文章编号:1000-2367(2023)02-0063-07　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.02.007

# 算子及其函数的(R)性质的判定

胡添翼,窦艳妮

(陕西师范大学 数学与统计学院,西安 710119)

**摘　要**:令 $H$ 为无限维复可分的 Hilbert 空间,$H$ 上有界线性算子的全体为 $B(H)$.用 $\sigma(\boldsymbol{T})$,$\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$ 和 $\sigma_a(\boldsymbol{T})$ 分别表示为算子 $\boldsymbol{T}\in B(H)$ 的谱集,Browder 本质逼近点谱和逼近点谱.称算子 $\boldsymbol{T}\in B(H)$ 满足(R)性质,若 $\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})=\pi_{00}(\boldsymbol{T})$,其中 $\pi_{00}(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}):0<n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}$.主要借助新的谱集给出了算子满足(R)性质新的判定,并进一步得出了算子函数满足(R)性质的充分必要条件.

**关键词**:(R)性质;算子函数;谱

**中图分类号**:O177.2　　**文献标志码**:A

2011 年,Aiena P 首次介绍了有界线性算子的(R)性质.本文的创新之处在于借助新的谱集研究了算子及其函数的(R)性质,同时将降标以及借助新的谱集工具和各类集合运用于算子及其函数的(R)性质的判定中,从不同角度、给出了算子及其函数满足(R)性质的等价刻画,尤其丰富和发展了 Weyl 型定理.

## 1　预备知识

在本文中,$H$ 表示一个无限维复可分的 Hilbert 空间,$H$ 上的有界线性算子的全体表示为 $B(H)$.若 $\boldsymbol{T}\in B(H)$ 的零空间 $N(\boldsymbol{T})$ 是有限维且其值域 $R(\boldsymbol{T})$ 闭,称 $\boldsymbol{T}$ 为上半 Fredholm 算子;如果值域 $R(\boldsymbol{T})$ 的余维数是有限的,则称 $\boldsymbol{T}\in B(H)$ 为下半 Fredholm 算子.若 $\boldsymbol{T}$ 既是下半 Fredholm 算子又是上半 Fredholm 算子,称 $\boldsymbol{T}$ 为 Fredholm 算子.对一个半 Fredholm 算子 $\boldsymbol{T}$ 而言(上半或者下半),其指标定义为 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{T})=n(\boldsymbol{T})-d(\boldsymbol{T})$,其中 $d(\boldsymbol{T})=\dim(H/R(\boldsymbol{T}))$,$n(\boldsymbol{T})=\dim N(\boldsymbol{T})$.对 $\boldsymbol{T}\in B(H)$,把满足 $N(\boldsymbol{T}^n)=N(\boldsymbol{T}^{n+1})$ 的最小非负整数称为 $\boldsymbol{T}$ 的升标 $\mathrm{asc}(\boldsymbol{T})$,当 $\mathrm{asc}(\boldsymbol{T})=+\infty$ 时,表示这样的整数不存在;把满足 $R(\boldsymbol{T}^n)=R(\boldsymbol{T}^{n+1})$ 的最小非负整数称为降标 $\mathrm{des}(\boldsymbol{T})$,同样当 $\mathrm{des}(\boldsymbol{T})=+\infty$ 时,表示这样的整数不存在.如果 $\boldsymbol{T}$ 为上半 Fredholm 算子且 $n(\boldsymbol{T})=0$,则称 $\boldsymbol{T}\in B(H)$ 为下有界算子;指标为零 Fredholm 算子称为是 Weyl 算子;具有有限升降标的 Fredholm 算子称为是 Browder 算子.事实上 $\boldsymbol{T}$ 为 Browder 算子当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 为半 Fredholm 算子且具有有限的升标和降标;当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 为 Weyl 算子且有限的降标或者有限的升标.

算子 $\boldsymbol{T}$ 的点谱,Weyl 谱,Browder 谱,逼近点谱,Browder 本质逼近点谱,本质逼近点谱定义如下:

$\sigma_w(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\mathbf{C}:\boldsymbol{T}-\lambda I$ 不是 Weyl 算子$\}$,

$\sigma_b(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\mathbf{C}:\boldsymbol{T}-\lambda I$ 不是 Browder 算子$\}$,

$\sigma_a(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\mathbf{C}:\boldsymbol{T}-\lambda I$ 不是下有界算子$\}$,

$\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\mathbf{C}:\boldsymbol{T}-\lambda I$ 不是上半 Fredholm 算子或 $\mathrm{asc}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$,

$\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\mathbf{C}:\boldsymbol{T}-\lambda I$ 不是上半 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{T}-\lambda I)\leq 0\}$.

