文章编号:1000-2367(2023)02-0001-14 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.02.001

校庆优秀校友专栏:数学

奇异摄动的扩散系统弱收敛意义下的平均化原理:直接平均法的概述与进展

吴付科

(华中科技大学 数学与统计学院,武汉 430074)

摘 要:主要介绍了建立奇异摄动的扩散系统的随机平均化原理的直接平均方法和当前的进展,这种方法主要基于鞅问题和弱收敛.最后一部分也介绍了这种方法当前在奇异摄动的延迟和泛函系统的随机平均化原理中的进展和困难.

关键词:奇异摄动;扩散系统;随机平均化原理;鞅问题;弱收敛

中图分类号:O211 **文献标志码**:A

1 介 绍

2021 年诺贝尔物理学奖的 3 位科学家都是因为在复杂物理系统方面的开创性贡献摘得桂冠,这显示复杂系统的研究对于人们认识真实世界的重要意义.大量的复杂系统的"复杂度"往往来自随机因素、时间延迟和多尺度的影响.对于不同的时间尺度关联起来的复杂系统,在数学建模中,需要在方程中引入一个或多个小参数来描述(两时间尺度或多时间尺度),此时系统由变化快慢不同的系统耦合而成,称为奇异摄动系统(或多时间尺度系统),长期以来都是理论研究和应用的重点研究对象,在大气物理(即 2021 年诺贝尔奖获得者的重要成果)、控制工程、工业制造和多智能体等领域具有广泛的应用.当将不确定性引入奇异摄动系统中之后,称为奇异摄动的随机系统,往往由带有一个或多个小参数的随机微分方程来描述.如果考虑的是白噪声的干扰,则称为奇异摄动的扩散系统,往往由如下带有小参数 ε 的快-慢耦合方程来描述:

$$\begin{cases} dX_1^\varepsilon(t)=h_1(X_1^\varepsilon(t),\ X_2^\varepsilon(t))dt+\zeta_1(X_1^\varepsilon(t),\ X_2^\varepsilon(t))dw_1(t), \\ dX_2^\varepsilon(t)=\dfrac{1}{\varepsilon}h_2(X_1^\varepsilon(t),\ X_2^\varepsilon(t))dt+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\zeta_2(X_1^\varepsilon(t),\ X_2^\varepsilon(t))dw_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

由于小参数 ε 的影响,可以看出此处 $X_1^\varepsilon(\cdot)\in\mathbf{R}$ 表示慢变量,$X_2^\varepsilon(\cdot)\in\mathbf{R}$ 表示快变量.

大量的复杂系统其实都包含"快"和"慢"运动的部分,例如,大脑的学习过程就含有两尺度现象:从快的神经活动(大概几毫秒)到相对慢的突触的可塑性(大概几分钟到几小时),考虑到传输过程的不确定性,在文献[1]中,GALTIER 和 WAINRIB 利用两时间尺度的随机微分方程来描述如下一个神经网络的学习模型:

$$\begin{cases} \dot{\Xi}^\varepsilon(t)=G(\Xi^\varepsilon(t),\ v^\varepsilon(t)), \\ dv^\varepsilon(t)=\dfrac{1}{\varepsilon}[f(\Xi^\varepsilon(t),\ v^\varepsilon(t))+u(t)]dt+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\zeta(\Xi^\varepsilon(t),\ v^\varepsilon(t))dw(t), \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2023-02-09;**修回日期**:2023-02-15.

基金项目:国家自然科学基金(62273158).

作者简介(通信作者):吴付科(1976-),男,河南邓州人,华中科技大学教授,博士,国家优青,研究方向为随机微分方程及其应用,E-mail:wufuke@hust.edu.cn.

此处 $v^\varepsilon \in \mathbf{R}^n$ 表示 n 个神经元的快速变化,$\Xi^\varepsilon(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是神经元之间的连接矩阵,由于可塑性,它是缓慢变化的,u 表示外部输入.因这类奇异摄动的扩散系统具有广泛的应用,因此被很多学者研究,见文献[2-9]等.由于奇异摄动的扩散系统往往非常复杂而导致难以处理,研究者往往考虑当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限系统,例如文献[2-6,8-15]等,这个过程称为随机平均化.通过随机平均化原理得到的极限系统(也称为平均系统)往往比原始系统简单,一般可以通过较为简单的极限系统得出可行的控制策略,并应用于原始的奇异系统,往往可以得出理想的控制结果.

随机平均化原理的建立主要有几种方法,其中之一是通过相应的密度函数所满足的 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程的渐进展开[4,11-12],比如在合适条件下,对于方程(1)的解过程的密度函数所满足的 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程进行渐近展开,然后让小参数 ε 趋于零,可以得出一个极限的 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程,此极限即为(1)所对应的极限系统的解过程所对应的密度函数,这就建立了相应的平均化原理[4].由于是密度函数的收敛,所以是概率意义下的,这种收敛是一种弱收敛.最后的结果具体可以表示为:当 $\varepsilon \to 0$,快变部分被平均掉,慢变部分 $X_1^\varepsilon(\cdot)$ 弱收敛到一个极限 $X(\cdot)$,其满足如下随机微分方程:

$$\mathrm{d}X(t)=\bar{h}_1(X(t))\mathrm{d}t+\bar{\zeta}_1(X(t))\mathrm{d}w(t), \tag{3}$$

此处 $\bar{h}_1(x_1)=\int h_1(x_1,x_2)\mu^{x_1}(\mathrm{d}x_2)$,$\bar{\zeta}_1^2(x_1)=\int \zeta_1^2(x_1,x_2)\mu^{x_1}(\mathrm{d}x_2)$ 是 $h_1(x_1,x_2)$ 和 $\zeta_1^2(x_1,x_2)$ 关于 $\mu^{x_1}(\cdot)$ 的平均,而 $\mu^{x_1}(\cdot)$ 是如下凝固方程 $\mathrm{d}X_2^{x_1}(t)=h_2(x_1,X_2^{x_1}(t))\mathrm{d}t+\zeta_2(x_1,X_2^{x_1}(t))\mathrm{d}w_2(t)$ 的不变测度,在此方程中,x_1 是一个凝固变量,在考虑方程时,将其看作参数.方程(3)比原方程简单,容易处理,因此往往看作为原系统的极限近似方程,而由于其系数来自于原始奇异方程系数的平均,又称为平均方程.

另一种方法基于 Poisson 方程,由 PARDOUX 和 VERETENNIKOV 在 3 篇文章中讲述[14],主要是基于 Poisson 方程解的增长的有界性,本质也是通过鞅问题的收敛性来建立随机平均化原理,由于随机微分方程所对应的鞅问题的解与弱解等价,因此这种方法也是一种弱收敛方法.

第三种方法则是直接建立鞅过程的收敛性,其中主要有两种方法可以实现,第一种是摄动函数的验证方法;另一种是直接平均的方法[16-17],主要基于中心极限定理或遍历性定理等,本文主要基于近期随机过程理论的发展,在此基础上回顾和全面整理直接平均法和这类方法在有延迟进入的时候遇到的困难和当前的一些进展.

