文章编号:1000－2367(2019)03－0015－06 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2019.03.003

黎曼流形上二次曲率泛函临界度量的刚性结果

黄广月,陈玉

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:主要研究紧致黎曼流形上有关二次曲率泛函临界度量的刚性结果. 使用有关 Weyl 曲率张量的不等式估计与散度定理,得到了临界度量是 Einstein 度量以及常截面曲率度量的分类结果.

关键词:临界度量;Cotton 张量;Einstein 度量

中图分类号:O186.12 **文献标志码**:A

设 (M^n, g) 是 n 维的黎曼流形,其中 $n \geq 3$. Catino[1]研究了有关二次曲率泛函

$$\mathrm{F}_t = \int_M |\mathrm{Ric}|^2 + t\int_M R^2, t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

的一些刚性结果,其中 Ric 和 R 分别是 Ricci 曲率和数量曲率.Besse[2]观察到 Einstein 度量是 F_t 限制在 $\mathrm{M}_1(M^n)$ 上的临界度量,其中 $\mathrm{M}_1(M^n)$ 是体积为 1 的度量类空间.但是,临界度量并不都是 Einstein 度量.自然的问题是:在什么条件下,F_t 泛函的临界度量是 Einstein 度量.例如,对于积分条件下的刚性结果,见文献[3－5].本文主要研究在 Cotton 张量为零的条件下,临界度量的分类结果.

为了方便定理的陈述,先介绍相关的几何量.利用 Weyl 曲率张量与黎曼曲率张量的关系式:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

则有

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(A_{ik}g_{jl} - A_{il}g_{jk} + A_{jl}g_{ik} - A_{jk}g_{il}) = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(\mathring{R}_{ik}g_{jl} - \mathring{R}_{il}g_{jk} + \mathring{R}_{jl}g_{ik} - \mathring{R}_{jk}g_{il}) - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{2}$$

其中 $\mathring{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n}R\, g_{ij}$ 满足 $\mathrm{tr}(\mathring{R}_{ij}) = 0$,Schouten 张量 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 定义为:

$$\boldsymbol{A}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij} = \mathring{R}_{ij} + \frac{n-2}{2n(n-1)}Rg_{ij}.$$

Cotton 张量与 Schouten 张量的关系为:

$$C_{ijk} = A_{kj,i} - A_{ki,j} = \mathring{R}_{kj,i} - \mathring{R}_{ki,j} + \frac{n-2}{2n(n-1)}(R_{,i}g_{jk} - R_{,j}g_{ik}). \tag{3}$$

从(3)式可以看出:Cotton 张量关于前两个指标是反对称的,且关于任何两个指标求迹为零.

黎曼度量 g 是 F_t 在 $\mathrm{M}_1(M^n)$ 上的临界度量(见文献[1])当且仅当

$$\Delta R_{ij} = (1+2t)R_{,ij} - \frac{2t}{n}(\Delta R)g_{ij} - 2R_{ikjl}R_{kl} - 2tRR_{ij} + \frac{2}{n}(|R_{ij}|^2 + tR^2)g_{ij}, \tag{4}$$

$$[n + 4(n-1)t]\Delta R = (n-4)[|R_{ij}|^2 + tR^2 - \lambda], \tag{5}$$

收稿日期:2018-04-09;修回日期:2018-11-10.

基金项目:国家自然科学基金(11371018;11671121).

作者简介(通信作者):黄广月(1976－),男,河南濮阳人,河南师范大学教授,博士,研究方向为几何分析,E-mail:hgy@henannu.edu.cn.