**收稿日期**:2022-03-16;**修回日期**:2022-10-17.

**基金项目**:陕西省自然科学基金(2021JM-189).

**作者简介**:胡添翼(1998—),男,河北石家庄人,陕西师范大学硕士研究生,研究方向为算子理论与算子代数,E-mail:1104993517@qq.com.

**通信作者**:窦艳妮(1978—),女,陕西师范大学副教授,博士,研究方向为算子理论与算子代数,E-mail:douyn@snnu.edu.cn.

记 $\rho_b(\boldsymbol{T})=\mathbf{C}\backslash\sigma_b(\boldsymbol{T}),\rho_w(\boldsymbol{T})=\mathbf{C}\backslash\sigma_w(\boldsymbol{T}),\rho_a(\boldsymbol{T})=\mathbf{C}\backslash\sigma_a(\boldsymbol{T}),\rho_{ab}(\boldsymbol{T})=\mathbf{C}\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$.

用 $\sigma_0(\boldsymbol{T})$ 表示 $\boldsymbol{T}$ 的正规特征值之集,即 $\sigma_0(\boldsymbol{T})=\sigma(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_b(\boldsymbol{T})$,其中 $\sigma(\boldsymbol{T})$ 表示算子 $\boldsymbol{T}$ 的谱集.对于集合 $E\subseteq\mathbf{C}$,用 acc $E$ 来表示 $E$ 中聚点的全体,用 iso $E$ 来表示 $E$ 中孤立点的全体.

文献[1]于 1909 年发现 Hilbert 空间中自伴算子的 Weyl 谱恰好等于该算子的谱集除去有限重的孤立特征值,得出了 Weyl 定理这一结论.之后,LEE 和 HARTE 等数学研究者将 Weyl 定理进行了进一步的推广(文献[2-4]等).多年来备受关注的($R$)性质就是 Weyl 定理的一种变型(文献[5-7]等).在本文中,用新的谱集,给出了对于算子及其函数满足($R$)性质的新判定方法.

## 2 有界线性算子的性质的判定

对 $\boldsymbol{T}\in B(H)$,若 $\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})=\pi_{00}(\boldsymbol{T})$,称 $\boldsymbol{T}$ 满足($R$)性质(文献[5]),记作 $\boldsymbol{T}\in(R)$,其中 $\pi_{00}(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(\boldsymbol{T}):0<n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}$.

首先定义一个谱集,令 $\rho_1(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty$,且存在 $\epsilon>0$,使得 $0<|\mu-\lambda|<\epsilon$ 时:$\mu\notin\sigma_w(\boldsymbol{T})$ 并且 $N(\boldsymbol{T}-\mu I)\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R[(\boldsymbol{T}-\mu I)^n]\}$ 令 $\sigma_1(\boldsymbol{T})=\mathbf{C}\backslash\rho_1(\boldsymbol{T})$,显然 $\sigma_1(\boldsymbol{T})\subseteq\sigma_w(\boldsymbol{T})\subseteq\sigma_b(\boldsymbol{T})\subseteq\sigma(\boldsymbol{T})$.

**定理 1** 设 $\boldsymbol{T}\in B(H)$,则 $\boldsymbol{T}$ 满足($R$)性质当且仅当 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$.

**证明** 必要性:设 $\boldsymbol{T}$ 满足($R$)性质.包含关系 $[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\subseteq\sigma_b(\boldsymbol{T})$ 显然成立.下证反包含.

对任给的 $\lambda_0\notin[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$,不妨设 $\lambda_0\in\sigma(\boldsymbol{T})$,则 $n(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)>0$.若 $\lambda_0\notin\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$,即 $\lambda_0\in\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$.由 $\boldsymbol{T}\in(R)$ 知 $\boldsymbol{T}-\lambda_0 I$ 为 Browder 算子,则 $\lambda_0\notin\sigma_b(\boldsymbol{T})$.下面设 $\lambda_0\notin\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$.于是存在 $\epsilon'>0$,使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\epsilon'$ 时,$\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty$.

下面分为两种情况:

情况 1 $\lambda_0\notin\sigma_1(\boldsymbol{T})$.

