文章编号:1000－2367(2015)04－0007－09　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.04.002

周期的二阶 Camassa-Holm 方程弱整体解

丁丹平，章双华

(江苏大学 理学院,江苏 镇江 212013)

摘　要:考虑了二阶 Camassa-Holm 方程在周期条件下的柯西问题. 利用奇异扰动的方法构造了二阶 Camassa-Holm 方程的黏性方程. 通过压缩映射原理以及先验估计讨论了方程黏性解的存在性，然后根据黏性解的紧致性得到了周期的二阶 Camassa-Holm 方程在有限能量空间上弱整体解的存在性.

关键词:周期的二阶 Camassa-Holm 方程；弱解；整体存在性

中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A

高阶 Camassa-Holm (C-H)方程的形式是

$$\partial_t u = B_k(u,u), k \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

其中 $B_k(u,u) := A_k^{-1}C_k(u) - u\partial_x u, A_k(u) := \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\partial_x^{2j} u, C_k(u) := - uA_k(\partial_x u) + A_k(u\partial_x u) - 2\partial_x u A_k(u)$. 显然算子 $C_k(u)$ 是一个全导数. 记多项式 $F_k(u)$，使得 $C_k(u) = -\partial_x F_k(u)$，$-F_k(u) = \int_{-\infty}^{x} C_k(u(\xi))\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\partial_x^{2j}(u^2) - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\int_{-\infty}^{x}(u\partial_x^{2j}\partial_x u + 2\partial_x u\partial_x^{2j} u)\mathrm{d}\xi$.

方程(1) 最早由 Constantin[1] 得到，但是首先被 Coclite[2] 作为一个独立方程而研究.

当 $k = 0$ 和 $k = 1$,方程(1) 变为非黏性 Burgers 方程

$$u_t + 3uu_x = 0, \tag{2}$$

以及 C-H 方程[3]

$$\partial_t u - \partial_t\partial_x^2 u + 3u\partial_x u - 2\partial_x u\partial_x^2 u - u\partial_x^3 u = 0. \tag{3}$$

1997 年，Constantin[4] 得到 C-H 方程解得存在性结果. 文献[5－7] 给出了 C-H 方程整体弱解的存在唯一性结果. 与此同时，一些与 C-H 类似的方程也得到广泛研究，如广义超弹性杆方程弱整体解的存在唯一性[8]. 2009 年，文献[2] 研究了方程(1) 的适定性并确立了方程弱整体解的存在性,随后,文献[9] 研究了方程(1) 的守恒解,文献[10] 证明了方程(1) 解的局部适定性. 在 $k = 2$ 情形下，文献[11] 研究了方程(1) 解的整体存在性.

本文研究周期的二阶 Camassa-Holm 方程的柯西问题，即

$$\begin{cases}\partial_t u = B_2(u,u), (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R},\\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbf{R},\\ u(t,x+1) = u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}.\end{cases} \tag{4}$$

其中 $u(t,x)$ 是单位圆 $S = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上依赖于时间的函数且 $B_2(u,u) := A_2^{-1}C_2(u) - u\partial_x u, A_2(u) = \partial_x^4 u - \partial_x^2 u + u, C_2(u) = -\partial_x u\partial_x^2 u + 10\partial_x^2 u\partial_x^3 u + \partial_x u\partial_x^4 u - 2u\partial_x u, \mathscr{F}_2(u) = u^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x^2 u)^2 - 3\partial_x(\partial_x u\partial_x^2 u)$.

收稿日期:2014-09-17;**修回日期**:2015-03-23.

基金项目:国家自然科学基金(11371175)

作者简介(通信作者):丁丹平(1965－)，男，江苏丹阳人,江苏大学教授,研究方向为非线性发展方程，E-mail：ddp@ujs.edu.cn.

1 黏性解

将柯西问题(4) 改写成如下形式

$$\begin{cases} u_t + uu_x + P_x = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ A_2(P) = \mathscr{F}_2(u),\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbf{R}, \\ u(t,x+1) = u(t,x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{5}$$

柯西问题(5) 的黏性形式为

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t} + u_\varepsilon u_{\varepsilon x} + P_{\varepsilon x} = \varepsilon u_{\varepsilon xx},\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ A_2(P_\varepsilon) = \mathscr{F}_2(u_\varepsilon),\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ u_\varepsilon(0,x) = u_{\varepsilon 0}(x),\ x \in \mathbf{R}, \\ u_\varepsilon(t,x+1) = u_\varepsilon(t,x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{6}$$

记

$$F(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}, u_{\varepsilon xx}) = u_\varepsilon u_{\varepsilon x} + \partial_x A_2^{-1}\mathscr{F}_2(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}(u_\varepsilon^2)_x + \partial_x A_2^{-1}\left(u_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}u_{\varepsilon x}^2 - \frac{1}{2}u_{\varepsilon xx}^2\right) - \frac{3}{2}\partial_x^3 A_2^{-1}(u_{\varepsilon x}^2). \tag{7}$$

那么(6) 能够写成如下形式

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t} + F(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}, u_{\varepsilon xx}) = \varepsilon u_{\varepsilon xx}, \\ u_\varepsilon(t,x+1) = u_\varepsilon(t,x), \\ u_\varepsilon(0,x) = u_{\varepsilon 0}(x). \end{cases} \tag{8}$$

引理 1 若 $u_{\varepsilon 0} \in H^{s+1}(S), s \geq 0$,则对任意的 $\| u_\varepsilon \|_{H^{s+1}(S)}, \| v_\varepsilon \|_{H^{s+1}(S)} \leq R$,如果方程

$$u_{\varepsilon t} - \Delta u_\varepsilon = F(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, \Delta u_\varepsilon) \tag{9}$$

的非线性部分满足

$$\| F(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, \Delta u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon, \Delta v_\varepsilon) \|_{H^s(S)} \leq M_R \| u_\varepsilon - v_\varepsilon \|_{H^{s+1}(S)}. \tag{10}$$

那么存在一个依赖于 $\| u_{\varepsilon 0} \|_{H^{s+1}(S)}$ 的时间 T,使得柯西问题(8) 有唯一的局部解 $u_\varepsilon \in C([0,T], H^{s+1}(S)) \cap C^1((0,T], H^s(S))$. 此外,对任意的 $t_0 < t < T$,解 $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times [t_0, T))$.

