文章编号:1000-2367(2016)03-0024-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.03.005

非线性伪双曲方程的类 Carey 元高精度分析

李永献[1],杨晓侠[2]

(1.河南城建学院 数理学院,河南 平顶山 467036;2.平顶山学院 数学与统计学院,河南 平顶山 467000)

摘 要:研究了非协调类 Carey 元对非线性伪双曲方程的 Galerkin 逼近. 利用该元在能量模意义下非协调误差比插值误差高一阶的特殊性质,线性三角形元的高精度分析结果,平均值技巧和插值后处理技术,在抛弃传统的 Ritz 投影的情形下,得到了半离散格式能量模意义下的超逼近性质和整体超收敛结果. 同时,针对方程中系数为线性的情形建立一个具有二阶精度的全离散逼近格式,导出了相应的超逼近和超收敛结果.

关键词:非线性伪双曲方程;类 Carey 元;半离散和全离散格式;超逼近;超收敛

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A

考虑如下非线性伪双曲方程:

$$\begin{cases} u_{tt} - \nabla\cdot(a(u)\nabla u + b(u)\nabla u_t) + c(u)u_t = f(u), X\in\Omega, t\in(0,T], \\ u(X,t) = 0, X\in\partial\Omega,\ t\in(0,T], \\ u(X,0) = u_0(X), u_t(X,0) = u_1(X), X\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中,$X=(x,y)$,$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$ 的有界凸区域,$u_0(X)$,$u_1(X)$,$a(u)$,$b(u)$,$c(u)$,$f(u)$ 是已知光滑函数. 假设 $0<a_0\le a(u)\le a_1$,$0<b_0\le b(u)\le b_1$,$0<c_0\le c(u)\le c_1$,且 $a(u)$,$b(u)$,$c(u)$,$f(u)$ 均关于 u 满足 Lipschitz 连续条件.

伪双曲方程[1]是研究非线性连续动力系统,动物神经轴突中的生物传导过程或黏弹性理论中的重要数学物理方程,因其含有时空高阶混合偏导数而备受关注. 文献[2-4]研究了这类方程解的存在唯一性和渐进性. 就方程(1)中 $a(u)=b(u)=a(X)$,$c(u)=1$,$f(u)=f(X,t)$ 时,文献[5-6]分别导出了一般协调元和非协调 EQ_1^{rot} 元的 H^1-Galerkin 混合有限元方法的最优误差估计;文献[7-8]分别讨论了分裂正定法和 H^1-Galerkin 扩展混合有限元方法的收敛性结果;文献[9]导出了非协调类 Wilson 元 Galerkin 有限元方法半离散格式下的超收敛和外推结果,以及全离散情形下的最优误差估计;文献[10]提出了一种新的分裂正定混合有限元方法,在几乎均匀网格下得到了原始变量的最优误差估计和流量的超收敛结果. 就方程(1)中 $a(u)=b(u)=a(X)$,$c(u)=1$ 时,文献[11]用双线性元和零阶 Raviart-Thomas 元,得到了 H^1-Galerkin 混合有限元逼近在半离散和全离散格式下的超逼近结果. 就方程(1)中 $f(u)=f(X,t)$ 时,文献[12]研究了 Galerkin 方法非常规 Hermite 型矩形元半离散格式下的超收敛分析和外推. 但以上研究均仅限于矩形网格剖分.

本文将考虑三角形网格剖分下非协调类 Carey 元对方程(1)的 Galerkin 有限元逼近. 首先,证明了逼近格式解的存在唯一性. 其次,利用类 Carey 元能量模意义下非协调误差比插值误差高一阶的特殊性质,线性三角形元的高精度分析结果以及平均值技巧,在摒弃以往文献中 Ritz 投影的前提下,导出了半离散格式能量模意义下的超逼近性质;进一步,利用插值后处理技术得到了整体超收敛结果. 最后,对方程(1)中系数为线性的情形,建立一个具有二阶精度的全离散逼近格式,导出了相应的超逼近和超收敛结果. 需要指出的是,对

收稿日期:2015-07-20;**修回日期**:2016-04-09.

基金项目:国家自然科学基金(11271340);河南省科技攻关项目(162300410082);河南省高等学校重点科研项目(16B110002);河南城建学院科研基金(2015JZD007).

第 1 作者简介(通信作者):李永献(1979-),男,河南鲁山人,河南城建学院讲师,研究方向为有限元方法及其应用,E-mail:lyxpds@hncj.edu.cn.

一些常见的单元，如协调的线性三角形元，矩形双线性元，非协调类 Wilson 元[13]，改进的类 Wilson 元[14]，矩形 EQ_1^{rot} 元[15-16]，正方形网格下的 Q_1^{rot} 元[17] 和矩形带约束的旋转 Q_1 元[18]，本文结论亦成立.