本文主要考虑如下奇异摄动的扩散过程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x^\varepsilon(t)=b(x^\varepsilon(t),\xi^\varepsilon(t))\mathrm{d}t+\psi(x^\varepsilon(t),\xi^\varepsilon(t))\mathrm{d}w_1(t),\\ \mathrm{d}\xi^\varepsilon(t)=\dfrac{1}{\varepsilon}h(x^\varepsilon(t),\xi^\varepsilon(t))\mathrm{d}t+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\phi(x^\varepsilon(t),\xi^\varepsilon(t))\mathrm{d}w_2(t),\end{cases} \tag{4}$$

其中初始值 $x(0)\in\mathbf{R}^n$,$\xi(0)\in\mathbf{R}^m$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)':\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$,$\psi=[\psi_{ij}]_{n\times l_1}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{n\times l_1}$,$h=(h_1,h_2,\cdots,h_m)':\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$,$\phi=[\phi_{ij}]_{m\times l_2}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{m\times l_2}$,$w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 是两个独立的标准布朗运动,分别取值于 $\mathbf{R}^{l_1}$ 和 $\mathbf{R}^{l_2}$.

2 一些记号和假设

在本文中,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间,相应的欧几里得范数为 $|\cdot|$.对于向量或者矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$,$\boldsymbol{\Psi}'$ 表示其转置,对于矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$,$|\boldsymbol{\Psi}|=\sqrt{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Psi}'\boldsymbol{\Psi})}$ 定义其迹范数.对于事件 A,$\bar{A}$ 表示对立事件.对于 $a,b\in\mathbf{R}^n$,$\langle a,b\rangle=a'b$ 表示它们的内积.在本文中,K 表示一个通用常数,它的具体取值是不重要的,在不同的地方可能不同,所以 $K+K=K$ 和 $KK=K$ 等表达是不言自明的,同样,K_α 表示一个依赖于参数 α 的通用常数,文章中 $\varepsilon>0$ 表示小参数.

文中 $x(t)$ 表示一个随机过程,用 $\mathscr{F}_t=\sigma\{x(s):s\le t\}$ 定义由 $x(s)$ 生成的 σ- 代数流,E_t^x 表示相应的 σ 代数 $\mathscr{F}_t$ 条件下的期望,对于依赖于小参数 ε 的随机过程 $\xi^\varepsilon(\cdot)$ 和 $x^\varepsilon(\cdot)$,定义 $\mathscr{F}_t^\varepsilon$ 为由 $\{\xi^\varepsilon(s),x^\varepsilon(s):s\le t\}$ 产生的 σ- 代数,且 E_t^ε 表示相应的条件期望.在本文中,也用 $\widetilde{\mathscr{F}}_{t_i}^\varepsilon$ 表示对于固定的 t_i,$\{\xi^\varepsilon(t_i),x^\varepsilon(t_i)\}$ 所产生的 σ- 代数.定义 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一类充分光滑且带有紧支撑的函数.

现在来回顾鞅方法，用 $\mathscr{M}$ 定义实值循序可测的函数集合，其在一个关于 t 的有界集中非零，也定义 $\mathscr{M}$ 的如下子集合：

$$\overline{\mathscr{M}}^{\varepsilon}=\{f\in\mathscr{M}:\sup_{t}E\mid f(t)\mid<\infty \text{ 且 } f(t)\text{ 是 }\mathscr{F}_t^{\varepsilon}\text{- 可测的}\}. \tag{5}$$

根据文献[16,18]，回顾如下 p-lim 和算子 $\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon}$ 的定义：

定义 1　对任意的 $\delta>0$，f，$f^{\delta}\in\overline{\mathscr{M}}^{\varepsilon}$，称 $f=p\text{-}\lim_{\delta}f^{\delta}$ 当且仅当

$$\begin{cases}\sup\limits_{t,\delta}E\mid f^{\delta}(t)\mid<\infty,\\ \lim\limits_{\delta\to 0}E\mid f^{\delta}(t)-f(t)\mid=0 \text{ 对任意的 } t.\end{cases}$$

这个定义说明对任意 $\delta>0$ 且 $f^{\delta}\in^{\varepsilon}$，如果 $f(\cdot)=0$ 几乎处处成立，则 $p\text{-}\lim_{\delta}f^{\delta}=0$.

定义 2　$\mathscr{D}(\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon})$ 为 $\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon}$ 的定义域，对于 $f(\cdot)\in\mathscr{D}(\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon})$，对于 $f,g\in\overline{\mathscr{M}}^{\varepsilon}$，如果 $p\text{-}\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\left(\dfrac{E_t^{\varepsilon}f(t+\delta)-f(t)}{\delta}-g(t)\right)=0$，则说 $\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon}f=g$.

因此 $\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon}$ 是一类无穷小算子，下面的引理来自文献[18]：

引理 1　如果 $f\in\mathscr{D}(\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon})$，那么 $M_f(t)=f(t)-\int_0^t\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon}f(u)\mathrm{d}u$ 是一个鞅，等价于

$$E_t^{\varepsilon}\left[f(t+s)-f(t)-\int_t^{t+s}\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon}f(u)\mathrm{d}u\right]=0,\quad \text{w.p.1}. \tag{6}$$

3　鞅问题与弱收敛

根据引理 1 给出奇异摄动的扩散系统(4)的鞅收敛问题.在合适条件下，对于任意的 $V\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$，利用 Itô 公式可知

$$M_V^{\varepsilon,N}(t):=V(x^{\varepsilon}(t))-V(x(0))-\int_0^t\mathscr{L}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}(s),\xi^{\varepsilon}(s))V(x^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}s=$$
$$\int_0^t V_x(x^{\varepsilon}(s))\psi(x_s^{\varepsilon},\xi^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}w_2(s) \tag{7}$$

是一个鞅过程，此处

$$\mathscr{L}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}(s),\xi^{\varepsilon}(s))V(x^{\varepsilon}(s))=V_x(x^{\varepsilon}(s))b(x^{\varepsilon}(s),\xi^{\varepsilon}(s))+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\psi_i(x^{\varepsilon}(s),\xi^{\varepsilon}(s))\psi_j(x^{\varepsilon}(s),\xi^{\varepsilon}(s))V_{\{x_ix_j\}}(x^{\varepsilon}(s))$$

是相应的 Itô 微分算子.

如果能够证明 $\{x^{\varepsilon}(\cdot)\}_{0<\varepsilon\le 1}$ 在空间 $C([0,T];\mathbf{R}^n)$ 中是胎紧的，则通过 Prohorov 定理[19]，它也是序列紧的，则知道存在 $x\in C([0,T];\mathbf{R}^n)$ 和子序列 $\{\varepsilon_n\}_{n\ge 1}$ 满足当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$，且 $x^{\varepsilon_n}\Rightarrow x$. 进一步通过 Skorohod 表示定理，可以假设这个收敛是几乎处处的.然后来确定 $x(t)$ 所满足的方程.

根据鞅过程的定义，对于 $t>s$，$E[M_V^{\varepsilon_n}(t)\mid\mathscr{F}_s^{x^{\varepsilon_n}}]=M_V^{\varepsilon_n}(s)$，对于(38)式，这等价于

$$E_s^{x^{\varepsilon_n}}\left[V(x^{\varepsilon_n}(t))-V(x^{\varepsilon_n}(s))-\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n}(u),\xi^{\varepsilon_n}(u))V(x^{\varepsilon_n}(u))\mathrm{d}u\right]=0.$$

根据条件期望的定义再给出上式一个等价表示：根据 σ-代数意义下条件期望的定义，对于任意的事件 $A\in\mathscr{F}_s^{x^{\varepsilon_n}}$，上式可以等价表示为$\int_A\left[V(x^{\varepsilon_n}(t))-V(x^{\varepsilon_n}(s))-\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n}(u),\xi^{\varepsilon_n}(u))V(x^{\varepsilon_n}(u))\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}P=0$，这进一步等价于

$$E\left[1_A(V(x^{\varepsilon_n}(t))-V(x^{\varepsilon_n}(s))-\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n}(u),\xi^{\varepsilon_n}(u))V(x^{\varepsilon_n}(u))\mathrm{d}u)\right]=0,$$

此处 1_A 表示 A 的示性函数.由于 $A\in\mathscr{F}_s^{x^{\varepsilon_n}}$，可以利用 A 的任意有限维柱集 $1_{A_1A_2\cdots A_k}$ 来表示，此处 k 为任意有限整数，$A_i\in\widetilde{\mathscr{F}}_{t_i}^{x^{\varepsilon_n}}$，$i=1,2,\cdots,k$. 由于可以利用有界连续函数来逼近示性函数，所以上式也等价于

$$E[h(x^{\epsilon_n}(t_i):i\leq k)(V(x^{\epsilon_n}(t))-V(x^{\epsilon_n}(s))-\int_s^t \mathscr{L}^{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}(u),\xi^{\epsilon_n}(u))V(x^{\epsilon_n}(u))\mathrm{d}u)]=0,\tag{8}$$

此处 $h(\cdot)$是一个有界连续函数.