引理 1 是经典的非线性热传导方程的局部存在结果[12-14]. 其结果是用压缩映射原理得到的,证明依赖于热半群 $e^{t\Delta}$ 的光滑性,即

$$\begin{cases} \| e^{t\Delta} u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^{s+1}(S)} \leq Ct^{\frac{1}{2}} \| u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^s(S)}, \\ \| (e^{t\Delta} - Id) u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^s(S)} \leq Ct^{\frac{1}{2}} \| u_{\varepsilon 0}(x) \|_{H^{s+1}(S)}. \end{cases}$$

引理 2 若 $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in H^s(S)$,则 $\| \partial_x^m A_s^{-1}(u_\varepsilon v_\varepsilon) \|_{H^s(S)} \leq M \| u_\varepsilon \|_{H^s(S)} \| v_\varepsilon \|_{H^s(S)}$,其中 $m \leq 2s, M \geq 2^{\frac{s}{2}}$.

证明 根据傅里叶变换,有 $F(\partial_\xi f)(\xi) = \int_S [\partial_x f(x)] e^{-2\pi i \xi x} dx = 2\pi\xi i \int_S f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = 2\pi\xi i \hat{f}(\xi)$. 则 $F(\partial_\xi^m f)(\xi) = (2\pi\xi i)^m \hat{f}(\xi)$. $F(A_2 f(\xi)) = F((1 - \partial_\xi^2 + \partial_\xi^4) f)(\xi) = (1 + 4\pi^2 |\xi|^2 + (2\pi|\xi|)^4)\hat{f}(\xi)$. $F((1 - \partial_\xi^2 + \partial_\xi^4)^{-1} f)(\xi) = (1 + 4\pi^2 |\xi|^2 + (2\pi|\xi|)^4)^{-1}\hat{f}(\xi) = F(A_2^{-1} f(\xi))$.

由上可知 $F(\partial_\xi^m A_s^{-1} f(\xi)) = (2\pi\xi i)^m (1 + (2\pi\xi i)^2 + (2\pi\xi i)^4 + \cdots + (2\pi\xi i)^{2s})^{-1} \hat{f}(\xi)$. 那么

$$\| \partial_\xi^m A_s^{-1}(u_\varepsilon v_\varepsilon) \|_{H^s(S)} = \left(\int_S | (2\pi\xi i)^m (1 + (2\pi\xi i)^2 + \cdots + (2\pi\xi i)^{2s})^{-1} \hat{u}_\varepsilon(\xi) * \hat{v}_\varepsilon(\xi) |^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\left(\int_S \left| \frac{(2\pi|\xi|)^{2s}}{(1 + |2\pi\xi|^2 + \cdots + |2\pi\xi|^{2s})} \int_S \hat{u}_\varepsilon(\xi - \eta) \hat{v}_\varepsilon(\eta) d\eta \right|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_S \left| \int_S \hat{u}_\varepsilon(\xi) \hat{v}_\varepsilon(\eta) d\xi \right|^2 (1 + \right.$$

$$\left. |\xi + \eta|^2)^s d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_S \left[\left(\int_S |\hat{u}_\varepsilon(\xi) \hat{v}_\varepsilon(\eta)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \cdot 1 \cdot (1 + |\xi + \eta|^2)^s d\eta\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\int_S \int_S |\hat{u}_\varepsilon(\xi) \hat{v}_\varepsilon(\eta)|^2 d\xi (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + 2|\xi\eta|)^s d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\left(\int_S\int_S |\hat{u}_\varepsilon(\xi)\hat{v}_\varepsilon(\eta)|^2 d\xi[2(1+|\xi|^2)(1+|\eta|^2)]^s d\eta\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$2^{\frac{s}{2}}\left(\int_S |\hat{v}_\varepsilon(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^s d\eta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_S |\hat{u}_\varepsilon(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$M\|u_\varepsilon\|_{H^s(S)}\|v_\varepsilon\|_{H^s(S)},$$

其中 $M \ge 2^{\frac{s}{2}}$.

假设 1　$u_{\varepsilon 0} \in H^3(S)$，$\|u_{\varepsilon 0}\|_{H^2(S)} \le \|u_0\|_{H^2(S)}$ 且在 $H^2(S)$ 上 $u_{\varepsilon 0} \to u_0$.

推论 1　若假设 1 成立，那么柯西问题(8) 存在唯一的整体解 $u_\varepsilon \in C([0,+\infty);H^3(S))$，且满足

$$I(t) = \int_S u_\varepsilon^2 + (\partial_x u_\varepsilon)^2 + (\partial_x^2 u_\varepsilon)^2 dx \le \int_S u_{\varepsilon 0}^2 + (\partial_x u_{\varepsilon 0})^2 + (\partial_x^2 u_{\varepsilon 0})^2 dx = I(0).$$

证明　根据(7) 式，有

$$F(u_\varepsilon,u_{\varepsilon x},u_{\varepsilon xx}) - F(v_\varepsilon,v_{\varepsilon x},v_{\varepsilon xx}) = \frac{1}{2}\partial_x(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2) + \frac{3}{2}\partial_x^3 A_2^{-1}(u_{\varepsilon x}^2 - v_{\varepsilon x}^2) +$$

$$\partial_x A_2^{-1}\left[(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2) + \frac{1}{2}(u_{\varepsilon x}^2 - v_{\varepsilon x}^2) - \frac{1}{2}(u_{\varepsilon xx}^2 - v_{\varepsilon xx}^2)\right]. \tag{11}$$