1　单元构造与问题逼近

设 $\mathscr{J}_h$ 是 Ω 的一个直角三角形剖分簇，设其两边分别平行于 x 轴和 y 轴，并且所有水平边和竖直边分别相等(记为 GATM3 角形网格[19])．记 K 的 3 个顶点分别为 $a_i(x_i,y_i)$，相应的面积坐标为 $\lambda_i(i=1,2,3)$，最大单元长度为 h，3 个边分别为 $l_1=\overline{a_2a_3}$，$l_2=\overline{a_3a_1}$，$l_3=\overline{a_1a_2}$，$l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2$，S 为单元 K 的面积，在 K 上定义 (K,Σ_K,P_K)[20] 为

$$\Sigma_K=\{u_1,u_2,u_3,\int_K\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\},\ P_K=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\varphi\}.$$

式中 $\varphi=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-5(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2+\lambda_2{}^2\lambda_3{}^2+\lambda_3{}^2\lambda_1{}^2)$，$u_i$ 为函数 u 在顶点 $a_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 的函数值．u 的形函数为 $u=\sum_{i=1}^{3}u_i\lambda_i+t(u)\varphi$，其中 $t(u)=-\frac{4S}{l^2}\int_K\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

令 $\tilde{u}=\sum_{i=1}^{3}u_i\lambda_i$，$u^1=t(u)\varphi$，则 $u=\tilde{u}+u^1$，$\tilde{u}$ 和 u^1 分别是 u 的协调部分和非协调部分，相应的有限元空间为 $V_h=\{v:v|_K\in P_K,v(a)=0,\forall$ 节点 $a\in\partial\Omega\}$．另外，记 $\hat{V}_h$ 为 $\mathscr{J}_h$ 上的线性有限元空间[21]，其对应插值算子为 I_h，则 $\forall K\in\mathscr{J}_h$，$I_hu=\sum_{i=1}^{3}u_i\lambda_i$.

引理 1　$\forall v_h\in V_h$，若 $u\in H^3(\Omega)$，ϕ 是任一光滑函数，则

$$(\nabla(u-I_hu),\nabla v_h)\leq Ch^2\ |u|_3\ \|v_h\|_h,\tag{2}$$

$$\sum_{K\in J_h}\int_{\partial K}\phi\frac{\partial u}{\partial n}v_h\mathrm{d}s\leq Ch^2\ \|u\|_3\ \|v_h\|_h,\tag{3}$$

这里以及后面出现的 C 均表示与 h 无关的正常数，在不同的地方其值可以不同，$\|\cdot\|_h=(\sum_K|\cdot|_1^2)^{\frac{1}{2}}$ 是定义在 V_h 上的模.

引理 1 中的(2) 式可在文献[22] 中找到．利用文献[20] 的思想，类似文献[22] 中引理 3 的证明，可得(3) 式.

方程(1) 的变分问题为：求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使

$$\begin{cases}(u_{tt},v)+(a(u)\nabla u,\nabla v)+(b(u)\nabla u_t,\nabla v)+(c(u)u_t,v)=(f(u),v),\forall v\in H_0^1(\Omega),\\(X,0)=u_0(X),\ u_t(X,0)=u_1(X),X\in\Omega.\end{cases}\tag{4}$$

变分问题(4) 的半离散逼近格式为：求 $u_h\in V_h$ 使

$$\begin{cases}(u_{htt}+c(u_h)u_{ht},v_h)+(a(u_h)\nabla u_h+b(u_h)\nabla u_{ht},\nabla v_h)=(f(u_h),v_h),\ \forall v_h\in V_h,\\u_h(0)=I_hu_0(X),\ u_{ht}(0)=I_hu_1(X),X\in\Omega,\end{cases}\tag{5}$$

其中 $(\cdot,\cdot)_h=\sum_{K\in\mathscr{J}_h}(\cdot,\cdot)_K$，在不引起混淆的情况下仍将 $(\cdot,\cdot)_h$ 表示为 $(\cdot,\cdot)$.

定理 1　问题(5) 存在唯一解.

证明　设 $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ 是有限元空间 V_h 的基，令 $u_h=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)\psi_i$，则问题(5) 可写成

$$AH''(t)+BH(t)+(D+E)H'(t)=F,\tag{6}$$

其中 $H(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))^{\mathrm{T}}$，$A=((\psi_i,\psi_j))_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，

$$b_{ij}=(\nabla\psi_i,a(\sum_{i=1}^{n}h_i(t)\psi_i)\nabla\psi_j),D=(d_{ij})_{n\times n},\ d_{ij}=(\nabla\psi_i,b(\sum_{i=1}^{n}h_i(t)\psi_i)\nabla\psi_j),$$

$$E=(e_{ij})_{n\times n},e_{ij}=(\psi_i,c(\sum_{i=1}^{n}h_i(t)\psi_i)\psi_j),\ F=((\psi_i,f(\sum_{i=1}^{k}h_i(t)\psi_i)))_{n\times1}.$$

利用矩阵 A 的正定性可将(6) 变形为一个关于向量 $H(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))^{\mathrm{T}}$ 的常微分方程：

$$H''(t)+A^{-1}(D+E)H'(t)+A^{-1}BH(t)=A^{-1}F,$$

对给定初值 $H(0)$, $H_t(0)$(由 $u_h(0)$, $u_{ht}(0)$ 确定),根据常微分方程理论知(6)存在唯一解,即得问题(5)存在唯一解.定理证毕.