由 $\rho_1(\boldsymbol{T})$ 的定义知 $n(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)<\infty$,且存在 $\epsilon>0(\epsilon<\epsilon')$,使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\epsilon$ 时,$\boldsymbol{T}-\lambda I$ 为 weyl 算子且 $N(\boldsymbol{T}-\mu I)\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R[(\boldsymbol{T}-\lambda I)^n]$.由 $\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty$ 知 $\lambda\in\rho_b(\boldsymbol{T})$.设 $\operatorname{asc}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=p$,则 $N(\boldsymbol{T}-\lambda I)=N(\boldsymbol{T}-\lambda I)\cap\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R[(\boldsymbol{T}-\lambda I)^n]\subseteq N(\boldsymbol{T}-\lambda I)\cap R[(\boldsymbol{T}-\lambda I)^p]=\{0\}$(文献[8]中引理 3.4),即 $N(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\{0\}$,从而 $\boldsymbol{T}-\lambda I$ 可逆,即 $\lambda_0\in\operatorname{iso}\sigma(\boldsymbol{T})$.又 $0<n(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)<\infty$,故 $\lambda_0=\pi_{00}(\boldsymbol{T})$.由 $\boldsymbol{T}$ 满足($R$)性质知 $\lambda_0\notin\sigma_b(\boldsymbol{T})$.

情况 2 $\lambda_0\notin\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})$.

此时根据半 Fredholm 算子的摄动定理知,存在 $\epsilon>0(\epsilon<\epsilon')$,使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\epsilon$ 时,$\boldsymbol{T}-\lambda I$ 为上半 Fredholm 算子,$\operatorname{ind}(\boldsymbol{T}-\lambda I)\leq 0$ 且 $N(\boldsymbol{T}-\lambda I)\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R[(\boldsymbol{T}-\lambda I)^n]$.又由于 $\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty$,从而 $d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\leq n(\boldsymbol{T}-\lambda I)$(文献[8]中定理 4.3).于是 $n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=d(\boldsymbol{T}-\lambda I)$,即 $\lambda\in\rho_w(\boldsymbol{T})$.又 $\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty$,再次得到 $\lambda\in\rho_b(\boldsymbol{T})$,类似于前面证明可得 $\boldsymbol{T}-\lambda I$ 可逆,从而 $\lambda_0\in\operatorname{iso}\sigma(\boldsymbol{T})$.又 $0<n(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)<\infty$,故 $\lambda_0\in\pi_{00}(\boldsymbol{T})$.由 $\boldsymbol{T}$ 满足($R$)性质知 $\lambda_0\notin\sigma_b(\boldsymbol{T})$.由上证明知 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$.必要性得证.

充分性:由于 $[\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\cup\pi_{00}(\boldsymbol{T})]\cap\{[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\}=\varnothing$,故 $[\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\cup\pi_{00}(\boldsymbol{T})]\cap\sigma_b(\boldsymbol{T})=\varnothing$.于是 $\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\subseteq\rho_b(\boldsymbol{T})$,$\pi_{00}(\boldsymbol{T})\subseteq\rho_b(\boldsymbol{T})$.

这样就证明了 $\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})=\pi_{00}(\boldsymbol{T})$,即 $\boldsymbol{T}\in(R)$.

**注解 1** 在定理 1 中,当 $\boldsymbol{T}$ 满足($R$)性质时,$\sigma_b(\boldsymbol{T})$ 分解的三部分缺一不可.

**例 1** 设 $\boldsymbol{T}\in B(\ell^2)$ 定义为:$\boldsymbol{T}(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(x_2,x_3,x_4,\cdots)$ 则 $\boldsymbol{T}$ 满足($R$)性质.但是 $\sigma_b(\boldsymbol{T})\neq$

$[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$，即$\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$″不能缺.

**例 2**　令 $A,B\in B(\ell^2)$ 定义为：$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,x_3,\cdots)$，$B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(x_2,x_3,x_4,\cdots)$，定义 $\boldsymbol{T}\in B(\ell^2\oplus\ell^2)$ 为：$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$.则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$ 性质.但是 $\sigma_b(\boldsymbol{T})\neq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$，“$\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$”不能缺.

**例 3**　令 $\boldsymbol{T}\in B(\ell^2)$ 定义为：$\boldsymbol{T}(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,x_3,\cdots)$，则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$ 性质.但是$\sigma_b(\boldsymbol{T})\neq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$，即“$\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$”不能缺.