下面验证(11) 式满足引理 1.

$$\frac{1}{2}\|\partial_x(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(u_\varepsilon + v_\varepsilon)\|_{H^2(S)} \le \frac{1}{2}\|(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(u_\varepsilon + v_\varepsilon)\|_{H^3(S)} \le \frac{1}{2}\|(u_\varepsilon + v_\varepsilon)\|_{H^3(S)}\|(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{H^3(S)} \le C\|(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{H^3(S)}(\|u_\varepsilon\|_{H^3(S)} + \|v_\varepsilon\|_{H^3(S)}).$$

运用引理 2，得

$$\frac{3}{2}\|\partial_x^3 A_2^{-1}(u_{\varepsilon x} - v_{\varepsilon x})(u_{\varepsilon x} + v_{\varepsilon x})\|_{H^2(S)} \le \frac{3}{2}C\|u_{\varepsilon x} - v_{\varepsilon x}\|_{H^2(S)}\|u_{\varepsilon x} + v_{\varepsilon x}\|_{H^2(S)} \le$$

$$\frac{3}{2}C\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^3(S)}(\|u_\varepsilon\|_{H^3(S)} + \|v_\varepsilon\|_{H^3(S)}).$$

$$\left\|\partial_x A_2^{-1}\left[(u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2) + \frac{1}{2}(u_{\varepsilon x}^2 - v_{\varepsilon x}^2) - \frac{1}{2}(u_{\varepsilon xx}^2 - v_{\varepsilon xx}^2)\right]\right\|_{H^2(S)} \le$$

$$3C\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^3(S)}(\|u_\varepsilon\|_{H^3(S)} + \|v_\varepsilon\|_{H^3(S)}).$$

因此，根据引理 1 可得柯西问题(8) 存在唯一的局部解.

对任意的 $0 < t < T_\varepsilon$，

$$I'(t) = 2\int_S (u_\varepsilon u_{\varepsilon t} + u_{\varepsilon x}u_{\varepsilon tx} + u_{\varepsilon xx}u_{\varepsilon txx})dx =$$

$$2\varepsilon\int_S (u_\varepsilon u_{\varepsilon xx} + u_{\varepsilon x}u_{\varepsilon xxx} + u_{\varepsilon xx}u_{\varepsilon xxxx})dx = -2\varepsilon\int_S (u_{\varepsilon x}^2 + u_{\varepsilon xx}^2 + u_{\varepsilon xxx}^2)dx \le 0. \tag{12}$$

则

$$I(t) \le I(0). \tag{13}$$

根据(13) 式，通过迭代可以使局部解延拓为全局解. 事实上，取 $t_0 = \frac{T_\varepsilon}{2}$，又由能量耗散 $\|u_\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{H^2(S)} \le \|u_{\varepsilon 0}\|_{H^2(S)}$，故从 t_0 可以进行和上述相同的讨论. 参阅引理 1 的证明过程，可发现 $T = T(\|u_{\varepsilon 0}\|_{H^2(S)})$ 是减函数且 $\lim\limits_{h\to 0} T(h) = \infty$，所以此时的解存在上限 $T_\varepsilon(\|u_\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{H^2(S)}) \ge T_\varepsilon = T_\varepsilon(\|u_{\varepsilon 0}\|_{H^2(S)})$；通过逐步对时间取很小的固定增量，我们就得到全局解，且每一步迭代中都有(13) 式成立.

2　一些引理及先验估计

假设 2　$u_0 \in H^2(S)$ 且对某一 $2 < p < \infty$，$\partial_x^2 u_0 \in L^p(S)$.

引理 3　若假设 1 和假设 2 均成立，则对任意的 $\varepsilon > 0$ 及每个 $t \ge 0$ 都有

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^2(S)}^2 + 2\varepsilon\int_0^t \|\partial_x u_\varepsilon(\tau,\cdot)\|_{H^2(S)}^2 d\tau = \|u_{\varepsilon 0}\|_{H^2(S)}^2, \tag{14}$$

$$\| u_\varepsilon \|_{L^\infty([0,\infty)\times S)}, \ \| \partial_x u_\varepsilon \|_{L^\infty([0,\infty)\times S)} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_0 \|_{H^2(S)}. \tag{15}$$

证明 固定 $t>0$，将(6) 式的第 1 个方程两边同乘 $A_2(u_\varepsilon)$ 并在 S 上积分

$$\int_S \partial_t u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x - \varepsilon\int_S \partial_x^2 u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x = -\int_S u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x - \int_S \partial_x P_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x. \tag{16}$$

对于(16) 式的左边，运用分部积分，得

$$\int_S \partial_t u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x - \varepsilon\int_S \partial_x^2 u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_\varepsilon(t,\cdot) \|_{H^2(S)}^2 + \varepsilon \| \partial_x u_\varepsilon(t,\cdot) \|_{H^2(S)}^2. \tag{17}$$

对于(16) 式的右边，根据(6) 式的第 2 个方程，得

$$-\int_S u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x - \int_S \partial_x P_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x = -\int_S u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x - \int_S \partial_x (A_2(P_\varepsilon)) u_\varepsilon \mathrm{d}x =$$
$$-3\int_S u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon)\mathrm{d}x - \int_S u_\varepsilon^2 A_2(\partial_x u_\varepsilon)\mathrm{d}x + \int_S u_\varepsilon A_2(u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon)\mathrm{d}x = 0. \tag{18}$$

结合(16) 式、(17) 式和(18) 式，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_\varepsilon(t,\cdot) \|_{H^2(S)}^2 + \varepsilon \| \partial_x u_\varepsilon(t,\cdot) \|_{H^2(S)}^2 = 0. \tag{19}$$

对(19) 式在$[0,t]$ 上积分，可得(14) 式.