其中 $\lambda=\mathrm{F}_t(g)$. 特别的,(4)式等价于

$$\Delta\mathring{\mathrm{R}}_{ij}=(1+2t)R_{,ij}-\frac{1+2t}{n}(\Delta R)g_{ij}-2R_{ikjl}\mathring{\mathrm{R}}_{kl}-\frac{2+2nt}{n}R\mathring{\mathrm{R}}_{ij}+\frac{2}{n}|\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2g_{ij}.\tag{6}$$

定理 1 设紧致黎曼流形 (M^n,g) 具有正数量曲率且 Cotton 张量为零,g 是在 $\mathrm{M}_1(M^n)$ 上关于泛函 F_t 的临界度量,其中:

$$\begin{cases}t\geq-\dfrac{3}{8}, & n=3;\\ t>-\dfrac{1}{3}, & n=4;\\ t>-\dfrac{3n-4}{2n(n-1)}, & n\geq5.\end{cases}\tag{7}$$

如果

$$|W-\frac{n-4}{\sqrt{2n}(n-2)}\mathring{\mathrm{R}}\mathrm{ic}\owedge g|<\sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}}(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+1)R,\tag{8}$$

则 M^n 是 Einstein 流形.特别的,如果 $n=3$,则 M^n 的截面曲率为正常数;如果

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}<t\leq-\dfrac{4-\sqrt{2}}{12}, & n=4;\\ -\dfrac{11}{40}<t\leq-\dfrac{44-3\sqrt{15}}{160}, & n=5;\\ -\dfrac{(3n-4)}{2n(n-1)}<t\leq-\left(\dfrac{3n-4}{2n(n-1)}-\dfrac{1}{2nC_n}\sqrt{\dfrac{n-2}{2(n-1)}}\right), & n\geq6,\end{cases}\tag{9}$$

则 $M^n(n\geq4)$ 的截面曲率为正常数,其中常数 C_n 由(18)式给出.

注 在文献[6]中,Sheng-Wang 研究了有关 Bach 平坦(即 $\frac{1}{n-3}W_{ikjl,kl}+\frac{1}{n-2}W_{ikjl}R^{kl}:=B_{ij}=0$)条件下临界度量的分类结果.利用 $W_{ijkl,l}=-\frac{n-3}{n-2}C_{ijk}$ 知:当 $n\geq4$ 时,$C_{ijk}=0$ 等价于 Weyl 曲率张量调和.

定理 2 设 (M^n,g) 具有正数量曲率的紧致黎曼流形,g 是在 $\mathrm{M}_1(M^n)$ 上关于泛函 F_t 的临界度量.如果

$$|W+\frac{2}{\sqrt{2n}(n-2)}\mathring{\mathrm{R}}\mathrm{ic}\owedge g|\leq\sqrt{\frac{n-1}{8(n-2)}}\left[\frac{2(n-4)}{[n+4(n-1)t]}\frac{\mathrm{F}_t(g)-|\mathring{R}_{ij}|^2}{R}-\right.$$
$$\left.\left(\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)}+\frac{2(n-4)(1+nt)}{n[n+4(n-1)t]}\right)R\right],\tag{10}$$

其中 $t\leq-\frac{1}{2}$,$\mathrm{F}_t(g)<|\mathring{R}_{ij}|^2$,则 M^n 一定是 Einstein 流形.特别的,如果 $n=3$,则 M^n 的截面曲率为正常数.

1 主要结果的证明

如果度量 g 是泛函 F_t 的临界度量,则从(6)式得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2&=|\nabla\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2+\mathring{\mathrm{R}}_{ij}\Delta\mathring{\mathrm{R}}_{ij}=|\nabla\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2+(1+2t)\mathring{\mathrm{R}}_{ij}R_{,ij}-\\&2R_{ikjl}\mathring{\mathrm{R}}_{kl}\mathring{\mathrm{R}}_{ij}-\frac{2+2nt}{n}R|\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2=|\nabla\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2+(1+2t)\mathring{\mathrm{R}}_{ij}R_{,ij}-\\&\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)}R|\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2+\frac{4}{n-2}\mathring{\mathrm{R}}_{ij}\mathring{\mathrm{R}}_{jk}\mathring{\mathrm{R}}_{ki}-2W_{ikjl}\mathring{\mathrm{R}}_{kl}\mathring{\mathrm{R}}_{ij}.\end{aligned}\tag{11}$$