由于 x^{ϵ_n} 看成是几乎处处收敛到 x,而且函数 $h(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 都是有界连续函数,则通过 Lebesgue 控制收敛定理,

$$E[h(x^{\epsilon_n}(t_i):i\leq k)[V(x^{\epsilon_n}(t))-V(x^{\epsilon_n}(s))]\to E[h(x(t_i):i\leq k)[V(x(t))-V(x(s))]].\tag{9}$$

如果能够通过 x^{ϵ_n} 几乎处处收敛到 x,能够得出存在 Itô 微分算子 $\mathscr{L}(x(u))$,使得在几乎处处意义下,

$$\int_s^t \mathscr{L}^{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}(u),\xi^{\epsilon_n}(u))V(x^{\epsilon_n}(u))\mathrm{d}u\to\int_s^t \mathscr{L}(x(u))V(x(u))\mathrm{d}u,\tag{10}$$

则由 Lebesgue 控制收敛定理可以得出

$$Eh(x^{\epsilon_n}(t_i):i\leq k)[\int_s^t \mathscr{L}^{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}(u),\xi^{\epsilon_n}(u))V(x^{\epsilon_n}(u))\mathrm{d}u]\to$$

$$Eh(x(t_i):i\leq k)[\int_s^t \mathscr{L}(x(u))V(x(u))\mathrm{d}u].\tag{11}$$

则结合(9)和(11)式得出(8)式的极限可以表示为

$$E[h(x^{\epsilon_n}(t_i):i\leq k)(V(x^{\epsilon_n}(t))-V(x^{\epsilon_n}(s))-\int_s^t \mathscr{L}^{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}(u),\xi^{\epsilon_n}(u))V(x^{\epsilon_n}(u))\mathrm{d}u)]\to$$

$$Eh(x(t_i):i\leq k)[V(x(t))-V(x(s))-\int_s^t \mathscr{L}(x(u))V(x(u))\mathrm{d}u]=0.\tag{12}$$

这意味着

$$M_V(t):=V(x(t))-V(x(0))-\int_0^t \mathscr{L}(x(s))V(x(s))\mathrm{d}s$$

是一个关于σ-代数 $\mathscr{F}_t$ 的鞅过程,所以 $x(t)$ 是关于 Itô 微分算子 $\mathscr{L}(\cdot)$ 的鞅解,由鞅解和随机微分方程弱解的等价性,$x(t)$ 也是 $\mathscr{L}(\cdot)$ 所确定的随机微分方程的弱解,这样就确定了 $x(t)$.

通过以上对于鞅问题和弱收敛方法的论述可知,如果利用鞅问题来考虑奇异摄动扩散系统的弱收敛方法,需要获得如下结果:

(1)需要证明 $\{x^{\epsilon}(\cdot)\}_{0<\epsilon\leq 1}$ 在空间 $C([0,T];\mathbf{R}^n)$ 中是胎紧的;

(2)在 x^{ϵ_n} 几乎处处收敛到 x 的条件下,证明极限(10) 成立.

关于胎紧性的证明,核心思想都来自于泛函分析中的 Arzela-Ascoli 定理[20](也可看文献[21]).而极限(10)的计算则需要对于 $\mathscr{L}^{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}(u),\xi^{\epsilon_n}(u))$ 中的 $\xi^{\epsilon_n}(u)$ 进行分析.当前常用的方法有摄动验证函数方法和直接平均法,下面回顾直接平均法.

4 直接平均法

为了证明 $\{x^{\epsilon}(\cdot)\}_{0<\epsilon\leq 1}$ 在空间 $C([0,T];\mathbf{R}^n)$ 中的胎紧性和计算极限(10),需要一些前提假设,在此处列出一些常用假设:

(A1)(Lipschitz 条件)对任意整数 R,存在与 R 有关的正常数 L_R,使得对任意满足 $|x_1|\vee|x_2|\vee|\xi_1|\vee|\xi_2|\leq R$ 的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^n,\xi_1,\xi_2\in\mathbf{R}^m$,有

$$|h(x_1,\xi_1)-h(x_2,\xi_2)|^2\leq L_R(|x_1-x_2|^2+|\xi_1-\xi_2|^2)\tag{13}$$

和

$$|b(x_1,\xi_1)-b(x_2,\xi_2)|^2\vee|\psi(x_1,\xi_1)-\psi(x_2,\xi_2)|^2\leq L_R|x_1-x_2|^2+L|\xi_1-\xi_2|^2\tag{14}$$

成立,此处在(14)式中,L 是一个常数.

(A2)(耗散性条件)对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$ 和 $\xi_1,\xi_2\in\mathbf{R}^m$,存在 λ_1,λ_2 和 L,使得

$$\langle\xi_1-\xi_2,h(x_1,\xi_1)-h(x_2,\xi_2)\rangle\leq-\lambda_1|\xi_1-\xi_2|^2+L|x_1-x_2|^2$$

和

$$|\phi(x_1,\xi_1)-\phi(x_2,\xi_2)|^2\leq\lambda_2(|\xi_1-\xi_2|^2+|x_1-x_2|^2)$$

成立.

(A3)(线性增长条件)存在常数 $L>0$ 使得对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$,

$$|b(x,0)|^2\vee|\phi(x,0)|^2\vee|h(x,0)|^2\le L(1+|x|^2)\tag{15}$$

成立.

下面定理建立了原始系统(4)解的存在唯一性、有界性以及慢变过程 $x^\varepsilon(\cdot)$的连续性.

定理 1　在假设(A1)~(A3)下,对任意的 $\varepsilon>0$,随机微分方程(4)存在一个唯一的强解$(x^{\varepsilon'}(t),\xi^{\varepsilon'}(t))'$.进一步,如果 $2\lambda_1>\lambda_2$,对任意 $T>0$,存在依赖于 p,T 和初始值$(x'(0),\xi'(0))'$,但是不依赖于小参数 ε 的正常数 $p>2$ 和 $K_{p,T}$,使得

$$E[\sup_{0\le t\le T}|x^\varepsilon(t)|^p]\le K_{p,T}\tag{16}$$

和

$$\sup_{0\le t\le T}E|\xi^\varepsilon(t)|^p\le K_{p,T},\tag{17}$$

也可以得到 $x^\varepsilon(\cdot)$的连续性:

$$E|x^\varepsilon(t)-x^\varepsilon(s)|^p\le K_{p,T}(t-s)^{p/2},0\le s<t\le T.\tag{18}$$

证明　分别证明这 3 个结论:

第一步:存在唯一性.通过假设(A1)~(A3),容易验证(4)的系数满足局部 Lipschitz 条件(Lipschitz 系数和小参数 ε 有关)和单调性条件,根据文献[22]中定理 3.5 可知,方程(4)存在唯一的全局强解.