令 $\sigma_c(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in\mathbf{C}:R(\boldsymbol{T}-\lambda I)$ 不闭$\}$.根据 $\rho_1(\boldsymbol{T})$ 的定义可知：$\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_c(\boldsymbol{T})\subseteq\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})$，$\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cup\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)>d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\subseteq\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})$. 于是由定理 1 可得：

**推论 1**　设 $\boldsymbol{T}\in B(H)$，则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$ 性质当且仅当 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_c(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cup\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)>d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$.通过计算可知$[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\subseteq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$，$[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]=[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\cap\sigma_c(\boldsymbol{T})]\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\cap\rho_c(\boldsymbol{T})]\subseteq[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_c(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}):\lambda\in\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\cap\rho_c(\boldsymbol{T})\}$ 而$\{\lambda\in\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}):\lambda\in\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\cap\rho_c(\boldsymbol{T})\}\subseteq\{\lambda\in\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\cup\{\lambda\in\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})\cap\rho_c(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\neq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\subseteq\{\lambda\in\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\cup\{\lambda\in\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}):\lambda\in\rho_{SF}(\boldsymbol{T}),\lambda\notin\rho_w(\boldsymbol{T})\}\subseteq\{\lambda\in\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\cup[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.

故由定理 1 可证得下列事实.

**推论 2**　设 $\boldsymbol{T}\in B(H)$，则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$ 性质当且仅当 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_c(t)]\cup\{\lambda\in\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$.

本节继续用 $\sigma_1(\boldsymbol{T})$ 及降标考虑$(R)$ 性质.由于 $\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\subseteq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\subseteq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$，于是当 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$ 时，由定理 1 或者推论 2 知 $\boldsymbol{T}\in(R)$.

当 $\mathrm{des}(\boldsymbol{T})<\infty$ 时，$d(\boldsymbol{T})\leq n(\boldsymbol{T})$，于是 $\sigma_1(\boldsymbol{T})\subseteq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$，从而$[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\subseteq\sigma_1(\boldsymbol{T})\subseteq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]\cup\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$.又由于$[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\subseteq\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$，于是$\{[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\}\subseteq\{[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\}$.根据定理 1，可得下列结论：

**推论 3**　设 $\boldsymbol{T}\in B(H)$，则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$ 性质当且仅当 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.

在推论 3 中，若将 $\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$ 换为$\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$，可得下列结论：

**推论 4**　设 $\boldsymbol{T}\in B(H)$，若 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$，则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$ 性质.

**证明**　$\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\subseteq\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$，$\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]\cup[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{iso}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}]$.

断言：$\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{iso}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}\subseteq\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.

事实上，设 $\lambda_0\in\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\mathrm{iso}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$ 但 $\lambda_0\notin\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}\cup[\mathrm{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.由 $\lambda_0\in\mathrm{iso}\{\lambda\in\mathbf{C}:n(\boldsymbol{T}-\lambda I)\geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$ 知，当 $0<|\lambda-\lambda_0|$

充分小时,$n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<d(\boldsymbol{T}-\lambda I)$.故 $\lambda_- \in \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$.又由 $\lambda_0 \notin [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$,$\lambda_0 \in \sigma_a(\boldsymbol{T}) \backslash \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$,则 $\mathrm{asc}(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)<\infty$,故 $n(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I) \leq d(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)$(文献[8]中定理4.2).又由 $\lambda_0 \in \mathrm{iso}\{\lambda \in \mathbf{C}: n(\boldsymbol{T}-\lambda I) \geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$ 得 $n(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I) \geq d(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)$.于是 $n(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)=d(\boldsymbol{T}-\lambda_0 I)$,即 $\lambda_0 \in \rho_w(\boldsymbol{T})$,这就与 $\lambda_0 \in \sigma_1(\boldsymbol{T})$ 矛盾.

这样就有 $\sigma_b(\boldsymbol{T}) \subseteq [\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: n(\boldsymbol{T}-\lambda I) \geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}] \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.反包含显然成立.

故由推论3知满足$(R)$性质.

在推论4中反之不成立.例如令 $A,B \in B(\ell^2)$ 定义为:$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(x_2,x_3,x_4,\cdots)$,$B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,0,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots)$,定义 $\boldsymbol{T} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ 为:$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$性质.但是 $\sigma_b(\boldsymbol{T}) \neq [\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I) \geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}] \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.

下面给出 $\boldsymbol{T} \in (R)$ 的充要条件.

**推论5** 设 $\boldsymbol{T} \in B(H)$,则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$性质当且仅当 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I) \geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}] \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_c(\boldsymbol{T})]$.

当 $\mathrm{des}(\boldsymbol{T})<\infty$ 时有 $d(\boldsymbol{T}) \leq n(\boldsymbol{T})$,于是 $\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\} \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C}: n(\boldsymbol{T}-\lambda I) \geq d(\boldsymbol{T}-\lambda I)\}$.可以证明下列事实.

**推论6** 设 $\boldsymbol{T} \in B(H)$,

(1)若 $\sigma_b(\boldsymbol{T}) \subseteq \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_c(\boldsymbol{T})]$,则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$性质;

(2)若 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}] \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_c(\boldsymbol{T})]$,则 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$性质.