对(11)式两边进行积分得

$$0=\int_M|\nabla\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2-\int_M(2W_{ikjl}\mathring{\mathrm{R}}_{kl}\mathring{\mathrm{R}}_{ij}-\frac{4}{n-2}\mathring{\mathrm{R}}_{ij}\mathring{\mathrm{R}}_{jk}\mathring{\mathrm{R}}_{ki}+\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)}R|\mathring{\mathrm{R}}_{ij}|^2)-$$

$$(1+2t)\int_M \mathring{R}_{ij,j}R_{,i}=\int_M |\nabla \mathring{R}_{ij}|^2-\int_M(2W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij}-\frac{4}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki}+$$
$$\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)}R|\mathring{R}_{ij}|^2)-\frac{(n-2)(1+2t)}{2n}\int_M |\nabla R|^2, \tag{12}$$

其中在第 2 个等式中使用了 $\mathring{R}_{ij,j}=\frac{n-2}{2n}R_{,i}$.因此，得到了下面的结果.

引理 1　设 (M^n,g) 是紧致的黎曼流形，g 是在 $\mathrm{M}_1(M^n)$ 上关于泛函 F_t 的临界度量，则

$$\int_M |\nabla \mathring{R}_{ij}|^2=\int_M(2W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik}-\frac{4}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki}+$$
$$\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)}R|\mathring{R}_{ij}|^2+\frac{(n-2)(1+2t)}{2n}|\nabla R|^2). \tag{13}$$

如果 $C_{ijk}=0$，则从(3)式知 Schouten 张量 A_{ij} 是 Codazzi 张量.因此，

$$\Delta A_{ij}=A_{ij,kk}=A_{ik,jk}=A_{ik,kj}+A_{lk}R_{lijk}+A_{il}R_{lkjk}=A_{ik,kj}-A_{lk}R_{ikjl}+A_{il}R_{lj}=$$
$$\mathring{R}_{ik,kj}+\frac{n-2}{2n(n-1)}R_{,ij}-R_{ikjl}\mathring{R}_{kl}+\mathring{R}_{ki}\mathring{R}_{jk}+\frac{1}{n}R\mathring{R}_{ij}=\frac{n-2}{2n}R_{,ij}+$$
$$\frac{n-2}{2n(n-1)}R_{,ij}+\frac{n}{n-2}\mathring{R}_{ki}\mathring{R}_{jk}+\frac{1}{n-1}R\mathring{R}_{ij}-W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}-\frac{1}{n-2}|\mathring{R}_{ij}|^2g_{ij}.$$

从而得到

$$\Delta\mathring{R}_{ij}=\frac{n-2}{2n}R_{,ij}+\frac{n}{n-2}\mathring{R}_{ki}\mathring{R}_{jk}+\frac{1}{n-1}R\mathring{R}_{ij}-W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}-$$
$$\frac{1}{n-2}|\mathring{R}_{ij}|^2g_{ij}-\frac{n-2}{2n(n-1)}((\Delta R)g_{ij}-R_{,ij}),$$

因此有

$$\frac{1}{2}|\Delta\mathring{R}_{ij}|^2=|\nabla\mathring{R}_{ij}|^2+\mathring{R}_{ij}\Delta\mathring{R}_{ij}=|\nabla\mathring{R}_{ij}|^2+\frac{n-2}{2(n-1)}R_{,ij}R_{ij}+$$
$$\frac{n}{n-2}\mathring{R}_{ki}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij}+\frac{1}{n-1}R|\mathring{R}_{ij}|^2-W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij}. \tag{14}$$

对(14)式进行积分得到了下面的结论.