第二步:(16)式和(17)式的证明.对于 $p>2$ 和 $\lambda>0$,利用 Itô 公式得出,对于任意的 $s>0$

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}[1+|\xi^\varepsilon(s)|^2]^{\frac{p}{2}}=[1+|\xi(0)|^2]^{\frac{p}{2}}+\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}u}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}u+\frac{p}{\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}u}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}\cdot\\&[\xi^\varepsilon(u)]'h(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}u+\frac{p}{2\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}u}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}|\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))|^2\mathrm{d}u+\frac{p(p-2)}{2\varepsilon}\cdot\\&\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}u}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-4}{2}}|[\xi^\varepsilon(u)]'\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))|^2\mathrm{d}u+M^\varepsilon(s)\le[1+|\xi(0)|^2]^{\frac{p}{2}}+\\&\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}u}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}u+\frac{p}{\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}u}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}[\xi^\varepsilon(u)]'h(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}u+\\&\frac{p(p-1)}{2\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}u}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}|\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))|^2\mathrm{d}u+M^\varepsilon(s),\end{aligned}\tag{19}$$

此处 $M^\varepsilon(s)$ 是一个满足 $M^\varepsilon(0)=0$ 的局部鞅. 利用假设(A2)、(A3)和 Young 不等式,对任意 $\varepsilon_1>0$,

$$\begin{aligned}&[\xi^\varepsilon(u)]'h(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\le-\lambda_1|\xi^\varepsilon(u)|^2+[\xi^\varepsilon(u)]'h(x^\varepsilon(u),0)\le-\lambda_1|\xi^\varepsilon(u)|^2+\\&\frac{\varepsilon_1|\xi^\varepsilon(u)|^2}{2}+\frac{|h(x^\varepsilon(u),0)|^2}{2\varepsilon_1}\le(-\lambda_1+\frac{\varepsilon_1}{2})|\xi^\varepsilon(u)|^2+\frac{L}{2\varepsilon_1}|x^\varepsilon(u)|^2+\frac{L}{2\varepsilon_1}.\end{aligned}\tag{20}$$

由假设(A2)和 Young 不等式可以给出:对于任意 $\varepsilon_2>0$,

$$\begin{aligned}&\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))|^2\le|(\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))-\phi(0,0)+\phi(0,0)|^2\le|(\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))-\phi(0,0)|^2+\\&|\phi(0,0)|^2+2(\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))-\phi(0,0))'\phi(0,0)\le\lambda_2(|x^\varepsilon(u)|^2+|\xi^\varepsilon(u)|^2)+|\phi(0,0)|^2+\\&\varepsilon_2|(\phi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))-\phi(0,0)|^2+\frac{1}{\varepsilon_2}|\phi(0,0)|^2\le\lambda_2(1+\varepsilon_2)|\xi^\varepsilon(u)|^2+\\&\lambda_2(1+\varepsilon_2)|x^\varepsilon(u)|^2+(1+\frac{1}{\varepsilon_2})|\phi(0,0)|^2.\end{aligned}\tag{21}$$

将(20)、(21)式代入(19)式可以得出

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}[1+|\xi^\varepsilon(s)|^2]^{\frac{p}{2}}\le[1+|\xi(0)|^2]^{\frac{p}{2}}+\frac{p}{2\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}\{[-2\lambda_1+(p-1)\lambda_2(1+\\&\varepsilon_2)+\frac{2\lambda}{p}+\varepsilon_1][1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p}{2}}+[\frac{L}{\varepsilon_1}+(p-1)\lambda_2(1+\varepsilon_2)][1+\\&|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}|x^\varepsilon(u)|^2+A[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}\}\mathrm{d}u+M^\varepsilon(s),\end{aligned}\tag{22}$$

此处

$$A=\frac{L}{\varepsilon_1}+(p-1)(1+\frac{1}{\varepsilon_2})\phi(0,0)|^2-[-2\lambda_1+(p-2)\lambda_2(1+\varepsilon_2)+\frac{2\lambda}{p}+\varepsilon_1]$$

是一个常数.利用 Young 不等式,对于任意的 ε_3,可以得出

$$[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}|x^\varepsilon(u)|^2\leq\frac{(p-2)\varepsilon_1\varepsilon_3}{p}[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p}{2}}+\frac{2}{p(\varepsilon_1\varepsilon_3)^{\frac{p-2}{2}}}|x^\varepsilon(u)|^p,$$

这意味着

$$\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}[1+|\xi^\varepsilon(s)|^2]^{\frac{p}{2}}\leq[1+|\xi(0)|^2]^{\frac{p}{2}}+\frac{p}{2\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}\{-B[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p}{2}}+A[1+|\xi^\varepsilon(u)|^2]^{\frac{p-2}{2}}+[\frac{L}{\varepsilon_1}+(p-1)\lambda_2(1+\varepsilon_2)]\frac{2}{p(\varepsilon_1\varepsilon_3)^{\frac{p-2}{2}}}|x^\varepsilon(u)|^p\}\mathrm{d}u+M^\varepsilon(s),\tag{23}$$

此处

$$B=2\lambda_1-(p-1)\lambda_2(1+\varepsilon_2)-\frac{2\lambda}{p}-\varepsilon_1-\frac{(p-2)L\varepsilon_3}{p}-\frac{p-2}{p}(p-1)\lambda_2(1+\varepsilon_2)\varepsilon_1\varepsilon_3.$$

由于 $2\lambda_1>\lambda_2$,所以能够选择充分小的 $\lambda,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 和 ε_3,充分接近于 2 的 $p(>2)$ 使得 $B>0$,根据多项式函数的有界性,存在一个常数 K,下面不等式

$$-B|z|^{\frac{p}{2}}+A|z|^{\frac{p-2}{2}}<K$$

成立.因此存在常数 $K>0$ 使得如下估计成立:

$$\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}|\xi^\varepsilon(s)|^p\leq\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}[1+|\xi^\varepsilon(s)|^2]^{\frac{p}{2}}\leq[1+|\xi(0)|^2]^{\frac{p}{2}}+\frac{p}{2\varepsilon}\int_0^s\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}[K+K|x^\varepsilon(u)|^p]\mathrm{d}u+M^\varepsilon(s)\leq[1+|\xi(0)|^2]^{\frac{p}{2}}+\frac{pK}{2\lambda}[1+\sup_{0\leq u\leq s}|x^\varepsilon(u)|^p][\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}s}-1]+M^\varepsilon(s),$$

因此

$$E|\xi^\varepsilon(s)|^p\leq E[1+|\xi(0)|^2]^{\frac{p}{2}}+\frac{pK}{2\lambda}[1+E(\sup_{0\leq u\leq s}|x^\varepsilon(u)|^p)]\leq K_p(1+E|\xi(0)|^p)+K_pE(\sup_{0\leq u\leq s}|x^\varepsilon(u)|^p).\tag{24}$$

另一方面,对任意的 $p>2$,容易观察到

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|x^\varepsilon(s)|^p]\leq 3^{p-1}\{E|x(0)|^p+E[\sup_{0\leq s\leq t}|\int_0^s b(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}u|^p]+E[\sup_{0\leq s\leq t}|\int_0^s\psi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}w_1(u)|^p]\}.\tag{25}$$