但推论6中的反之均不成立,下面在推论6的基础上,给出充要条件.

**推论7** 设 $\boldsymbol{T} \in B(H)$,则下列叙述等价:

(1) $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$性质;

(2) $\sigma_b(\boldsymbol{T}) \subseteq \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\} \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_c(\boldsymbol{T})] \cup \{\lambda \in \mathbf{C}: n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$;

(3) $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}] \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\} \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_c(t)] \cup \{\lambda \in \mathbf{C}: n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$.

## 3 算子函数的性质判定

$Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$ 表示在 $\sigma(\boldsymbol{T})$ 的某个邻域上的解析但是在 $\sigma(\boldsymbol{T})$ 的任一分支上不为常值的函数的全体.

**注解2** (1)当算子 $\boldsymbol{T}$ 满足$(R)$性质时,其函数不一定满足$(R)$性质.相反,当算子的某一个函数满足$(R)$性质时,算子本身不一定满足$(R)$性质.

通过下面的例子来说明这一事实.

**例4** 令 $A,B \in B(\ell^2)$ 定义为:$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots)$,$B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_2,x_3,\cdots)$,定义 $\boldsymbol{T} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ 为:$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} A+I & 0 \\ 0 & B-I \end{pmatrix}$.设 $p(z)=(z+1)(z-1)(z \in \mathbf{C})$.则 $\boldsymbol{T} \in (R)$ 但 $P(\boldsymbol{T}) \notin (R)$.

**例5** 令 $A,B \in B(\ell^2)$ 定义为:$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots)$,$B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,0,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots)$,定义 $\boldsymbol{T} \in B(\ell^2 \oplus \ell^2)$ 为:$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} A+I & 0 \\ 0 & B-I \end{pmatrix}$.令 $p(z)=z^2(z \in \mathbf{C})$.则 $P(\boldsymbol{T}) \in (R)$ 但 $\boldsymbol{T} \notin (R)$.

下面，讨论算子函数满足($R$)性质的条件.

**定理 2** 设 $\boldsymbol{T}\in B(H)$，则对任意 $f\in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$，$f(\boldsymbol{T})\in(R)$ 当且仅当下列条件之一成立：

(1) $\sigma(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$；

(2) $\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.

**证明** 必要性：设对任意 $f\in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$，都有 $f(\boldsymbol{T})\in(R)$.显然 $\boldsymbol{T}\in(R)$.

分两种情况：

(1)设 $\sigma_0(\boldsymbol{T})=\varnothing$.则 $\sigma(\boldsymbol{T})=\sigma_b(\boldsymbol{T})$.由定理 1 知 $\sigma(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$ 显然成立.

(2)设 $\sigma_0(\boldsymbol{T})\neq\varnothing$.只需证 $\sigma_b(\boldsymbol{T})\subseteq[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.

首先断言 1 $\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}\subseteq\sigma_0(\boldsymbol{T})$.

事实上，取 $\lambda_1\in\sigma_0(\boldsymbol{T})$，$\lambda_2\in\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}$.令 $\sigma_1=\{\lambda_1\}$，$\sigma_2=\{\lambda_2\}$，$\sigma_3=\sigma(\boldsymbol{T})\setminus\{\lambda_1,\lambda_2\}$.则 $\sigma_i(1\leq i\leq 3)$ 均为 $\sigma(\boldsymbol{T})$ 的闭开子集. 此时由文献[9]中定理 2.10 可知 $\boldsymbol{T}$ 可表示为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_1&0&0\\0&\boldsymbol{T}_2&0\\0&0&\boldsymbol{T}_3\end{pmatrix},$$

其中 $\sigma(\boldsymbol{T}_i)=\sigma_i(i=1,2,3)$.令 $f(z)=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)$，则

$$f(\boldsymbol{T})=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{T}_1)&0&0\\0&f(\boldsymbol{T}_2)&0\\0&0&f(\boldsymbol{T}_3)\end{pmatrix}.$$

由谱映射定理可知 $\sigma(f(\boldsymbol{T}_1))=\sigma(f(\boldsymbol{T}_2))=\{0\}$，且 $0\notin\sigma(f_3(\boldsymbol{T}))$.显然 $0\in\operatorname{iso}\sigma(f_3(\boldsymbol{T}))$.