引理 2　设 (M^n,g) 是紧致的黎曼流形.如果 Cotton 张量为零，则

$$\int_M |\nabla\mathring{R}_{ij}|^2=\int_M(W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij}-\frac{1}{n-1}R|\mathring{R}_{ij}|^2-\frac{n}{n-2}\mathring{R}_{ki}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij}+\frac{(n-2)^2}{4n(n-1)}|\nabla R|^2). \tag{15}$$

为了证明本文的主要定理，还需要下面的两个引理.

引理 3[7-8]　设 (M^n,g) 是黎曼流形.对于任意的实常数 $\rho\in\mathbf{R}$，

$$|-W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik}+\rho\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki}|\le\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}(|W|^2+$$
$$\frac{2(n-2)\rho^2}{n}|\mathring{R}_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}|\mathring{R}_{ij}|^2=\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\left|W+\frac{\rho}{\sqrt{2n}}\mathring{\mathrm{Ric}}\mathbin{\bigcirc\!\!\!\!\wedge} g\right||\mathring{R}_{ij}|^2. \tag{16}$$

引理 4　设 (M^n,g) 是 Einstein 流形，其中 $n\ge 4$.则

$$\int_M\left(\frac{1}{n}R-C_n|W|\right)|W|^2\le 0, \tag{17}$$

其中：

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6}}{4}, & n=4;\\[2mm] \dfrac{4\sqrt{10}}{15}, & n=5;\\[2mm] \dfrac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}+\dfrac{n^2-n-4}{2\sqrt{n(n-1)(n+1)(n-2)}}, & n\ge 6.\end{cases} \tag{18}$$

证明 由文献[9－10]知

$$\Delta W_{ijkl}=\frac{2}{n}R\ W_{ijkl}-2(2W_{ipkq}W_{pjql}+\frac{1}{2}W_{klpq}W_{pqij}),$$

$$2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql}+\frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}\leq C_n\mid W\mid^3.$$

因此,

$$\frac{1}{2}\Delta\mid W_{ijkl}\mid^2=\mid\nabla W\mid^2+\frac{2}{n}R\mid W\mid^2-2(2W_{ipkq}W_{pjql}+\frac{1}{2}W_{klpq}W_{pqij})W_{ijkl}\geq$$

$$2(\frac{1}{n}R-C_n\mid W\mid)\mid W\mid^2. \tag{19}$$

积分(19)式得(17)式.

定理 1 的证明 由(13)式和(15)式得

$$0=\int_M[-W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik}-\frac{n-4}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki}-\frac{1}{n-1}(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+1)R\mid\mathring{R}_{ij}\mid^2-$$

$$\frac{n-2}{2n}((1+2t)-\frac{n-2}{2(n-1)})\mid\nabla R\mid^2].$$

应用 $\rho=-\frac{n-4}{n-2}$ 的不等式(16)得

$$0\leq\int_M[(\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\mid W-\frac{n-4}{\sqrt{2n}(n-2)}\mathring{\mathrm{Ric}}\owedge g\mid-\frac{1}{n-1}(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+$$

$$1)R)\mid\mathring{R}_{ij}\mid^2-\frac{n-2}{2n}((1+2t)-\frac{n-2}{2(n-1)})\mid\nabla R\mid^2]. \tag{20}$$

明显地,当 t 满足(7)式时

$$\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+1>0,(1+2t)-\frac{n-2}{2(n-1)}\geq 0.$$

因此在(8)式下,由(20)式得到

$$0\leq\int_M[[\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\mid W-\frac{n-4}{\sqrt{2n}(n-2)}\mathring{\mathrm{Ric}}\owedge g\mid-\frac{1}{n-1}(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+$$

$$1)R]\mid\mathring{R}_{ij}\mid^2-\frac{n-2}{2n}((1+2t)-\frac{n-2}{2(n-1)})\mid\nabla R\mid^2]\leq 0, \tag{21}$$