2 半离散格式下的超逼近与超收敛

基于上面引理,首先给出下面的超逼近结果.

定理 2 设 u,u_h 分别是问题(4),(5)的解,$u,u_t\in H^3(\Omega)$,$u_{tt}\in H^2(\Omega)$,则有:

$$\|I_hu_t-u_{ht}\|_0+\|I_{hu}-u_h\|_h\le Ch^2\left[\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_3^2+\|u\|_3^2)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}}.$$

证明 记 $u-u_h=(u-I_hu)+(I_hu-u_h)\doteq\eta+\xi$,则由(1),(5)可得误差方程

$$(\xi_{tt},v_h)+(a(u)\nabla u-a(u_h)\nabla u_h,\nabla v_h)+(b(u)\nabla u_t-b(u_h)\nabla u_{ht},\nabla v_h)+(c(u)u_t-c(u_h)u_{ht},v_h)=$$
$$-(\eta_{tt},v_h)+(f(u)-f(u_h),v_h)+\sum_{K\in J_h}\int_{\partial K}(a(u)\frac{\partial u}{\partial n}+b(u)\frac{\partial u_t}{\partial n})v_h\mathrm{d}s,\ \forall v_h\in V_h. \tag{7}$$

在(7)式中取 $v_h=\xi_t$,可得

$$(\xi_{tt},\xi_t)+(a(u)\nabla u-a(u_h)\nabla u_h,\nabla\xi_t)+(b(u)\nabla u_t-b(u_h)\nabla u_{ht},\nabla\xi_t)+(c(u)u_t-c(u_h)u_{ht},\xi_t)=$$
$$-(\eta_{tt},\xi_t)+(f(u)-f(u_h),\xi_t)+\sum_{K\in J_h}\int_{\partial K}(a(u)\frac{\partial u}{\partial n}+b(u)\frac{\partial u_t}{\partial n})\xi_t\mathrm{d}s. \tag{8}$$

由于

$$(a(u)\nabla u-a(u_h)\nabla u_h,\nabla\xi_t)=((a(u)-a(u_h))\nabla u,\nabla\xi_t)+(a(u_h)\nabla(u-u_h),\nabla\xi_t)=$$
$$((a(u)-a(u_h))\nabla u,\nabla\xi_t)+(a(u_h)\nabla\eta,\nabla\xi_t)+(a(u_h)\nabla\xi,\nabla\xi_t), \tag{9}$$

$$(b(u)\nabla u_t-b(u_h)\nabla u_{ht},\nabla\xi_t)=(b(u)-b(u_h))\nabla u_t,\nabla\xi_t)+$$
$$(b(u_h)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)+(b(u_h)\nabla\xi_t,\nabla\xi_t), \tag{10}$$

$$(c(u)u_t-c(u_h)u_{ht},\xi_t)=(c(u)-c(u_h))u_t,\xi_t)+(c(u_h)\eta_t,\xi_t)+(c(u_h)\xi_t,\xi_t), \tag{11}$$

于是(8)式可变形为

$$(\xi_{tt},\xi_t)+(a(u_h)\nabla\xi,\nabla\xi_t)+(b(u_h)\nabla\xi_t,\nabla\xi_t)=-(\eta_{tt},\xi_t)-(c(u_h)\xi_t,\xi_t)-$$
$$((a(u)-a(u_h))\nabla u,\nabla\xi_t)-(a(u_h)\nabla\eta,\nabla\xi_t)-(b(u)-b(u_h))\nabla u_t,\nabla\xi_t)-$$
$$(b(u_h)\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)-(c(u)-c(u_h))u_t,\xi_t)-(c(u_h)\eta_t,\xi_t)+(f(u)-f(u_h),\xi_t)+$$
$$\sum_{K\in J_h}\int_{\partial K}(a(u)\frac{\partial u}{\partial n}+b(u)\frac{\partial u_t}{\partial n})\xi_t\mathrm{d}s\doteq\sum_{i=1}^{10}A_i. \tag{12}$$

由 $c(u)<c_1$,Schwarz 和 Young 不等式及插值理论得

$$|A_1+A_2|\le Ch^4\|u_{tt}\|_2^2+C\|\xi_t\|_0^2. \tag{13}$$

利用 $a(u)$,$f(u)$ 满足 Lipschitz 条件,有

$$|A_3+A_9|\le C\|u-u_h\|_0(\|\xi_t\|_0+\|\nabla\xi_t\|_0)\le Ch^4\|u\|_2^2+$$
$$C\|\xi\|_0^2+C\|\xi_t\|_0^2+\frac{b_0}{6}\|\xi_t\|_h^2. \tag{14}$$

类似地

$$|A_5+A_7|\le Ch^4\|u\|_2^2+C\|\xi\|_0^2+C\|\xi_t\|_0^2+\frac{b_0}{6}\|\xi_t\|_h^2. \tag{15}$$