对任意 $x \in S$，

$$u_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^x u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon \mathrm{d}x - \int_x^{+\infty} u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon \mathrm{d}x \le \int_{-\infty}^x | u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon | \mathrm{d}x + \int_x^{+\infty} | u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon | \mathrm{d}x = \int_S | u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon | \mathrm{d}x.$$

由施瓦茨不等式，得

$$\| u_\varepsilon \|_{L^\infty([0,\infty)\times S)}^2 \le \| u_\varepsilon \|_{L^2([0,\infty)\times S)} \cdot \| \partial_x u_\varepsilon \|_{L^2([0,\infty)\times S)} \le \frac{1}{2}(\| u_\varepsilon \|_{L^2([0,\infty)\times S)}^2 +$$
$$\| \partial_x u_\varepsilon \|_{L^2([0,\infty)\times S)}^2 \le \frac{1}{2} \| u_\varepsilon \|_{H^2(S)}^2.$$

根据(14) 式，得 $\| u_\varepsilon \|_{L^\infty([0,\infty)\times S)} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_0 \|_{H^2(S)}$. 类似地，$\| \partial_x u_\varepsilon \|_{L^\infty([0,\infty)\times S)} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| u_0 \|_{H^2(S)}$.

对(6) 式中的第 2 个方程使用傅里叶正逆变换，得

$$P_\varepsilon(t,x) = \int_S \left(\frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} \right) \left(u_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} u_{\varepsilon x}^2 - \frac{1}{2} u_{\varepsilon xx}^2 \right)(t,z)\mathrm{d}z +$$
$$\frac{3}{2}\int_S \left(\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} \right) u_{\varepsilon x}^2(t,z)\mathrm{d}z.$$

令

$$P_\varepsilon(t,x) = P_{1\varepsilon}(t,x) + P_{2\varepsilon}(t,x), \tag{20}$$

其中

$$G_1(x-z) = \frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|}, \tag{21}$$

$$G_2(x-z) = \frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|} + \frac{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{12} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}|x-z|}, \tag{22}$$

$$P_{1\varepsilon}(t,x) = \int_S G_1(x-z)\left[u_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u_\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2 \right](t,z)\mathrm{d}z, \tag{23}$$

$$P_{2\varepsilon}(t,x) = \frac{3}{2}\int_S G_2(x-z) u_{\varepsilon x}^2(t,z)\mathrm{d}z. \tag{24}$$

引理 4 若假设 1 和假设 2 均成立，则对每个 $t \ge 0, \varepsilon > 0$，有

$$\| P_\varepsilon(t,\cdot) \|_{W^{3,1}(S)}, \| P_\varepsilon(t,\cdot) \|_{W^{3,\infty}(S)} \le C_0 \| u_0 \|_{H^2(S)}^2, \tag{25}$$

其中 C_0 是不依赖于 ε 的常数.

证明 固定 $t > 0$，对于每个 $p \in \{1,\infty\}$，$i, j \in \{0,1,2,3\}$

$$\partial_x^i P_{1\varepsilon}(t,x)=\int_S \frac{\mathrm{d}^i G_1}{\mathrm{d}x^i}(x-z)\Big[u_\varepsilon^2(t,z)+\frac{1}{2}(\partial_x u_\varepsilon(t,z))^2-\frac{1}{2}(\partial_x^2 u_\varepsilon(t,z))^2\Big]\mathrm{d}z,$$

$$\partial_x^j P_{2\varepsilon}(t,x)=\frac{3}{2}\int_S \frac{\mathrm{d}^j G_2}{\mathrm{d}x^j}(x-z)(\partial_x u_\varepsilon)^2(t,z)\mathrm{d}z.$$

由卷积的 Young 不等式及(15)、(20)、(21)、(22) 和(23) 式，得

$$\|\partial_x^i P_{1\varepsilon}(t,\cdot)\|_{L^p(S)}\le \left\|\frac{\mathrm{d}^i G_1}{\mathrm{d}x^i}\right\|_{L^p(S)}\int_S\Big[u_\varepsilon^2+\frac{1}{2}(\partial_x u_\varepsilon)^2+\frac{1}{2}(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2\Big]\mathrm{d}z\le$$
$$C_1\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^2(S)}^2\le C_1\|u_0\|_{H^2(S)}^2. \tag{26}$$

类似地，

$$\|\partial_x^j P_{2\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(S)}\le\frac{3}{2}\left\|\frac{\mathrm{d}^j G_2}{\mathrm{d}x^j}\right\|_{L^p(S)}\int_S|(\partial_x u_\varepsilon)^2(t,z)|\mathrm{d}z\le$$
$$C_2\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^2(S)}^2\le C_2\|u_0\|_{H^2(S)}^2. \tag{27}$$

其中 C_1,C_2 是不依赖于 ε 的常数.

因此，由估计(26) 和(27) 可以得到(25) 式.

对任意给定的正常数 T，引入 $\Pi_T:=[0,T]\times S$.