又因为 $f(\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{T}-\lambda_1I)(\boldsymbol{T}-\lambda_2I)$ 且$\{0\}\neq N(\boldsymbol{T}-\lambda_1I)\subseteq N(f(\boldsymbol{T}))$，所以 $n(f(\boldsymbol{T}))>0$，即 $0\in\pi_{00}(f(\boldsymbol{T}))$.由 $f(\boldsymbol{T})\in(R)$ 可知 $f(\boldsymbol{T})$ 为 Browder 算子.于是 $\boldsymbol{T}-\lambda_2I$ 为 Browder 算子，即 $\lambda_2\notin\sigma_b(\boldsymbol{T})$. 断言 1 成立.

断言 2 $\sigma_b(\boldsymbol{T})=\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$.

$\sigma_b(\boldsymbol{T})\supseteq\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$ 显然成立，下证 $\sigma_b(\boldsymbol{T})\subseteq\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$. 取 $\lambda_3\in\sigma_0(\boldsymbol{T})$，$\lambda_4\notin\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$. 令 $f(\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{T}-\lambda_3I)(\boldsymbol{T}-\lambda_4I)$.则 $0\in\sigma_a(f(\boldsymbol{T}))\setminus\sigma_{ab}(f(\boldsymbol{T}))$.由 $f(\boldsymbol{T})\in(R)$ 知，$f(\boldsymbol{T})$ 为 Browder 算子，从而 $\boldsymbol{T}-\lambda_4I$ 为 Browder 算子，即 $\lambda_4\notin\sigma_b(\boldsymbol{T})$.断言 2 得证.于是此时 $\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})=\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$.

则对 $\forall\lambda_0\notin[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$. 分为两种情况.

情况 1 $\lambda_0\notin\sigma_1(\boldsymbol{T})$.则 $n(\boldsymbol{T}-\lambda_0I)<\infty$，且存在 $\delta>0$，使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，有 $\lambda\in\rho_w(\boldsymbol{T})$，且 $N(\boldsymbol{T}-\lambda I)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(\boldsymbol{T}-\lambda I)^n]$.又由 $\lambda_0\notin[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$ 知 $\lambda_0\notin\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}$，接下来，类似于定理 1 的证明可知，$\lambda_0\in[\operatorname{iso}\sigma(\boldsymbol{T})\cap\rho(\boldsymbol{T})]$.由断言 1 可知 $\lambda_0\notin\sigma_b(\boldsymbol{T})$.

情况 2 $\lambda_0\notin\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})$.由 $\lambda_0\notin[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}]$ 知存在 $\delta>0$，使得当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，$\lambda\in\rho_w(\boldsymbol{T})$ 且 $\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty$，故 $\lambda_0\notin\sigma_b(\boldsymbol{T})$.

充分性：分两种情况证明.

情况 1 设定理 2 中(1)成立.

由于 $\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}\cap\{[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\}=\varnothing$，于是 $\sigma_0(\boldsymbol{T})=\sigma_0\boldsymbol{T}\cap\sigma(\boldsymbol{T})=\varnothing$.

$\sigma_b(\boldsymbol{T})=[\sigma_1(\boldsymbol{T})\cap\sigma_{ea}(\boldsymbol{T})]\cup[\operatorname{acc}\{\lambda\in\mathbf{C}:\operatorname{des}(\boldsymbol{T}-\lambda I)=\infty\}\cap\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\cup\{\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T}):n(\boldsymbol{T}-\lambda I)=0\}$.根据定理 1，$\boldsymbol{T}\in(R)$.

由 $\sigma_0(\boldsymbol{T})=\varnothing$ 以及 $\boldsymbol{T}\in(R)$ 知 $\sigma_a(\boldsymbol{T})=\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$ 且 $\pi_{00}(\boldsymbol{T})=\varnothing$.由于 $\sigma_a(\boldsymbol{T})$ 与 $\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$ 满足谱映射定理[10]，

于是任给 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,$\sigma_a(f(\boldsymbol{T})) = f(\sigma_a(\boldsymbol{T})) = f(\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})) = \sigma_{ab}(f(\boldsymbol{T}))$. 又由于 $\pi_{00}(f(\boldsymbol{T})) \subseteq f(\pi_{00}(\boldsymbol{T})) = \varnothing$,则 $\pi_{00}(f(\boldsymbol{T})) = \varnothing$.从而 $\sigma_a(f(\boldsymbol{T}))\backslash\sigma_{ab}(f(\boldsymbol{T})) = \pi_{00}(f(\boldsymbol{T})) = \varnothing$,即 $f(\boldsymbol{T}) \in (R)$.

情况 2 设定理 2 中(2)成立.

断言 1 $\sigma_a(\boldsymbol{T}) = \sigma(\boldsymbol{T})$.