这表明 $\mathring{R}_{ij}=0$ 且 g 是 Einstein 度量.由于 $\mathring{R}_{ij}=0$,这时(8)式变为:

$$\mid W\mid<\sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}}\left(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+1\right)R. \tag{22}$$

因此有

$$C_n\mid W\mid<\sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}}\left(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+1\right)C_nR. \tag{23}$$

如果 $n=3$,利用 3 维流形的 Weyl 曲率张量为零可知(23)式恒成立;如果 $n\geq 4$,则在条件(9)式下,

$$\sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}}\left(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n}+1\right)C_nR\leq\frac{1}{n}R,$$

恒成立,从而利用(17)式知 Weyl 曲率张量也为零.因此,利用(2)式知 M^n 的截面曲率是正常数.

这完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明 由(11)式和(5)式分别得到

$$\Delta\mid\mathring{R}_{ij}\mid^2=2\mid\nabla\mathring{R}_{ij}\mid^2+2(1+2t)\mathring{R}_{ij}R_{,ij}-\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)}R\mid\mathring{R}_{ij}\mid^2+$$

$$\frac{8}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki}-4W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij},$$

$$\Delta R^2 = 2|\nabla R|^2 + 2R\Delta R = 2|\nabla R|^2 + \frac{2(n-4)}{n+4(n-1)t}R|\mathring{R}_{ij}|^2 + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n[n+4(n-1)t]}R^3 - \frac{2(n-4)\lambda}{n+4(n-1)t}R.$$

由于对于任意的两个函数 u,v,$\Delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v}\Delta u-\frac{u}{v^2}\Delta v-2\nabla\left(\frac{u}{v}\right)\nabla\ln v$,因此

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^2}\right) &= \frac{1}{R^2}\Delta|\mathring{R}_{ij}|^2 - \frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^4}\Delta R^2 - 2\nabla\left(\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^2}\right)\nabla\ln(R^2) = \frac{2}{R^2}|\nabla\mathring{R}_{ij}|^2 - \\
&\frac{2}{R^4}|\nabla R|^2|\mathring{R}_{ij}|^2 + \frac{2(1+2t)}{R^2}\mathring{R}_{ij}R_{,ij} - 2\nabla\left(\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^2}\right)\nabla\ln(R^2) + \frac{8}{(n-2)R^2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki} - \\
&\frac{4}{R^2}W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij} + \frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^3} - \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^4}{R^3} - \\
&\left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right]\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R} = \\
&\frac{2}{R^4}|R\mathring{R}_{ij,k} - R_{,k}\mathring{R}_{ij}|^2 - \nabla\left(\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^2}\right)\nabla\ln(R^2) + \\
&\frac{8}{(n-2)R^2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki} - \frac{4}{R^2}W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij} + \frac{2(1+2t)}{R^2}\mathring{R}_{ij}R_{,ij} - \\
&\left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right]\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R} + \\
&\frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^3} - \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^4}{R^3}.
\end{aligned} \tag{24}$$

令 $f=\ln R^2$,$u=\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^2}$,则(24)式等价于

$$\begin{aligned}
\Delta_{(-f)}u &= \frac{2}{R^4}|R\mathring{R}_{ij,k} - R_{,k}\mathring{R}_{ij}|^2 + \frac{8}{(n-2)R^2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki} - \frac{4}{R^2}W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij} + \\
&\frac{2(1+2t)}{R^2}\mathring{R}_{ij}R_{,ij} - \left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right]\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R} + \\
&\frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^3} - \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^4}{R^3}.
\end{aligned}$$

对上式两边关于加权测度 $e^f dV$ 进行积分,得

$$\begin{aligned}
0 = \int_M &\Big(\frac{2}{R^4}|R\mathring{R}_{ij,k} - R_{,k}\mathring{R}_{ij}|^2 + \frac{4}{R^2}(-W_{ikjl}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij} + \frac{2}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ki}) - \\
&\frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^4}{R^3} + \frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)}\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R^3} - [\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \\
&\frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}]\frac{|\mathring{R}_{ij}|^2}{R} - \frac{(n-2)(1+2t)}{n}|\nabla R|^2R^{-2}\Big)e^f,
\end{aligned} \tag{25}$$