引理 5　若假设 1 和假设 2 均成立，则对任意的 $0<\varepsilon<1$ 以及每一个 T，$0<t<T$，有

$$\|\partial_t u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}\le K_1, \tag{28}$$
$$\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\Pi_T)}\le K_2. \tag{29}$$

其中 K_1,K_2 是不依赖于 ε 的常数，并且

$$K_1=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+C_0\Big)\|u_0\|_{H^2(S)}^2+\|u_0\|_{H^2(S)},K_2=(\sqrt{2T}+C_0\sqrt{T})\|u_0\|_{H^2(S)}^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}.$$

证明　令 $T>0$，$0<t<T$ 并且 $0<\varepsilon<1$. 根据(6) 式，引理 3 和引理 4，

$$\|\partial_t u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}\le\|u_\varepsilon(t,\cdot)\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}+\|\partial_x P_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}+\varepsilon\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}\le$$
$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0,\infty)\times S)}\|\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}+\|\partial_x P_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}+\varepsilon\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)}\le$$
$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0,\infty)\times S)}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^2(S)}+\|P_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^2(S)}+\varepsilon\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^2(S)}\le$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}^2+C_0\|u_0\|_{H^2(S)}^2+\varepsilon\|u_0\|_{H^2(S)}\le$$
$$\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+C_0\Big)\|u_0\|_{H^2(S)}^2+\|u_0\|_{H^2(S)}=K_1.$$

此外，对于(6) 式的第 1 个方程，在其两边关于 x 求导，

$$\partial_t\partial_x u_\varepsilon+(\partial_x u_\varepsilon)^2+u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon+\partial_x^2 P_\varepsilon=\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon.$$

则，根据引理 3 和引理 4，得

$$\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\Pi_T)}\le\|(\partial_x u_\varepsilon)^2\|_{L^2(\Pi_T)}+\|u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\|\partial_x^2 P_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\varepsilon\|\partial_x^3 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\le$$
$$\Big(\iint_{[0,T]\times S}[(\partial_x u_\varepsilon)^2]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\iint_{[0,T]\times S}(u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\iint_{[0,T]\times S}(\partial_x^2 P_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\Big(\varepsilon\iint_{[0,T]\times S}(\partial_x^3 u_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\le\Big\{\int_0^T\Big[\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}^2\int_S(\partial_x u_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t\Big\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$\Big\{\int_0^T\Big[\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}^2\int_S(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t\Big\}^{\frac{1}{2}}+\Big\{\int_0^T\int_S(\partial_x^2 P_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t\Big\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$\Big\{\int_0^T\varepsilon\int_S(\partial_x^3 u_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big\}^{\frac{1}{2}}\le\Big[\int_0^T\Big(\frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2(S)}^2\cdot\|u_0\|_{H^2(S)}^2\Big)\mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{2}}+$$
$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}\Big(\int_0^T\|u_0\|_{H^2(S)}^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big[\int_0^T(C_0\|u_0\|_{H^2(S)}^4)\mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{2}}+\Big(\varepsilon\int_0^T\|\partial_x u_\varepsilon\|_{H^2(S)}^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}^2\sqrt{T}+\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}^2\sqrt{T}+\|u_0\|_{H^2(S)}^2\sqrt{C_0T}+\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}\le$$

$$(\sqrt{2T}+\sqrt{C_0 T})\|u_0\|_{H^2(S)}^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}=K_2.$$

引理 6 若假设 1 和假设 2 均成立，则对每个 $0<\varepsilon<1$，都存在一个仅依赖于 $\|u_0\|_{H^2(S)}$，T 不依赖于 ε 的正常数 K_T，使得

$$\|\partial_t\partial_x^3 P_\varepsilon\|_{L^1(\Pi_T)},\ \|\partial_t\partial_x^3 P_\varepsilon\|_{L^\infty(K_T)}\le K_T. \tag{30}$$

证明 固定 $T>0$ 及 $0<\varepsilon<1$. 对式(6) 的第一个方程两边关于 x 求两次导，得

$$\partial_t\partial_x^2 u_\varepsilon+u_\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon+3\partial_x u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon+\partial_x^3 P_\varepsilon=\varepsilon\partial_x^4 u_\varepsilon.$$

则，根据引理 3，引理 4 和引理 5，可得

$$\|\partial_t\partial_x^3 P_{2\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(K_T)}\le 3\|G_1'''(x-z)\|_{L^p(S)}\int_{K_T}\partial_x u_\varepsilon\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t,z)\mathrm{d}z\le$$
$$C_3\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(K_T)}\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(K_T)}\le C_3 K_2\sqrt{T}\|u_0\|_{H^2}. \tag{31}$$

$$\partial_t\partial_x^3 P_{1,\varepsilon}(t,x)=\int_S G_1''(x-z)[2u_\varepsilon\partial_t u_\varepsilon+\partial_x u_\varepsilon\partial_t\partial_x u_\varepsilon-\partial_x^2 u_\varepsilon\partial_t\partial_x^2 u_\varepsilon]\mathrm{d}z=\int_S G_1''(x-z)(2u_\varepsilon\partial_t u_\varepsilon+$$
$$\partial_x u_\varepsilon\partial_t\partial_x u_\varepsilon)\mathrm{d}z+\int_S G_1''(x-z)[\partial_x^2 u_\varepsilon\partial_x^3 P_\varepsilon+3\partial_x u_\varepsilon(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2+u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon-\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon\partial_x^4 u_\varepsilon]\mathrm{d}z=$$
$$\int_S G_1''(x-z)(2u_\varepsilon\partial_t u_\varepsilon+\partial_x u_\varepsilon\partial_t\partial_x u_\varepsilon)\mathrm{d}z+\int_S G_1''(x-z)\partial_x^2 u_\varepsilon\partial_x^3 P_\varepsilon\mathrm{d}z+\frac{1}{2}u_\varepsilon(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2-$$
$$\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon+\int_S(G_1''-G_1)(x-z)\left[\frac{1}{2}u_\varepsilon(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2-\varepsilon\partial_x^3 u_\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon\right]\mathrm{d}z+$$
$$\int_S G_1''(x-z)\left[\frac{5}{2}u_\varepsilon(\partial_x^2 u_\varepsilon)^2+\varepsilon(\partial_x^3 u_\varepsilon)^2\right]\mathrm{d}z.$$