由假设(A1)和(A3)可以得出 $|b(x,\xi)|^2\leq K(|x|^2+|\xi|^2+1)$.因此利用 Hölder 不等式可以得出

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|\int_0^s b(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}u|^p]\leq t^{p-1}\int_0^t E|b(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))|^p\mathrm{d}u\leq t^{p-1}K_p\int_0^t E(|x^\varepsilon(u)|^2+|\xi^\varepsilon(u)|^2+1)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}u\leq K_{p,t}\int_0^t[E|x^\varepsilon(u)|^p+E|\xi^\varepsilon(u)|^p+1]\mathrm{d}u.\tag{26}$$

通过假设(A1)和(A3),利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 Hölder 不等式,可以得出

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|\int_0^s\psi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}w_1(u)|^p]\leq K_pE|\int_0^t|\psi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))|^2\mathrm{d}u|^{\frac{p}{2}}\leq K_pt^{\frac{p-2}{2}}\int_0^t E|\psi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))|^p\mathrm{d}u\leq K_{p,t}\int_0^t[E|x^\varepsilon(u)|^p+E|\xi^\varepsilon(u)|^p+1]\mathrm{d}u.\tag{27}$$

将(25)和(26)式代入(27)式并结合(24)式得出

$$E[\sup_{0\leq s\leq t}|x^\varepsilon(s)|^p]\leq K_pE|x(0)|^p+K_{p,t}\int_0^t[E|x^\varepsilon(u)|^p+E|\xi^\varepsilon(u)|^p+1]\mathrm{d}u\leq K_pE|x(0)|^p+K_{p,t}\int_0^t[E|x_0|^p+E(\sup_{0\leq v\leq u}|x^\varepsilon(v)|^p)+K_p(1+E|\xi(0)|^p)+K_pE(\sup_{0\leq v\leq u}|x^\varepsilon(v)|^p)+$$

$$1]\mathrm{d}u \le K_p E\,|\,x(0)\,|^p + K_{p,t}\int_0^t [E\,|\,\xi(0)\,|^p + E(\sup_{0\le v\le u}|\,x^\varepsilon(v)\,|^p) + 1]\mathrm{d}u.$$

由 Gronwall 不等式可以得出:存在常数 $K_{p,T}$,$E[\sup_{0\le s\le T}|\,x^\varepsilon(s)\,|^p] \le K_{p,T}$,这就给出了估计(16)式,再结合(24)式给出估计 $\sup_{0\le s\le T} E\,|\,\xi^\varepsilon(s)\,|^p \le K_{p,T}$,所以(17)式成立.

第三步:(18)式的证明.对第二步中的 $p>2$,可以得出

$$E\,|\,x^\varepsilon(t)-x^\varepsilon(s)\,|^p \le 2^{p-1}[E\,|\int_s^t b(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}u\,|^p + E\,|\int_s^t \psi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}w_1(u)\,|^p]. \tag{28}$$

通过 Hölder 不等式、假设(A3)、(16)和(17)式的估计,可以得出

$$E\,|\int_s^t b(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}u\,|^p \le (t-s)^{p-1}\int_s^t E\,|\,b(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\,|^p\mathrm{d}u \le$$

$$3^{p-1}(t-s)^{p-1}\int_s^t E[\,|\,x^\varepsilon(u)\,|^p + E\,|\,\xi^\varepsilon(u)\,|^p + 1]\mathrm{d}u \le K_{p,T}(t-s)^p. \tag{29}$$

通过假设(A3)、(16)和(17)式的估计,利用文献[22]中定理 7.1 同样的估计技术,可以得出

$$E\,|\int_s^t \psi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\mathrm{d}w_1(u)\,|^p \le [\frac{p(p-1)}{2}]^{\frac{p}{2}}(t-$$

$$s)^{\frac{p-2}{2}}E\int_s^t |\,\psi(x^\varepsilon(u),\xi^\varepsilon(u))\,|^p\mathrm{d}u \le K_{p,T}(t-s)^{\frac{p}{2}}. \tag{30}$$

将(29)和(30)式代入(28)式得出 $E\,|\,x^\varepsilon(t)-x^\varepsilon(s)\,|^p \le K_{p,T}(t-s)^{\frac{p}{2}}$,即为连续性估计(18),这就完成了本证明过程.

由(16)式中的有界性和(18)式中的连续性,根据 Kushner 的结论[16],可以得出如下推论:

推论 1　在定理 1 的条件下,$\{x^\varepsilon(\cdot)\}_{0<\varepsilon\le 1}$ 在空间 $C([0,T];\mathbf{R}^n)$ 中是胎紧的.

评论 1　在(16)和(17)式的证明中,由于方程(4)的系数与小参数 ε 有关,而得出的 p 阶矩的上界与 ε 无关,因此计算与通常情况下的 p 阶矩的上界计算不同.

评论 2　由于在本定理的结论中,p 阶矩的有界性和连续性关于小参数 ε 是一致的,所以如果 $x^\varepsilon(\cdot)\to x(\cdot)$ 几乎处处成立,则从 $E[\sup_{0\le s\le T}|\,x^\varepsilon(s)\,|^p]\le K_{p,T}$ 成立,通过 Vitali 收敛性定理,可以得出极限过程也满足 $E[\sup_{0\le s\le T}|\,x^\varepsilon(t)\,|^p]\to E[\sup_{0\le s\le T}|\,x(t)\,|^p]\le K_{p,T}$.同样,$E\,|\,x^\varepsilon(t)-x^\varepsilon(s)\,|^p \to E\,|\,x(t)-x(s)\,|^p \le K_{p,T}(t-s)^{\frac{p}{2}}$ 也成立,这也说明极限过程 $x(t)$ 也是 p 阶矩的有界和连续的.

根据第 3 部分的分析,下面需要考虑极限(10)的证明.在极限(10)中,需要考虑快变过程 $\xi^\varepsilon(t)$.定义 $\tilde{\xi}^\varepsilon(t)=\xi^\varepsilon(\varepsilon t)$,则

$$\mathrm{d}\tilde{\xi}^\varepsilon(t) = h(x^\varepsilon(\varepsilon t),\tilde{\xi}^\varepsilon(t))\mathrm{d}t + \phi(x^\varepsilon(\varepsilon t),\tilde{\xi}^\varepsilon(t))\mathrm{d}\tilde{w}_2(t), \tag{31}$$

此处 $\tilde{w}_2(t)=w_2(\varepsilon t)/\sqrt{\varepsilon}$ 也是一个标准的 Brown 运动.由于当 ε 充分小时,$x^\varepsilon(\varepsilon t)$ 的变化非常缓慢,因此考虑如下的近似过程,称之为凝固-x 方程:

$$\mathrm{d}\xi^x(t) = h(x,\xi^x(t))\mathrm{d}t + \phi(x,\xi^x(t))\mathrm{d}\tilde{w}_2(t). \tag{32}$$

由假设(A1)和(A2),可以得出关于上面的凝固-x 方程如下结果:

定理 2　在假设(A1)和(A2)条件下,凝固-x 方程(32)有一个唯一的全局强解 $\xi^x(t)$,这个解是 $\mathscr{F}_{\varepsilon t}^{w_2}$-适应的,而且具有如下性质:

(i)解是一个齐次强 Markov 过程;

(ii) $E(\sup_{t\in[0,T]}|\,\xi^x(t)\,|^2)\le K_{x,T}$,此处 $K_{x,T}$ 是一个依赖于 x 和 T 的常数;

(iii)当 $2\lambda_1>\lambda_2$ 时,存在一个指数遍历的不变测度 $\mu^x(\cdot)$;

(iv)对于 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$,$\sup_{t\ge 0}E\,|\,\xi^{x_1}(t)-\xi^{x_2}(t)\,|^2 \le K\,|\,x_1-x_2\,|^2$,此处 K 为常数.