由于 $\rho_a(\boldsymbol{T}) \cap \{[\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_{ea}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\} = \varnothing$,于是 $\rho_a(\boldsymbol{T}) \subseteq \rho_b(\boldsymbol{T})$.这样可得 $\sigma_a(\boldsymbol{T}) = \sigma(\boldsymbol{T})$.

断言 2 $\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) < \infty\} \subseteq \sigma_0(\boldsymbol{T})$.

由于 $\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) < \infty\} \cap \{[\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_{ea}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]\} = \varnothing$,于是 $\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) < \infty\} \cap \sigma_b(\boldsymbol{T}) = \varnothing$,即 $\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) < \infty\} \subseteq \sigma_0(\boldsymbol{T})$.

任给 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,设 $\mu_0 \in \sigma_a(f(\boldsymbol{T}))\backslash\sigma_{ab}(f(\boldsymbol{T}))$,令

$$f(\boldsymbol{T}) - \mu_0 I = (\boldsymbol{T} - \lambda_1 I)^{n_1}(\boldsymbol{T} - \lambda_2 I)^{n_2}\cdots(\boldsymbol{T} - \lambda_t I)^{n_t} g(\boldsymbol{T}), \tag{*}$$

其中,$\lambda_i \neq \lambda_i (i \neq j)$,$g(\boldsymbol{T})$ 可逆.则 $\lambda_i \in \rho_a(\boldsymbol{T})$ 或 $\lambda_i \in \sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$.那么由断言 1 及 $\boldsymbol{T} \in (R)$ 可知 $\lambda_i \in \rho_b(\boldsymbol{T})(1 \leq i \leq t)$.从而 $f(\boldsymbol{T}) - \mu_0 I$ 为 Browder 算子.

对 $\mu_0 \in \pi_{00}(f(\boldsymbol{T}))$ 且 $f(\boldsymbol{T}) - \mu_0 I$ 有同(*)的分解形式.不妨设 $\lambda_i \in \sigma(\boldsymbol{T})$,则 $\lambda_i \in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T})$.又 $n(f(\boldsymbol{T}) - \mu_0 I) < \infty$,则 $n(\boldsymbol{T} - \lambda_i I) < \infty$.由断言 2 可知,$\lambda_i \in \rho_b(\boldsymbol{T})(1 \leq i \leq t)$.从而 $f(\boldsymbol{T}) - \mu_0 I$ 为 Browder 算子.这样就证明了任给 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,$\sigma_a(f(\boldsymbol{T}))\backslash\sigma_{ab}(f(\boldsymbol{T})) = \pi_{00}(f(\boldsymbol{T}))$,于是 $f(\boldsymbol{T}) \in (R)$.

类似于推论 1 以及定理 2,可证明下列结论:

**推论 8** 设 $\boldsymbol{T} \in B(H)$,则对任意 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,$f(\boldsymbol{T}) \in (R)$ 当且仅当下列条件之一成立:

(1) $\sigma(\boldsymbol{T}) = [\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\} \cap \sigma_c(\boldsymbol{T})] \cup \{\lambda \in \mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) = d(\boldsymbol{T} - \lambda I)\} \cup \{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) = 0\}$;

(2) $\sigma_b(\boldsymbol{T}) = [\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\} \cap \sigma_c(\boldsymbol{T})] \cup \{\lambda \in \mathrm{acc}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) = d(\boldsymbol{T} - \lambda I)\}$.

从定理 2 可以看出,若任给 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,$f(\boldsymbol{T})$ 均满足$(R)$ 性质,则当 $\sigma_0(\boldsymbol{T}) \neq \varnothing$ 时,有 $\sigma_b(\boldsymbol{T}) = [\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_{ea}(\boldsymbol{T})] \cup [\mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\} \cap \sigma_{ab}(\boldsymbol{T})]$.

于是可以断言:若任给 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,$f(\boldsymbol{T})$ 均满足$(R)$ 性质,则当 $\sigma_0(\boldsymbol{T}) \neq \varnothing$ 时,一定有 $\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}) = \sigma_1(\boldsymbol{T}) \cup \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\}$.

事实上,由定理 2 的证明可看出,此时 $\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}) = \sigma_b(\boldsymbol{T})$,$\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) < \infty\} \subseteq \sigma_0(\boldsymbol{T})$,并且当 $\lambda \notin \sigma_1(\boldsymbol{T}) \cup \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\}$ 时,$\lambda \in [\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}): n(\boldsymbol{T} - \lambda I) < \infty\} \cup \rho(\boldsymbol{T})]$.于是断言成立.