类似(31) 式，根据引理 3，引理 4 和引理 5 并使用 Holder 不等式，得

$$\|\partial_t\partial_x^3 P_{1,\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}\le C_4[\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+$$
$$\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}\|\partial_x^3 P_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}^2+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}\times$$
$$\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}^2+\varepsilon\|\partial_x^3 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}(\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+1)]\le C_4\Big[\sqrt{T}\|u_\varepsilon\|_{H^2(S)}\times$$
$$(\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\|\partial_t\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)}+\|\partial_x^3 P_\varepsilon\|_{L^2(\Pi_T)})+T\|u_\varepsilon\|_{H^2(S)}^2\times$$
$$\left(\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Pi_T)}+\frac{1}{2}\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^2(\Pi_T)}^2\right)+\frac{1}{2}\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^2(\Pi_T)}^2\Big]\le$$
$$C_4\Big[\sqrt{T}\|u_0\|_{H^2(S)}(K_1+K_2+C_0\|u_0\|_{H^2(S)}^2)+T\|u_0\|_{H^2(S)}^2(\sqrt{2}\|u_0\|_{H^2(S)}+$$
$$\frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2(\Pi_T)}^2)+\frac{1}{2}T\|u_0\|_{H^2(S)}^2\Big], \tag{32}$$

其中 K_1，K_2 在引理 5 中给出，C_3，C_4 不依赖于 ε.

因此，对于 $p\in\{1,\infty\}$，$\|\partial_t\partial_x^i P_\varepsilon(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}\le\|\partial_t\partial_x^i P_{1,\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}+\|\partial_t\partial_x^i P_{2\varepsilon}(t,x)\|_{L^p(\Pi_T)}\le C_5 K_T$.

由于(31)，(32) 两不等式的右边每项的估计都只与 $\|u_0\|_{H^2(S)}$ 和 T 有关而与 ε 无关，所以 K_T 是依赖于 $\|u_0\|_{H^2(S)}$ 和 T 不依赖于 ε 的常数.

引理 7 若假设 1 和假设 2 均成立，则对任意的 $2\le p<\infty$，$t\ge 0$ 和 $\varepsilon>0$，有

$$\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(S)}\le\|\partial_x^2 u_{\varepsilon 0}(t,\cdot)\|_{L^p(S)}\mathrm{e}^{K_3 t}+K_4\frac{\mathrm{e}^{K_3 t}-1}{K_3}, \tag{33}$$

其中 $K_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}$，$K_4=(3+C_0\|u_0\|_{H^2(S)}^2$ 是依赖于 $\|u_0\|_{H^2(S)}$ 的常数.

证明 令 $2\le p<\infty$. 记 $q_\varepsilon:=\partial_x^2 u_\varepsilon$.

则有

$$\partial_t q_\varepsilon+3q_\varepsilon\partial_x u_\varepsilon+u_\varepsilon\partial_x q_\varepsilon+\partial_x^3 P_\varepsilon=\varepsilon\partial_x^2 q_\varepsilon. \tag{34}$$

将(34) 式写为

$$\partial_t q_\varepsilon + u_\varepsilon \partial_x q_\varepsilon + \widetilde{P}_\varepsilon = \varepsilon \partial_x^2 q_\varepsilon, \tag{35}$$

其中

$$\widetilde{P}_\varepsilon := \partial_x^3 P_\varepsilon + 3\partial_x u_\varepsilon \partial_x^2 u_\varepsilon. \tag{36}$$

将(35)式各项同乘 $pq_\varepsilon|q_\varepsilon|^{p-2}$，得

$$\partial_t(|q_\varepsilon|^p) + u_\varepsilon \partial_x(|q_\varepsilon|^p) + p\widetilde{P}_\varepsilon q_\varepsilon |q_\varepsilon|^{p-2} = p\varepsilon |q_\varepsilon|^{p-2}\partial_x^2 q_\varepsilon = \varepsilon\partial_x^2(|q_\varepsilon|^2) - \varepsilon p(p-1)(\partial_x q_\varepsilon)^2.$$

使用 Holder 不等式，有

$$\int_S |\partial_x u_\varepsilon \partial_x^2 u_\varepsilon| \mathrm{d}x \le \|\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)} \|\partial_x^2 u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(S)} \le \|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^2(S)}^2 \le \|u_0\|_{H^2(S)}^2. \tag{37}$$

由(15)式，引理 4 以及(7)式，得

$$p\|q_\varepsilon\|_{L^p(S)}^{p-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q_\varepsilon\|_{L^p(S)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S |q_\varepsilon|^p \mathrm{d}x \le \int_S \partial_x u_\varepsilon |q_\varepsilon|^p \mathrm{d}x + p\int_S |\widetilde{P}_\varepsilon||q_\varepsilon|^{p-1}\mathrm{d}x \le$$

$$\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(S)}\int_S |q_\varepsilon|^p \mathrm{d}x + p\|\widetilde{P}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(S)}\|q_\varepsilon\|_{L^p(S)}^{p-1} \le K_3\|q_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(S)}^p + K_4 p\|q_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(S)}^{p-1},$$

其中 $K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\|u_0\|_{H^2(S)}$，$K_4 = (3 + C_0\|u_0\|_{H^2(S)}^2$. 因此 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(S)} \le \frac{K_3}{p}\|q_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p(S)} + K_4$.

(33) 式可直接由 Gronwall 引理得到.

3　黏性解的紧致性

引理 8[15]　令 X, B, Y 为 3 个 Banach 空间并且满足 $X \subset\subset B \subset Y$. 假设对于 $1 \le p \le \infty, T > 0$，函数 $f \in F$ 在 $L^p([0,T],X)$ 上有界并且满足

当 $h \to 0$ 时，$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p(0,T-h;Y)} \to 0$ 对于 $f \in F$ 一致成立.

那么，在 $L^p([0,T],B)$($C([0,T],B)$ 当 $p = \infty$) 上，F 是相对紧致的.