证明　(13)式说明 h 满足局部 Lipschitz 条件,(A2)显示 ϕ 满足全局 Lipschitz 条件,(A2)和(A3)也可以得出 b 满足单边线性增长条件,因此根据文献[22]中定理 3.6,可以得出凝固-x 方程(32)有一个唯一的全局强解 $\xi^x(t)$.

(i)当 x 固定时,(32)式是一个自治方程,通过文献[22]中定理 9.5,其中利用局部 Lipschitz 条件和耗散性条件(A2)代替原结论中的一致 Lipschitz 条件,可以证明(32)式的解是一个齐次强 Markov 过程.

(ii)在解的存在性证明中,ϕ 的全局 Lipschitz 条件和自治系统说明其也满足线性增长条件,再结合 b 的单边线性增长条件,经典的方法就可以得出结论(ii).

(iii)在耗散性条件下,指数遍历的不变测度是一个经典结论,见文献[23]中定理 1.5.

(iv)利用 Itô 公式可以得出

$$\mathrm{e}^{(2\lambda_1-\lambda_2)t}\mid\xi^{x_1}(t)-\xi^{x_2}(t)\mid^2=(2\lambda_1-\lambda_2)\int_0^t\mathrm{e}^{(2\lambda_1-\lambda_2)}\mid\xi^{x_1}(s)-\xi^{x_2}(s)\mid^2\mathrm{d}s+\int_0^t[\mathrm{e}^{(2\lambda_1-\lambda_2)s}2\langle\xi^{x_1}(s)-\xi^{x_2}(s),h(x_1,\xi^{x_1}(s))-h(x_2,\xi^{x_2}(s))\rangle+\parallel\phi(x_1,\xi^{x_1}(s))-\phi(x_2,\xi^{x_2}(s))\parallel^2]\mathrm{d}s+2\int_0^t\mathrm{e}^{(2\lambda_1-\lambda_2)s}2\langle\xi^{x_1}(s)-\xi^{x_2}(s),\phi(x_1,\xi^{x_1}(s))-\phi(x_2,\xi^{x_2}(s))\rangle\mathrm{d}\widetilde{w}_1(s)\leq(2L+\lambda_2)\int_0^t\mathrm{e}^{-(2\lambda_1-\lambda_2)(t-s)}\mathrm{d}s\mid x_1-x_2\mid^2+2\int_0^t\mathrm{e}^{(2\lambda_1-\lambda_2)s}2\langle\xi^{x_1}(s)-\xi^{x_2}(s),\phi(x_1,\xi^{x_1}(s))-\phi(x_2,\xi^{x_2}(s))\rangle\mathrm{d}\widetilde{w}_1(s).$$

利用假设(A1),(13)式和假设(A2),在上式两边取期望可得

$$E\mid\xi^{x_1}(t)-\xi^{x_2}(t)\mid^2\leq(2L+\lambda_2)\int_0^t\mathrm{e}^{-(2\lambda_1-\lambda_2)(t-s)}\mathrm{d}s\mid x_1-x_2\mid^2\leq\frac{2L+\lambda_2}{2\lambda_1-\lambda_2}\mid x_1-x_2\mid^2.\tag{33}$$

这完成了证明.

评论 3 由结论(iv),可以得出当 $x_1\to x_2$ 时,$\xi^{x_1}(t)-\xi^{x_2}(t)\xrightarrow{P}0$.

通过不变测度 μ^x,定义

$$\bar{b}(x)=\int_{\mathbf{R}^m}b(x,\xi)\mu^x(\mathrm{d}\xi)\text{ 和 }\bar{\Sigma}(x)=\int_{\mathbf{R}^m}\psi(x,\xi)\psi'(x,\xi)\mu^x(\mathrm{d}\xi).$$

接下来引入如下假设:

(A4)取初始值 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 与方程(57a)中相同值,假设下面方程

$$\mathrm{d}x(t)=\bar{b}(x(t))\mathrm{d}t+\bar{\psi}(x(t))\mathrm{d}B(t)\tag{34}$$

有一个唯一的全局弱解(即在分布意义下唯一),此处 $B(t)$是一个标准 Brown 运动,$\bar{\psi}(\cdot)$ 满足 $\bar{\psi}(\cdot)\bar{\psi}'(\cdot)=\bar{\Sigma}(\cdot)$.

评论 4 一般情况下,方程(34)的存在唯一性不能由假设中的 b 和 ψ 的条件得出.像在评论 2 中讨论的那样,如果当 $\varepsilon\to0$ 时,$x^\varepsilon(\cdot)\to x(\cdot)$,可知 $E[\sup\limits_{0\leq t\leq T}\mid x(t)\mid^p]\leq K_{p,T}$,所以 $\bar{b}$ 和 $\bar{\psi}$ 满足局部 Lipschitz 条件,则方程(34)有一个全局解.由于(14)式意味着 b 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件,而且由定理 2 中的结论(iv),也能知道不变测度关于 x 的 Lipschitz 条件(不能得出经典的,但是在期望意义下的,如果只考虑解的存在唯一性是可以的),但是由于 $\bar{\psi}$ 不是直接来自于 ψ 的平均,所以现有的条件不能完全得出(34)解的存在唯一性.

由于在随机微分方程中,弱解等价于随机微分方程对应的鞅问题的解[19].可叙述方程(34)所对应的鞅问题的解:对于 $V\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$,由 Itô 公式可以得出

$$M_V(t):=V(x(t))-V(x(0))-\int_0^t\mathscr{L}(x_s)V(x(s))\mathrm{d}s=\int_0^tV_x(x(s))\bar{\psi}(x_s)\mathrm{d}B(s)\tag{35}$$

是一个鞅,此处 $\mathscr{L}(\cdot)$是如下的 Itô 微分算子:

$$\mathscr{L}(x_s)V(x(s))=V_x(x(s))\bar{b}(x_s)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\bar{\psi}_i(x_s)\bar{\psi}_j(x_s)V_{x_ix_j}(x(s)).$$

所以(34)式弱解的存在唯一性等价于鞅问题(35)解的存在唯一性.

有了(32)式对 $\xi^x(\cdot)$的分析,可以用来估计极限(10).这个极限估计和极限(12)一起,可以得出 $x^\varepsilon(\cdot)$ 弱收敛到 $x(\cdot)$,写成如下的定理:

定理 3 在假设(A1)~(A4)下,$x^\varepsilon(\cdot)$ 弱收敛到 $x(\cdot)$,其中的 $x(\cdot)$ 为随机微分方程(34)的解.