其中使用了有关加权测度的散度定理:

$$\int_M \frac{2(1+2t)}{R^2}\mathring{R}_{ij}R_{,ij}e^f = 2(1+2t)\int_M \mathring{R}_{ij}R_{,ij} = -\frac{(n-2)(1+2t)}{n}\int_M |\nabla R|^2R^{-2}e^f.$$

当 $t\leq -\frac{1}{2}$,对(25)式利用具有 $\rho=\frac{2}{n-2}$ 的不等式(16)得

$$\begin{aligned}
0 \geq \int_M &\left(-\frac{4}{R^2}\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\left|W + \frac{2}{\sqrt{2n}(n-2)}\mathring{\mathrm{Ric}} \owedge g\right| + \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)}\frac{\lambda - |\mathring{R}_{ij}|^2}{R^3} - \right. \\
&\left.\left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right]\frac{1}{R}\right)|\mathring{R}_{ij}|^2e^f.
\end{aligned} \tag{26}$$

当 $t \leq -\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{2(n-4)}{n+4(n-1)t} < 0,$$

$$\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)} < 0.$$

因此当满足(10)式时

$$0 \geq \int_M \left(-\frac{4}{R^2}\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\left|W + \frac{2}{\sqrt{2n}(n-2)}\mathring{\mathrm{R}}\mathrm{ic} \owedge g\right| + \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)}\frac{\lambda - |\mathring{R}_{ij}|^2}{R^3} - \left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right]\frac{1}{R}\right)|\mathring{R}_{ij}|^2 e^f \geq 0, \tag{27}$$

从而得到 $\mathring{R}_{ij}=0$,即 M^n 是 Einstein 流形.

因此完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Catino G.Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals[J].Calc Var Partial Differential Equations,2015,54:2921-2937.

[2] Besse A.Einstein Manifolds[M].Berlin:Springer-Verlag,2008.

[3] Gursky M,Viaclovsky J.A new variational characterization of three-dimensional space forms[J].Invent Math,2001,145:251-278.

[4] Gursky M,Viaclovsky J.Rigidity and stability of Einstein metrics for quadratic curvature functionals[J].J Reine Angew Math,2015,700:37-91.

[5] Huang G,Chen L.Some characterizations on critical metrics for quadratic curvature functions[J].Proc Amer Math Soc,2018,146:385-395.

[6] Sheng W,Wang L.Bach-flat critical metrics for quadratic curvature functionals[J].Ann Glob Anal Geom,2018,54:365-375.

[7] Huang G.Rigidity of Riemannian manifolds with positive scalar curvature[J].Ann Glob Anal Geom,2018,54:257-272.

[8] Fu H,Peng J.Rigidity theorems for compact Bach-flat manifolds with positive constant scalar curvature[J].Hokkaido Math J,2018,47:581-605.

[9] Hebey E,Vaugon M.Effective L_p pinching for the concircular curvature[J].J Geom Anal,1996,6:531-553.

[10] Huang G.Integral pinched gradient shrinking ρ-Einstein solitons[J].J Math Anal Appl,2017,451:1045-1055.

Some rigidity results for critical metrics of quadratic curvature functionals on Riemannian manifolds

Huang Guangyue,Chen Yu

(College of Mathematics and Information Science,Henan Normal University,Xinxiang 453007,China)

Abstract:In this paper,we study some rigidity results for Einstein metrics as the critical points of a family of known quadratic curvature functionals on compact manifolds.Using some estimates with respect to the Weyl curvature tensor and divergence theorems,we obtain that a critcal metric must be Einstein or constant sectional curvature.

Keywords:critical metric;Cotton tensor;Einstein metric

[责任编校 陈留院 赵晓华]