引理 9　若假设 1 和假设 2 均成立，则存在一个正的递减至零的序列 $\{\varepsilon_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ 以及 3 个函数 $u \in L^\infty([0,\infty),H^1(S))$，$P \in L^\infty([0,\infty),W^{2,\infty}(S))$ 和 $\widetilde{P} \in L^\infty([0,\infty),W^{1,\infty}(S))$ 使得

对于每个 $T \ge 0$，在 $H^1([0,T];H^1(S))$ 上，$u_{\varepsilon_h} \rightharpoonup u$，(38)

在 $L^\infty_{loc}([0,\infty),H^1_{loc}(S))$ 上，$u_{\varepsilon_h} \to u$，(39)

对于每个 $1 \le p < \infty$，在 $L^p_{loc}([0,\infty),W^{1,p}_{loc}(S))$ 上，$P_{\varepsilon_h} \to P$，(40)

对于每个 $1 \le p < \infty$，在 $L^p_{loc}([0,\infty)\times S)$ 上，$\widetilde{P}_{\varepsilon_h} \to \widetilde{P}$，(41)

其中 $u_\varepsilon, P_\varepsilon$ 和 $\widetilde{P}_\varepsilon$ 分别由推论 1,(20) 式和(36) 式给出.

证明　根据引理 3 有 $u_\varepsilon \in L^\infty([0,\infty),H^1(S))$，并且 u_ε 在 $H^1(S)$ 上关于 t 一致有界.

由(6) 式可得

$$\partial_t u_\varepsilon = \varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon - u_\varepsilon\partial_x u_\varepsilon - \partial_x P_\varepsilon. \tag{42}$$

通过引理 3,引理 4 以及 Holder 不等式,得

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2([0,T]\times S)} \le \|\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2([0,T]\times S)} + \|u_\varepsilon\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2([0,T]\times S)} + \|\partial_x P_\varepsilon\|_{L^2([0,T]\times S)} \le$$

$$\|\varepsilon\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2([0,T]\times S)} + \|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T]\times S)}\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2([0,T]\times S)} + \|\partial_x P_\varepsilon\|_{L^2([0,T]\times S)} \le$$

$$\sqrt{\varepsilon T}\|u_0\|_{H^2(S)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{T}\|u_0\|_{H^2(S)}^2 + \sqrt{C_0 T}\|u_0\|_{H^2(S)}^2. \tag{43}$$

因此，$\{u_\varepsilon\}$ 在 $H^1([0,T]\times S) \cap L^\infty([0,\infty),H^1(S)\big)$ 上一致有界. 由此可得(38).

固定 $T > 0$，对任意的 $0 \le s,t \le T$，

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2(S)}^2 = \int_S\left(\int_s^t \partial_t u_\varepsilon(\tau,x)\mathrm{d}\tau\right)^2 \mathrm{d}x \le \sqrt{|t-s|}\int_{([0,T]\times S)}(\partial_t u_\varepsilon(\tau,x))^2 \mathrm{d}\tau\mathrm{d}x.$$

根据引理 8，以及嵌入定理 $H^1(S) \subset\subset L^\infty_{loc}(S) \subset L^2_{loc}(S)$. 能够推得(39).

根据引理 3，引理 4，引理 5，引理 6 和引理 7，使用类似文献[8] 的方法，能得(40) 和(41).

记 $q := \partial_x^2 u$. 在$[0,\infty)\times S$的分布意义下有

$$\partial_t q + u\partial_x q + \widetilde{P} = 0. \tag{44}$$

由于 $\widetilde{P}$ 中有非线性项$(\partial_x^2 u)^2 = q^2$，则需要证明 q_ε 在 L^2 上收敛到 q.

引理 10 令 $2<p<\infty$. 若假设 1 和假设 2 均成立，则对每一个 $T\geq 0$，$1<\rho<\infty$ 以及 $1<r\leq \frac{p}{2}$，存在一个映射$\overline{q^2}\in L^\infty([0,\infty),L^r(S))$，使得序列 $q_{\varepsilon_h}^2$ 在 $L^\rho([0,T],L^r(S))$ 上有

$$q_{\varepsilon_h}^2 \rightharpoonup \overline{q^2}. \tag{45}$$

此外在$[0,\infty)\times S$的分布下几乎处处有

$$q^2 \leq \overline{q^2}, \tag{46}$$

和

$$\partial_t \overline{q^2} + \partial_x u\,\overline{q^2} + \partial_x(u\overline{q^2}) + 2\widetilde{P}q \leq 0. \tag{47}$$

证明 (45) 式可直接由(15) 式和引理 7 得到.

不等(46) 式可由 Jensen 不等式得到. 在(35) 式的两边同乘 $2q_\varepsilon$，得

$$\partial_t(q_\varepsilon^2) + \partial_x u_\varepsilon q_\varepsilon^2 + \partial_x(u_\varepsilon q_\varepsilon^2) + 2\widetilde{P}_\varepsilon q_\varepsilon = \varepsilon\partial_x^2(q_\varepsilon^2) - 2\varepsilon q_\varepsilon^2 \leq \varepsilon\partial_x^2(q_\varepsilon^2).$$

因此，不等式(47) 可根据(38)、(39)、(41) 和(45) 得到.

引理 11 令 $2<p<\infty$. 若假设 1 和假设 2 均成立，则在$[0,\infty)\times S$的分布意义下

$$\partial_t(q^2) + \partial_x u q^2 + \partial_x(uq^2) + 2\widetilde{P}q = 0. \tag{48}$$

证明 详见文献[7－8].