注意到对任意函数 $\gamma(X)\in W^1,\infty(\Omega)$,定义其在单元 K 上的平均值 $\bar{\gamma}_K(X)=\frac{1}{|K|}\int_K\gamma(X)\mathrm{d}X$,则

$$|\gamma-\bar{\gamma}|_K\le Ch\|\gamma\|_{1,\infty,K}.$$

由(2)式,得

$$|A_4|=|\sum_{K\in\mathscr{J}_h}((a(u_h)-a(u))\nabla\eta,\nabla\xi_t)_K+\sum_{K\in\mathscr{J}_h}((a(u)-\overline{a(u)})\nabla\eta,\nabla\xi_t)_K+$$

$$\sum_{K\in\mathscr{J}_h}(\overline{a(u)}\nabla\eta,\nabla\xi_t)_K\le Ch^4\|u\|_3^2+C\|\xi\|_0^2+\frac{b_0}{6}\|\xi_t\|_h^2. \tag{16}$$

类似地

$$|A_6+A_8|\le Ch^4(\|u_t\|_3^2+\|u\|_2^2)+C\|\xi\|_0^2+C\|\xi_t\|_0^2+\frac{b_0}{6}\|\xi_t\|_h^2. \tag{17}$$

再根据(3) 式，有

$$|A_{10}|\le Ch^4\int^0 t(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)\mathrm{d}\tau+\frac{b_0}{6}\|\xi_t\|_h^2. \tag{18}$$

将以上 A_i 的估计代入(12) 式得到

$$(\xi_{tt},\xi_t)+(a(u_h)\nabla\xi,\nabla\xi_t)\le Ch^4(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2+\|u_{tt}\|_2^2)+C\|\xi\|_0^2+C\|\xi_t\|_0^2+ C\int_0^t(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2)\mathrm{d}\tau. \tag{19}$$

考虑到 $a(u)>a_0>0$，对上式两端从 0 到 t 积分，并注意到 $\xi(X,0)=\xi_t(X,0)=0$，且不等式 $\|\xi\|_0^2\le C\int_0^t\|\xi_t\|_0^2\mathrm{d}\tau$，$\int_0^t\int_0^\tau|\xi(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\le\int_0^t|\xi(s)|^2\mathrm{d}s$ 成立，故有

$$\frac{1}{2}\|\xi_t\|_0^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla\xi\|_0^2\le Ch^4\int_0^t(\|u\|_3^2+\|u_t\|_3^2+\|u_{tt}\|_2^2)\mathrm{d}\tau+C\int_0^t\|\xi_t\|_0^2\mathrm{d}\tau+ \frac{1}{2}\int_0^t(a_u(u_h)u_{ht}\nabla\xi,\nabla\xi)\mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

为估计(20) 式中的$\int_0^t(a_u(u_h)u_{ht}\nabla\xi,\nabla\xi)\mathrm{d}\tau$，假设存在 $h_0>0$，当 $0\le h\le h_0$ 时，有

$$\|\xi_t\|_{L^\infty(L^\infty)}\le 1,\ 0\le t\le T, \tag{21}$$

其中 $\|\xi_t\|_{L^\infty(L^\infty)}=\sup\limits_{0\le t\le T}\|\xi_t\|_{L^\infty(\Omega)}$，于是

$$\left|\int_0^t(a_u(u_h)u_{ht}\nabla\xi,\nabla\xi)\mathrm{d}\tau\right|=\left|\int_0^t(a_u(u_h)\xi_t\nabla\xi,\nabla\xi)\mathrm{d}\tau+\int_0^t(a_u(u_h)I_hu_t\nabla\xi,\nabla\xi)\mathrm{d}\tau\right|\le C\|\xi_t\|_{L^\infty(L^\infty)}\int_0^t\|\xi\|_h^2\mathrm{d}\tau+C\int_0^t\|\xi\|_h^2\mathrm{d}\tau\le C\int_0^t\|\xi\|_h^2\mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

由(20)，(22) 式可导出

$$\frac{1}{2}\|\xi_t\|_0^2+\frac{a_0}{2}\|\nabla\xi\|_0^2\le Ch^4\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_3^2+\|u\|_3^2)\mathrm{d}\tau+C\int_0^t(\|\xi\|_h^2+\|\xi_t\|_0^2)\mathrm{d}\tau. \tag{23}$$

根据 Gronwall 引理可得

$$\|\xi_t\|_0^2+\|\xi\|_h^2\le Ch^4\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_3^2+\|u\|_3^2)\mathrm{d}\tau. \tag{24}$$

关于假设(21) 式的合理性，根据逆不等式和(24) 式结果，类似于文献[23] 的证明可知该假设成立. 定理得证. 为了得到整体超收敛，按文献[23] 的方法合并单元格，并构造插值后处理算子 I_{2h}，得定理 3.

