊津贴专家,全国先进工作者、全国模范教师、全国粮食生产突出贡献农业科技人员.主持和承担国家“973”计划、国家支撑计划、“十三五”国家重点基础研究专项、河南省重大科技专项和横向委托项目等课题 20 多项.培育并推广了百农 62、百农 64、百农 160、矮抗 58、百农 418、百农 4199、百农 1316 等一系列小麦新品种,累计推广面积约  $2.7 \times 10^7$  公顷.作为主持人获得国家科技进步一等奖、何梁何利科学技术进步奖、庄巧生小麦研究贡献奖、全国创新争先奖、河南省科学技术杰出贡献奖等.