推论 2 令 $2<p<\infty$. 若假设 1 和假设 2 成立. 那么柯西问题(6) 的解集$\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L_{loc}^\infty([0,\infty),H^2(S))$ 上是紧致的并且对每一 $T>0$ 存在一个递减至零的正序列$\{\varepsilon_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ 以及一个函数 $u\in L^\infty([0,\infty),H^2(S))\cap H^1([0,T];H^1(S))$，使得在 $L^\infty([0,T],H^2(S))$ 上，有

$$u_{\varepsilon_h} \rightarrow u. \tag{49}$$

证明 将(47) 式减(48) 式，得

$$\partial_t[\overline{q^2}-q^2] - \partial_x u[\overline{q^2}-q^2] + \partial_x[u(\overline{q^2}-q^2)] \leq 0. \tag{50}$$

由于(见文献[8])

$$\lim_{t\to 0}\int_S q^2\,dx = \lim_{t\to 0}\int_S \overline{q^2}\,dx = \int_S(\partial_x^2 u_0)^2\,dx.$$

则直接由不等(50) 式可得，对每一 $T>0$，在 $L^\infty([0,T],L^2(S))$ 上，有

$$q_{\varepsilon_h} \rightarrow q. \tag{51}$$

根据式(51) 并结合引理 9，可得(49) 式.

4 主要结果

定义 1 连续函数 $u=u(t,x)$ 称为柯西问题(5) 的弱解，如果满足

(i) $u(t,x)\in C([0,+\infty);C^1(S))\cap L^\infty([0,+\infty);H^2(S))$；

(ii) u 在分布意义下满足满足方程 (5)；

(iii) 对于每个 $t>0$，$\|u(t,\cdot)\|_{H^2(S)} \leq \|u_0\|_{H^2(S)}$.

定理 1 若假设 2 成立，则柯西问题(5) 具有弱整体解 $u(t,x)\in C([0,+\infty);C^1(S))\cap L^\infty([0,+\infty);H^2(S))$，并且满足能量守恒

$$I(t) = I(0). \tag{52}$$

证明 根据前面各部分的准备工作，我们能够得出定理 1.

当 $\varepsilon\rightarrow 0^+$，令 $u(t,x)$ 为黏性渐近解 $u_\varepsilon(t,x)$ 的极限. 由引理 3，引理 6，引理 7，以及推论 2，可知 $u(t,x)\in C([0,+\infty);C^1(S))\cap L^\infty([0,+\infty);H^2(S))$ 可知定义 1 中的(i)，(ii) 成立. 结合引理 3 和引理 4，

可知定义 1 中的(iii) 成立.

下证能量守恒.

由于本文考虑的是柯西问题(5) 的周期解，因此证明周期上的能量守恒

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\int_0^1(2uu_t+2u_xu_{xt}+2u_{xx}u_{xxt})\mathrm{d}x=\int_0^1 2u(-3uu_x+2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-2u_xu_{xxx}-uu_{xxxxx})\mathrm{d}x=$$
$$-6\int_0^1 uu_x\mathrm{d}x+4\int_0^1 uu_xu_{xx}\mathrm{d}x+2\int_0^1 u^2u_{xxx}\mathrm{d}x-4\int_0^1 uu_xu_{xxxx}\mathrm{d}x-2\int_0^1 u^2u_{xxxxxx}\mathrm{d}x=0.$$

因此，二阶 Camassa-Holm 方程满足能量守恒.

参　考　文　献

[1] Constantin A, Kolev B. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle[J]. Commentarii Mathematic Helvetici, 2003, 78(4): 787-804.

[2] Coclite G M, Holden H, Karlsen K H. Well-posedness of higher-order Camassa-Holm equations[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(3): 929-963.

[3] Camassa R, Holm D D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. Physical Review Letters, 1993, 71(11): 1661-1664.

[4] Constantin A. On the Cauchy problem for the periodic Camassa-Holm equation[J]. Journal of Differential Equations, 1997, 141(2): 218-235.

[5] Constantin A, Escher J. Global weak solutions for a shallow water equation[J]. Indiana University mathematics journal, 1998, 47(4): 1527-1545.

[6] Constantin A, Molinet L. Global weak solutions for a shallow water equation[J]. Communications in Mathematical Physics, 2000, 211(1): 45-61.

[7] Xin Z, Zhang P. On the weak solutions to a shallow water equation[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2000, 53(11): 1411-1433.

[8] Coclite G M, Holden H, Karlsen K H. Global weak solutions to a generalized hyperelastic-rod wave equation[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2005, 37(4): 1044-1069.

[9] Ding D P, LYU P. Conservative solutions for higher-order Camassa-Holm equations[J]. Journal Mathmatical Physics, 2010, 51(7): 072701.

[10] Ding D P, Liu X. The Local Well-posedness of The Higher-order Camassa-Holm Equation[J]. International Journal of Mathematics Trends and Technology, 2013, 4(4): 58-64.

[11] Tian L X, Zhang P, Xia L M. Global existence for the higher-order Camassa-Holm shallow water equation[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(7): 2468-2474.

[12] Stanislavova M, Stefanov A. On global finite energy solution of the Camassa-Holm equation[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2005, 11(5): 511-531.

[13] McOwen R C. Partial differential equations[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

[14] Coclite G M, Holden H, Karlsen K H. Well-posedness of solutions of a Parabolic elliptic system[J]. Discrete Continue Dynamic Systems, 2005, 13(3): 659-682,

[15] Simon J. Compact sets in the space $L^p((0,T),B)$[J]. Annali di Matematica pura ed applicata, 1986, 146: 65-96.

Global Weak Solution for the Periodic 2-order Camassa-Holm Equation

DING Danping, ZHANG Shuanghua

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: In this paper, the Cauchy problem of the second-order Camassa-Holm equation under periodic conditions is considered. With singular perturbation approach, a viscous equation is constructed. Applying contraction mapping principle and priori estimate, the existence of viscous solutions is obtained. Then, according to the compactness of viscous solutions, the existence of global weak solution for the periodic 2-order Camassa-Holm equation in finite energy space is obtained.

Keywords: periodic 2-order Camassa-Holm equation; weak solution; global existence