定理 3　在定理 2 条件下，有如下整体超收敛结果：

$$\|I_2hu_h-u\|_h\le Ch^2\left[\|u\|_3^2+\int_0^t(\|u_{tt}\|_2^2+\|u_t\|_3^2+\|u\|_3^2)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}}.$$

3　全离散格式下的超逼近和超收敛

在本节中将进行方程(1) 中系数为线性即 $a(u)=a(X)$，$b(u)=b(X)$，$c(u)=c(X)$ 时的全离散格式下的超收敛分析，设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N-1<t_N=T$ 是$[0,T]$ 上步长为 $\tau=\frac{T}{N}$ 的剖分，$t_n=n\tau$，$n=0,1,2,\cdots,N$，U^n 代表 $t=t_n=n\tau$ 时 $u(t_n)$ 在 V_h 中的逼近. 为方便起见，在此引入一些记号

$$u^n=u(t_n),\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\varphi^{n+1}+\varphi^n),\bar{\partial}_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\tau}(\varphi^{n+1}-\varphi^n),$$

$$\varphi^{n,\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}(\varphi^{n+1}+2\varphi^n+\varphi^{n-1})=\frac{1}{2}(\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\bar{\partial}_t\varphi^n=\frac{1}{2\tau}(\varphi^{n+1}-\varphi^{n-1})=\frac{1}{\tau}(\varphi^{n+\frac{1}{2}}-\varphi^{n-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(\bar{\partial}_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\bar{\partial}_t\varphi^{n-\frac{1}{2}}),$$

$$\bar{\partial}_{tt}\varphi^n=\frac{1}{\tau^2}(\varphi^{n+1}-2\varphi^n+\varphi^{n-1})=\frac{1}{\tau}(\bar{\partial}_t\varphi^{n+\frac{1}{2}}-\bar{\partial}_t\varphi^{n-\frac{1}{2}}).$$

问题(1) 的变分问题为:求 $u^n:[0,T]\to H_0^1(\Omega)$,使 $\forall v\in H_0^1(\Omega)$,满足

$$\begin{cases}(\bar{\partial}_{tt}u^n,v)+(a(X)\nabla u^{n,\frac{1}{4}},\nabla v)+(b(X)\nabla\bar{\partial}_tu^n,\nabla v)+(c(X)\bar{\partial}_tu^n,v)=\\(f^{n,\frac{1}{4}}(u),v)+(R_1^n+R_2^n,\nabla v)+(R_3^n,v),\\u(X,0)=u_0(X),\ u_t(X,0)=u_1(X),\ X\in\Omega,\end{cases}\tag{25}$$

其中 $R_1^n=\bar{\partial}_{tt}u^n-u_{tt}^{n,\frac{1}{4}}=O(\tau^2)$, $R_2^n=b(X)\nabla(\bar{\partial}_tu^n-u_t^{n,\frac{1}{4}},)=O(\tau^2)$, $R_3^n=c(X)(\bar{\partial}_tu^n-u_t^{n,\frac{1}{4}})=O(\tau^2)$.

变分问题(25) 的全离散逼近格式为:求 $U^n:[0,T]\to V_h$,使 $\forall v_h\in V_h$,有

$$\begin{cases}(\bar{\partial}_{tt}U^n+c(X)\bar{\partial}U^n,v_h)+(a(X)\nabla U^{n,\frac{1}{4}}+b(X)\nabla\bar{\partial}_tU^n,\nabla v_h)=(f^{n,\frac{1}{4}}(U),v_h),\\U^0=I_h^1u_0(X),\ U^1=I_h^1(u_0(X)+u_1(X)\tau+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}(X,0)),\end{cases}\tag{26}$$

其中 $u_{tt}(X,0)=\nabla\cdot(a(u_0(X))\nabla u_0(X)+b(u_0(X))\nabla u_1(X))-c(u_0(X))u_1(X)+f(u_0(X))$.

定理 4 设 u^n,U^n 分别是问题(25),(26) 的解,若 $u,u_t\in H^3(\Omega)$,$u_{tt}\in H^2(\Omega)$,则

$$\|I_hu^n-U^n\|_h=O(h^2+\tau^2).$$

证明 为方便误差估计,记 $u^n-U^n=(u^n-I_hu^n)+(I_hu^n-U^n)\doteq\eta^n+\xi^n$,则由(25) 和(26) 可导出如下误差方程

$$\begin{aligned}&(\bar{\partial}_{tt}(\xi^n+\eta^n),v_h)+(a(X)\nabla(\xi^{n,\frac{1}{4}}+\eta^{n,\frac{1}{4}}),\nabla v_h)+(b(X)\nabla\bar{\partial}_t(\xi^n+\eta^n),\nabla v_h)+\\&(c(X)\bar{\partial}_t(\xi^n+\eta^n),v_h)=(f^{n,\frac{1}{4}}(u)-f^{n,\frac{1}{4}}(U),v_h)+(R_1{}^n+R_2^n,\nabla v_h)+\\&(R_3^n,v_h)+\sum_{K\in J_h}\int_{\partial K}\left(a(X)\frac{\partial u^{n,\frac{1}{4}}}{\partial n}+b(X)\frac{\partial u_t^{n,\frac{1}{4}}}{\partial n}\right)v_h\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{27}$$