**推论 9** 设 $\boldsymbol{T} \in B(H)$,则对任意 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,$f(\boldsymbol{T}) \in (R)$ 当且仅当下列条件成立:

(1) $\boldsymbol{T} \in (R)$;

(2)当 $\sigma_0(\boldsymbol{T}) \neq \varnothing$ 时,$\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}) = \sigma_1(\boldsymbol{T}) \cup \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\}$.

当 $\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}) = \sigma_1(\boldsymbol{T}) \cup \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\}$ 时,一定有 $\boldsymbol{T} \in (R)$.事实上,由 $\rho_{ab}(\boldsymbol{T}) \cap \sigma_1(\boldsymbol{T}) = \varnothing$ 以及半 Fredholm 算子摄动定理知 $\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}) = \sigma_b(\boldsymbol{T})$,于是 $\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}) \subseteq \sigma_0(\boldsymbol{T}) \subseteq \pi_{00}(\boldsymbol{T})$.又因为 $\pi_{00}(\boldsymbol{T}) \cap [\sigma_1(\boldsymbol{T}) \cup \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\}] = \varnothing$ 知 $\pi_{00}(\boldsymbol{T}) \subseteq \rho_{ab}(\boldsymbol{T})$.于是 $\pi_{00}(\boldsymbol{T}) \subseteq \sigma_0(\boldsymbol{T}) \subseteq \sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$.所以 $\boldsymbol{T} \in (R)$. 于是:

**推论 10** 设 $\boldsymbol{T} \in B(H)$,则对任意 $f \in Hol(\sigma(\boldsymbol{T}))$,$f(\boldsymbol{T}) \in (R)$ 当且仅当下列条件之一成立:

(1) $\sigma_0(\boldsymbol{T}) = \varnothing$ 且 $\boldsymbol{T} \in (R)$;

(2) $\sigma_0(\boldsymbol{T}) \neq \varnothing$,且 $\sigma_{ab}(\boldsymbol{T}) = \sigma_1(\boldsymbol{T}) \cup \mathrm{acc}\{\lambda \in \mathbf{C}: \mathrm{des}(\boldsymbol{T} - \lambda I) = \infty\}$.

## 参 考 文 献

[1] WEYL H V.Quadratische Formen,deren Differenz vollstetig ist[J].Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo,1909,27(1):373-392.

[2] HARTE R E,LEE W Y.Another note on Weyl's theorem[J].Transactions of the American Mathematical Society,1997,349(5):

2115-2124.

[3] RAKOCEVIC V. Operators obeying a-Weyl's theorem[J]. Revue Roumaine des Mathematiques Pures et Appliquees, 1989, 34(10): 915-919.

[4] RAKOCEVIC V. On a class of operators[J]. Matematicki Vesnik, 1985, 37: 423-426.

[5] AIENA P, GUILLÉN J R, PEÑA P. Property (R) for bounded linear operators[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2011, 8(4): 491-508.

[6] AIENA P, APONTE E, GUILLÉN J R, et al. Property (R) under perturbations[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2013, 10(1): 367-382.

[7] JIA B T, FENG Y L. Property (R) under compact perturbations[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2020, 17(2): 1-12.

[8] TAYLOR A E. Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators[J]. Mathematische Annalen, 1966, 163(1): 18-49.

[9] RADJAVI H, ROSENTHAL P. Invariant Subspaces[M]. Berlin: Springer, 1973.

[10] HARTE R E. Invertibility and singularity for bounded linear operators[M]. New York: Dekker, 1988.

# The judgement of property (R) for operators and their functions

Hu Tianyi, Dou Yanni

(College of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

**Abstract**: Let $H$ be an infinite dimensional separable complex Hilbert space and the totality of bounded operators on $H$ is $B(\boldsymbol{H})$. $\sigma(\boldsymbol{T})$, $\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})$ and $\sigma_a(\boldsymbol{T})$ denote the spectrum, the Browder essential approximate spectrum and approximate point spectrum of $T\in B(H)$ respectively. $T\in B(H)$ satisfies the property $(R)$ if $\sigma_a(\boldsymbol{T})\backslash\sigma_{ab}(\boldsymbol{T})=\pi_{00}(\boldsymbol{T})$, where $\pi_{00}(\boldsymbol{T})=\{\lambda\in \mathrm{iso}\,\sigma(\boldsymbol{T}): 0<n(\boldsymbol{T}-\lambda I)<\infty\}$. In this paper, we give a new judgment for operators for which property $(R)$ holds by means of the new spectral set. In addition, the necessary and sufficient conditions for operator functions to satisfy $(R)$ property are explored.

**Keywords**: property(R); function of operator; spectrum

[责任编校　陈留院　赵晓华]