为了证明这个定理,往往需要截断技术,这个方法在奇异摄动理论中经常用到[16].对于任意的 $N>0$,定义 $b^N(x,\xi)=b(x,\xi)q^N(x)$ 和 $\psi^N(x,\xi)=\psi(x,\xi)q^N(x)$,此处

$$q^N(x)=\begin{cases}1, & \text{对 } x\in S_N,\\ 0, & \text{对 } x\in \mathbf{R}^n-S_{N+1},\\ \text{光滑}, & \text{否则},\end{cases}$$

其中 $S_N=\{x:|x|\le N\}$.选择充分大的 N 使得 $|x(0)|\le N$，考虑如下的截断方程：

$$\mathrm{d}x^{\varepsilon,N}(t)=b^N(x^{\varepsilon,N}(t),\xi^{\varepsilon,N}(t))\mathrm{d}t+\psi^N(x^{\varepsilon,N}(t),\xi^{\varepsilon,N}(t))\mathrm{d}w_1(t),\tag{36}$$

此处 $\xi^{\varepsilon,N}(t)$ 是方程(57b)的解,其中 $x^\varepsilon(t)$ 被 $x^{\varepsilon,N}(t)$ 所替代,所以在球 S_N 内,$x^{\varepsilon,N}(t)=x^\varepsilon(t)$.也定义 $\mathscr{F}_t^{\varepsilon,N}=\sigma\{\xi^{\varepsilon,N}(s),x^{\varepsilon,N}(s):s\le t\}$,相应也可以给出对应的 $\overline{\mathscr{M}}^{\varepsilon,N}$ 和 $\hat{\mathscr{L}}^{\varepsilon,N}$.

评论 5　由于截断技术,假设(A1)就可以显示 $b^N(\cdot)$ 和 $\psi^N(\cdot)$ 实际上满足全局 Lipschitz 条件,所以定理 1 的结论对于截断过程也成立,即 $x^{\varepsilon,N}(t)\in C([0,T];S_{N+1})$ 仍然是胎紧和连续的.

定理 3 的证明　先证明 $x^{\varepsilon,N}(\cdot)$ 弱收敛到 $x^N(\cdot)$,此处 $x^N(\cdot)$ 是方程(34)对应的截断方程

$$\mathrm{d}x^N(t)=\bar{b}^N(x^N(t))\mathrm{d}t+\bar{\psi}^N(x^N(t))\mathrm{d}B(t)\tag{37}$$

的解,此处 $\bar{b}^N(x)=\bar{b}(x)q^N(x)$ 和 $\bar{\psi}^N(x)=\bar{\psi}(x)q^N(x)$. 也定义 $\bar{\Sigma}^N(\cdot)=\bar{\psi}^N(\cdot)[\bar{\psi}^N(\cdot)]'$ 和 $\mathscr{L}^N(x^N(s))V(x^N(s))=V_x(x^N(s))b^N(x^N(s))+\dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\psi_i^N(x^N(s))\psi_j^N(x^N(s))V_{x_ix_j}(x^N(s))$.

由第 3 部分的分析可知存在子序列 $\{\varepsilon_n\}_{n\ge1}$ 满足当 $n\to\infty$ 时,$\varepsilon_n\to0$,使得 $x^{\varepsilon_n,N)}\Rightarrow x^N$. Skorohod 表示定理意味着可以假设这个收敛是几乎处处的,现在通过鞅问题的极限分析,这个极限 x^N 就是方程(37)的解.

对任意函数 $V\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$,利用关于方程(57a)的 Itô 公式可知

$$M_V^{\varepsilon_n,N}(t):=V(x^{\varepsilon_n,N}(t))-V(x(0))-\int_0^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))V(x^{\varepsilon_n,N}(s))\mathrm{d}s=$$
$$\int_0^t V_x(x^{\varepsilon_n,N}(s))\psi^N(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))\mathrm{d}w_2(s)\tag{38}$$

是一个鞅,此处

$$\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))V(x^{\varepsilon_n,N}(s))=V_x(x^{\varepsilon_n,N}(s))b^N(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\psi_i^N(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))\psi_j^N(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))V_{x_ix_j}(x^{\varepsilon_n,N}(s)).$$

根据第 3 部分的分析,这等价于对任意的 k,t,s 和 $s_1<s_2<\cdots<s_k<s<t$,

$$E\{h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le k)[V(x^{\varepsilon_n,N}(t))-V(x^{\varepsilon_n,N}(s))-$$
$$\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(u),\xi^{\varepsilon_n,N}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(u))\mathrm{d}u]\}=0,\tag{39}$$

此处 $h(\cdot)$ 是一个有界连续函数.类似于(12)式,

$$E[h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le k)(V(x^{\varepsilon_n,N}(t))-V(x^{\varepsilon_n,N}(s)))]\to$$
$$E[h(x^N(s_j),j\le k)(V(x^N(t))-V(x^N(s)))].\tag{40}$$

主要的任务是考虑

$$E[h(x^{\varepsilon_n,N}(u_j),j\le k)\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(u),\xi^{\varepsilon_n,N}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(u))\mathrm{d}u]$$

的收敛性估计.

选择充分小的 Δ,

$$E[h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le k)\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(u),\xi^{\varepsilon_n,N}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(u))\mathrm{d}u]=E[h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le$$
$$k)\sum_{l\Delta=s}^t\int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta}\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))\mathrm{d}u]+E[h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le$$
$$k)\sum_{l\Delta=s}^t\int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta}\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x_u^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(u))-\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))\cdot$$
$$V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))\mathrm{d}u]=:I_1^{\varepsilon_n,N}+I_2^{\varepsilon_n,N},\tag{41}$$

此处

$$\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u)=\xi^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)+\frac{1}{\varepsilon_n}\int_{l\Delta}^{u}h(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(v))\mathrm{d}v+$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\int_{l\Delta}^{u}\phi(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(v))\mathrm{d}w_2(v),\tag{42}$$

这意味着对任意的 $u\in[l\Delta,(l+1)\Delta]$, $x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)$ 是凝固的(固定的), 然后通过变量代换可以得出

$$\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(\varepsilon_n u)=\xi^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)+\frac{1}{\varepsilon_n}\int_{l\Delta}^{\varepsilon_n u}h(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(v))\mathrm{d}v+$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\int_{l\Delta}^{\varepsilon_n u}\phi(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(v))\mathrm{d}w_2(v)=$$

$$\xi^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)+\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{u}h(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(\varepsilon_n v))\mathrm{d}v+$$

$$\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{u}\phi(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(\varepsilon_n v))\mathrm{d}\widetilde{w}_2(v).\tag{43}$$

与凝固方程(32)相比,很明显,对于任意 $u\in[l\Delta,(l+1)\Delta]$,

$$\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u)=\xi^{x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(\frac{u}{\varepsilon_n}),\tag{44}$$

此处 $\xi^{x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(\cdot)$ 就是凝固—$x=x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)$ 方程(32) 的解.根据 $\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(\cdot)V(\cdot)$ 的表达,

$$\int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta}\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))\mathrm{d}u=$$

$$\int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta}[V_x(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))b^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\psi_i^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))\psi_j^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))\cdot$$

$$V_{x_ix_j}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))]\mathrm{d}u=V_x(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))I_{11}^{\varepsilon_n,N}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}I_{12ij}^{\varepsilon_n,N}V_{x_ix_j}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)),\tag{45}$$

此处

$$I_{11}^{\varepsilon_n,N}=\int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta}b^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))\mathrm{d}u,$$

$$I_{12ij}^{\varepsilon_n,N}=\int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta}\psi_i^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))\psi_j^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))\mathrm{d}u.$$

利用变量代换和(44)式可以得出

$$I_{11}^{\varepsilon_n,N}=\varepsilon_n\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}b^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))\mathrm{d}u=\varepsilon_n\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}b^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^N(l\Delta)}(u))\mathrm{d}u+$$

$$\varepsilon_n\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}[b^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u))-b^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^N(l\Delta)}(u))]\mathrm{d}u=:I_{11,1}^{\varepsilon_n,N}+I_{11,2}^{\varepsilon_n,N}.\tag{46}$$

利用 $\xi^x(\cdot)$ 的遍历性和 $\bar{b}^N$ 的定义,当 $n\to\infty$ 时,

$$I_{11,1}^{\varepsilon_n,N}=\Delta\frac{1}{\Delta/\varepsilon_n}\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}b^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^N(l\Delta)}(u))\mathrm{d}u\to\bar{b}^N(x^N(l\Delta))\Delta,\text{a.s.}.\tag{47}$$

由于当 $n\to\infty$ 时, $x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\to x^N(l\Delta)$ 在几乎处处意义下成立,因此利用定理 2 中的结论(iv)可以给出(也就是评论 3) $\xi^{x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u)-\xi^{x^N(l\Delta)}(u)\xrightarrow{P}0$.