在(27) 中取 $v_h=\bar{\partial}_t\xi^n$,有

$$\begin{aligned}&(\bar{\partial}_{tt}\xi^n,\bar{\partial}_t\xi^n)+(b(X)\nabla\bar{\partial}_t\xi^n,\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)+(a(X)\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}},\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)+(c(X)\bar{\partial}_t\xi^n,\bar{\partial}_t\xi^n)=\\&-(\bar{\partial}_{tt}\eta^n,\bar{\partial}_t\xi^n)-(b(X)\nabla\bar{\partial}_t\eta^n,\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)-(a(X)\nabla\eta^{n,\frac{1}{4}},\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)-(c(X)\bar{\partial}_t\xi^n,\bar{\partial}_t\xi^n)+\\&(f^{n,\frac{1}{4}}(u)-f^{n,\frac{1}{4}}(U),\bar{\partial}_t\xi^n)+(R_1^n,\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)+(R_2^n,\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)+(R_3^n,\bar{\partial}_t\xi^n)+\\&\sum_{K\in J_h}\int_{\partial K}(a(X)\frac{\partial u^{n,\frac{1}{4}}}{\partial n}+b(X)\frac{\partial u_t^{n,\frac{1}{4}}}{\partial n})\bar{\partial}_t\xi^n\mathrm{d}s\doteq\sum_{i=1}^{9}G_i.\end{aligned}\tag{28}$$

下面先将(28) 式的左端变形为

$$\begin{aligned}&(\bar{\partial}_{tt}\xi^n,\bar{\partial}_t\xi^n)+(a(X)\nabla\xi^{n,\frac{1}{4}},\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)+(b(X)\nabla\bar{\partial}_t\xi^n,\nabla\bar{\partial}_t\xi^n)+(c(X)\bar{\partial}_t\xi^n,\bar{\partial}_t\xi^n)\geq b_0\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_h^2+\\&c_0\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_0^2+(2\tau)^{-1}(\|\bar{\partial}_t\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2-\|\bar{\partial}_t\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_0^2+\|a^{\frac{1}{2}}(X)\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2-\|a^{\frac{1}{2}}(X)\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_h^2).\end{aligned}\tag{29}$$

接下来估计(28) 式的右端各项,注意到 $\|\bar{\partial}_{tt}\eta^n\|_0^2\leq C\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|\eta_{tt}\|_0^2\mathrm{d}s$, $\|\bar{\partial}_t\eta^n\|_0^2\leq(2\tau)^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|\eta_t\|_0^2\mathrm{d}s$,可得

$$\begin{aligned}|G_1|\leq C\|\bar{\partial}_{tt}\eta^n\|_0\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_0^2\leq C\tau^{-1}h^4\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\|u_{tt}\|_2^2\mathrm{d}s+\frac{c_0}{4}\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_0^2\leq\\Ch^4\|u_{tt}\|_{L^\infty(H^2(\Omega))}^2+\frac{c_0}{4}\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_0^2.\end{aligned}\tag{30}$$

这里 $\|\xi\|_{L^\infty(H^s(\Omega))}=\sup\limits_{0\leq t\leq T}\|\zeta\|_{H^s(\Omega)},\forall\zeta\in H^s(\Omega)$.

基于(2) 式,应用类似于 A_2 的估计技巧可得

$$|G_2+G_4|\leq Ch^4\|u_t\|_{L^\infty(H^3(\Omega))}^2+\frac{c_0}{4}\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_0^2+\frac{b_0}{4}\|\bar{\partial}_t\xi^n\|_h^2,\tag{31}$$

$$|G_3| \le Ch^2 |u^{n,\frac{1}{4}}|_3 \|\bar{\partial}_t \xi^n\|_h \le Ch^4 \|u\|^2_{L^\infty(H^3(\Omega))} + \frac{b_0}{4} \|\bar{\partial}_t \xi^n\|^2_h. \tag{32}$$

借助于 Cauchy-Schwarz 不等式及插值理论得

$$|G_5| = |(\frac{1}{4}[(f(u^{n+1}) - f(U^{n+1})) + 2(f(u^n) - f(U^n)) + (f(u^{n-1}) - f(U^{n-1}))], \bar{\partial}_t \xi^n)| \le$$

$$Ch^4 \|u\|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))} + C(\|\xi^{n+1}\|^2_h + \|\xi^n\|^2_h + \|\xi^{n-1}\|^2_h) + \frac{c_0}{4} \|\bar{\partial}_t \xi^n\|^2_0, \tag{33}$$

$$|G_6 + G_7 + G_8| \le C\tau^4 + \frac{c_0}{4} \|\bar{\partial}_t \xi^n\|^2_0 + \frac{b_0}{4} \|\bar{\partial}_t \xi^n\|^2_h. \tag{34}$$

另一方面，由(3) 知

$$|G_9| \le Ch^2(|u^{n,\frac{1}{4}}|_3 + |u_t^{n,\frac{1}{4}}|_3) \|\bar{\partial}_t \xi^n\|_h \le$$

$$Ch^4(\|u\|^2_{L^\infty(H^3(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(H^3(\Omega))}) + \frac{b_0}{4} \|\bar{\partial}_t \xi^n\|^2_h. \tag{35}$$

根据(30) ～ (35) 及(29) 式，有

$$(2\tau)^{-1}[(\|\bar{\partial}_t \xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2_0 - \|\bar{\partial}_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|^2_0) + (\|a^{\frac{1}{2}}(X)\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2_h - \|a^{\frac{1}{2}}(X)\xi^{n-\frac{1}{2}}\|^2_h)] \le$$
$$Ch^4 W + C\tau^4 + C(\|\xi^{n+1}\|^2_0 + \|\xi^n\|^2_0 + \|\xi^{n-1}\|^2_0), \tag{36}$$

这里 $W = \|u_{tt}\|^2_{L^\infty(H^2(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(H^3(\Omega))} + \|u\|^2_{L^\infty(H^3(\Omega))}$.

对(36) 式关于 n 从 1 到 $J-1(1 \le J \le N)$ 求和得

$$\|\bar{\partial}_t \xi^{J-\frac{1}{2}}\|^2_0 + a_0 \|\xi^{J-\frac{1}{2}}\|^2_h \le \|\bar{\partial}_t \xi^{\frac{1}{2}}\|^2_0 + a_1 \|\xi^{\frac{1}{2}}\|^2_h + C\tau h^4 \sum_{n=1}^{J-1} W +$$
$$C\sum_{n=1}^{J-1} \tau^5 + C\tau \sum_{n=1}^{J-1} (\|\xi^{n+1}\|^2_h + \|\xi^n\|^2_h + \|\xi^{n-1}\|^2_h). \tag{37}$$

基于 $\|\xi^{J-\frac{1}{2}}\|^2_h = \frac{1}{4}(\|\xi^J\|^2_h + \|\xi^{J-1}\|^2_h) + \frac{1}{2}(\nabla \xi^J, \nabla \xi^{J-1})$，且 $(\nabla \xi^J, \nabla \xi^{J-1}) \le \frac{1}{4} \|\xi^J\|^2_h + \|\xi^{J-1}\|^2_h$，并注意到 $\xi^0 = 0, \xi^1 = U^1 - I_h u^1 = O(\tau^3)$，有

$$\|\bar{\partial}_t \xi^{\frac{1}{2}}\|^2_0 + a_1 \|\xi^{\frac{1}{2}}\|^2_h \le \tau^{-2} \|\xi^1 - \xi^0\|^2_0 + C\|\xi^1 + \xi^0\|^2_h = O(\tau^4).$$

由于 $(J-1)\tau \le N\tau = T$，(37) 式可变形为

$$(1 - C\tau)\|\xi^J\|^2_h \le Ch^4 W + C\tau^4 + (C\tau + 2)\|\xi^{J-1}\|_h{}^2 + C\tau \sum_{i=1}^{J-2} \|\xi^i\|^2_h.$$

选择适当小的 τ 使 $1 - C\tau > 0$，根据离散 Gronwall 引理得 $\|\xi^J\|^2_h \le Ch^4 W + C\tau^4$. 定理证毕.

类似于定理 3 的过程，可得全离散格式下的整体超收敛结果 $\|I_{2h} U^n - u^n\|_h = O(h^2 + \tau^2)$.

注　当方程(1) 中 $a(u) = a(X), b(u) = b(X), c(u) = c(X), f(u) = f(X, t)$ 时，文献[9] 导出了全离散格式下类 Wilson 元 Galerkin 逼近的最优误差估计，而按本文方法则可得到了超逼近和超收敛结果.

4　结论与推广

本文在三角形网格剖分下研究了非协调类 Carey 元对非线性伪双曲方程的 Galerkin 逼近，基于类 Carey 元的特殊性质，线性三角形元的高精度分析结果和插值后处理技术，得到了半离散格式下的超逼近性质和整体超收敛结果，以及方程中系数为线性情形下的全离散逼近格式的相应结果.

从定理 2 和定理 4 的推导过程可看出引理 1 中(2) 式和(3) 式起着至关重要的作用，故本文结论对一些常见的满足(2) 式和(3) 式的单元亦成立. 事实上，对于协调的线性三角形元和矩形双线性元来说，定理 2 和定理 4 显然成立. 而对矩形非协调 EQ_1^{rot} 元[15-16] 和正方形网格下的 Q_1^{rot} 元[17] 来说，直接取 I_h 为对应有限元空间所诱导的插值算子，则引理 1 中(2) 式变为 $(\nabla(u - I_h u), \nabla v_h) = 0$，(3) 式不变；对类 Wilson 元[13] 和改进的类 Wilson 元[14] 来说，取 I_h 为双线性插值算子；而对矩形带约束的旋转 Q_1 元来说，取 I_h 为文献[18] 中的所构造的 Π_h，则引理 1 中(2) 式和(3) 式均成立，故定理 2 和定理 4 对上述单元成立. 在此基础上，若进一步选取相应的插值后处理算子 I_{2h}，则均可得整体超收敛结果.

参考文献

[1] Pao C V. A mixed initial boundary-value problem arising in neurophysiology[J]. J Math Anal Appl,1975,51(2):105-119.

[2] Ponce G. Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations[J]. Nonlinear Anal TMA,1985,9(5):399-418.

[3] 肖黎明.一类高阶多维非线性伪双曲方程[J].数学研究与评论,1995,15(1):91-97.

[4] Wan W M, Liu Y C. Long-time behavior of solutions to an initial-boundary value problem of nerve conduction type[J]. Acta Math Appl Sin (Engl Ser),1999,22(2):311-314.

[5] Liu Y, Li H. H^1-Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations[J]. Appl Math Comput,2009,212(2):446-457.

[6] Shi D Y, Zhang Y D. An H^1-Galerkin nonconforming mixed finite element method for pseudo-hyperbolic equations[J]. Math Appl,2011,24(3):448-455.

[7] Liu Y, Li H, Wang J F, et al. Splitting Positive Definite Mixed Element Methods for Pseudo-Hyperbolic Equations[J]. Numer Meth Partial Differ Equations,2012,28(2):670-688.

[8] Liu Y, Li H. A New Mixed Finite Element Method for Pseudo-Hyperbolic Equation[J]. Math Appl,2010,23(1):150-157.

[9] 史艳华,石东洋.伪双曲方程类 Wilson 非协调元逼近[J].山东大学学报(理学版),2013,48(4):77-84.

[10] Shi D Y, Tang Q L. Superconvergence Analysis of Splitting Positive Definite Nonconforming Mixed Finite Element Method for Pseudo-hyperbolic Equations[J]. Acta Math Appl Sin (Engl Ser),2013,29(4):843-854.

[11] 石东洋,史艳华.半线性伪双曲方程最低阶的 H^1-Galerkin 混合元方法[J].系统科学与数学,2015,35(5):514-526.

[12] 毛凤梅,刁 群,王俊俊.一类非线性伪双曲方程 Hermite 型有限元的超收敛分析和外推[J].郑州大学学报(理学版),2015,47(1):6-9.

[13] Shi D Y, Zhang D. Approximation of nonconforming quasi-Wilson element for sine-Gordon equations[J]. J Comput Math,2013,31(3):271-282.

[14] Shi D Y, Pei L F. Nonconforming quadrilateral finite element method for a class of nonlinear sine-Gordon equations[J]. Appl Math Comput,2013,219(17):9447-9460.

[15] Shi D Y, Mao S P, Chen S C. An anisotropic nonconforming finite element with some superconvergence results[J]. J Comput Math,2005,23(3):261-274.

[16] Lin Q, Tobiska L, Zhou A H. Superconvergence and extrapolation of nonconformimg low order finite elements applied to the poisson equation[J]. IMA J Numer Anal,2005,25(1):160-181.

[17] Rannacher R, Turek S. Simple nonconforming quadrilateral stokes element[J]. Numer Meth Partial Differ Equations,1992,8(2):97-111.

[18] Hu J, Shi Z C. Constrained quadrilateral nonconforming rotatedQ_1 element[J]. J Comput Math,2005,23(5):561-586.

[19] 石东洋,梁 慧.各向异性网格下线性三角形元的超收敛性分析[J].工程数学学报,2007,24(3):487-493.

[20] Shi D Y, Hao X B. Accuracy analysis for quasi-Carey element[J]. J Syst Sci &Complexity,2008,21(3):456-462.

[21] 林 群,严宁宁.高效有限元构造与分析[M].保定:河北大学出版社,1996:204-206.

[22] 马 戈,石东洋.双曲积分微分方程类 Carey 元解的超收敛性分析[J].兰州理工大学学报,2010,36(5):139-142.

[23] 李永献,李先枝.非线性伪双曲积分微分方程的类 Carey 元超收敛分析[J].数学的实践与认识,2015,45(22):294-299.

High Accuracy Analysis of Quasi-Carey Element for Nonlinear Pseudo-hyperbolic Equations

LI Yongxian[1], YANG Xiaoxia[2]

(1. School of Mathematics and Physics, Henan University of Urban Construction, Pingdingshan 467036, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China)

Abstract: The Galerkin finite element mothed for nonlinear pseudo-hyperbolic equations with nonconforming quasi-Carey element is studied. Based on the special property of the element(i. e. the consistency error is one order higher than its interpolation error in the energy norm) and high accuracy analysis result of the linear triangular element, the superclose property and global superconvergence result in energy norm with order $O(h^2)$ for semi-discrete scheme are obtained employing the mean-value technique and interpolated postprocessing approach. At the same time, a second order fully-discrete scheme is established for quasi-linear case. The corresponding superclose property and superconvergence result of order $O(h^2+\tau^2)$ are deduced. Here, h and τ are parameters of subdivision in space and time step respectively.

Keywords: nonlinear pseudo-hyperbolic equations; quasi-Carey element; semi-discrete and fully-discrete schemes; superclose properties; superconvergence