注意 b^N 满足全局 Lipschitz 条件,利用积分中值定理可以得出,存在 $u^*\in\mathbf{R}$ 使得

$$|I_{11,2}^{\varepsilon_n,N}|=|b^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*))-b^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^N(l\Delta)}(u^*))|\Delta\leq$$

$$K_N\Delta(\| x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)-x^N(l\Delta)\| +| \xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u^*)-\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u^*))|)\xrightarrow{P}0. \tag{48}$$

由于在几乎处处意义下,$x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\to x^N(l\Delta)$,结合(47)和(48)式可以得出:

$$V_x(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))I_{11}^{\varepsilon_n,N}-V_x(x^N(l\Delta))\bar{b}^N(x^N(l\Delta))\Delta\xrightarrow{P}0,\text{a.s.}. \tag{49}$$

下面估计 $I_{12ij}^{\varepsilon_n,N}$. 利用变量代换可以给出

$$\begin{aligned}I_{12ij}^{\varepsilon_n,N}=&\varepsilon_n\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}\psi_i^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u))\psi_j^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u))\mathrm{d}u=\\&\varepsilon_n\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}\psi_i^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))\psi_j^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))\mathrm{d}u+\\&\varepsilon_n\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}[\psi_i^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u))\psi_j^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u))-\\&\psi_i^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))\psi_j^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))]\mathrm{d}u=:I_{12ij,1}^{\varepsilon_n,N}+I_{12ij,2}^{\varepsilon_n,N}.\end{aligned} \tag{50}$$

类似于(47)式,$\xi^x(\cdot)$ 的遍历性和 $\bar{\Sigma}^N$ 的定义给出:当 $n\to\infty$ 时,在几乎处处意义下,

$$I_{12ij,1}^{\varepsilon_n,N}=\Delta\frac{1}{\Delta/\varepsilon_n}\int_{\frac{l\Delta}{\varepsilon_n}}^{\frac{(l+1)\Delta}{\varepsilon_n}}\psi_i^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))\psi_j^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))\mathrm{d}u\to\bar{\Sigma}_{ij}^N(x^N(l\Delta))\Delta. \tag{51}$$

由于对 $x\in S_N$,$\psi_i^N(x,\xi)$是有界的且满足全局 Lipschitz 条件,所以对任意的 u,

$$\begin{aligned}&|\psi_i^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u))\psi_j^N(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u))-\psi_i^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))\psi_j^N(x^N(l\Delta),\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))|\le\\&K_N(|x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)-x^N(l\Delta)|+|\xi^{x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u)-\xi^{x^{N(l\Delta)}}(u))|)\end{aligned}$$

成立.类似于在(48)式中 $I_{11,2}^{\varepsilon_n,N}$ 的估计,当 $n\to\infty$,

$$I_{12ij,2}^{\varepsilon_n,N}\xrightarrow{P}0.$$

与(51)式和几乎处处意义下的 $x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\to x^N(l\Delta)$ 一起,得出

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n I_{12ij}^{\varepsilon_n,N}V_{x_ix_j}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\Sigma_{ij}^N(x^N(l\Delta))V_{x_ix_j}(x^N(l\Delta))\Delta\xrightarrow{P}0. \tag{52}$$

通过 Lebesgue 控制收敛定理、(49)和(52)式得出

$$I_1^{\varepsilon_n,N}\to E[h(x^N(s_j),j\le k)\sum_{l\Delta=s}^t\mathscr{L}^N(x^N(l\Delta))V(x^N(l\Delta))\Delta]. \tag{53}$$

现在来估计 $I_2^{\varepsilon_n,N}$.通过积分中值定理,存在 $u^*\in[l\Delta,(l+1)\Delta]$,使得

$$\begin{aligned}I_2^{\varepsilon_n,N}=&E\{h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le k)\sum_{l\Delta=s}^t[\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x_{u^*}^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(u^*))-\\&\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))]\Delta\}.\end{aligned} \tag{54}$$

由于对 $u\in[l\Delta,(l+1)\Delta]$,

$$\xi^{\varepsilon_n,N}(u)=\xi^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)+\frac{1}{\varepsilon_n}\int_{l\Delta}^u h(x_s^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\int_{l\Delta}^u\phi(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))\mathrm{d}w_1(s),$$

且 $\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u)$ 满足方程(42),可以得出

$$\begin{aligned}\xi^{\varepsilon_n,N}(u)-\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u)=&\frac{1}{\varepsilon_n}\int_{l\Delta}^u[h(x_s^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(s))-h(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(s))]\mathrm{d}s+\\&\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\int_{l\Delta}^u[\phi(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))-\phi(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(s))]\mathrm{d}w_1(s).\end{aligned}$$

利用 Itô 公式可以得出

$$\mathrm{e}^{\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\varepsilon_n}u}|\xi^{\varepsilon_n,N}(u)-\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(u)|^2=(2\lambda_1-\lambda_2)\frac{1}{\varepsilon_n}\int_{l\Delta}^u\mathrm{e}^{\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\varepsilon}s}|\xi^{\varepsilon_n,N}(s)-\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N(l\Delta)}}(s)|^2\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{\varepsilon_n}\int_{l\Delta}^{u}\mathrm{e}^{\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\varepsilon_n}s}[2\langle\xi^{\varepsilon_n,N}(s)-\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(s),h(x_s^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(s))-h(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(s))\rangle+$$

$$\|\phi(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))-\phi(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(s))\|^2]\mathrm{d}s+\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_n}}\int_{l\Delta}^{u}\mathrm{e}^{\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\varepsilon_n}s}2\langle\xi^{\varepsilon_n,N}(s)-$$

$$\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(s),\phi(x^{\varepsilon_n,N}(s),\xi^{\varepsilon_n,N}(s))-\phi(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(s))\rangle\mathrm{d}w_1(s).$$

利用假设(A1)和(A2),上式两边同时取期望可以得出

$$E|\xi^{\varepsilon_n,N}(u)-\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u)|^2\le(2L+\lambda_2)\frac{1}{\varepsilon_n}\int_{l\Delta}^{u}\mathrm{e}^{-\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\varepsilon_n}(u-s)}E\|x_s^{\varepsilon_n,N}-$$

$$x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\|^2\mathrm{d}s\le\frac{2L+\lambda_2}{2\lambda_1-\lambda_2}[\sup_{s\in[l\Delta,(l+1)\Delta]}E\|x^{\varepsilon_n,N}(s)-x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\|^2]. \tag{55}$$

定义 $\zeta_\Delta=\sup_{s\in[l\Delta,(l+1)\Delta]}E\|x^{\varepsilon_n,N}(s)-x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\|^2$,由解的连续性可以得出当 $\Delta\to0$ 时,$\zeta_\Delta\to0$.由于 $V\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$,再结合假设(A1),可以得出 $\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(\cdot,\cdot)V(\cdot)$ 满足全局 Lipschitz 条件,所以存在常数 $K_N>0$,使得

$$|\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x_{u^*}^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(u^*))-\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))|^2\le$$

$$K_N[\|x_{u^*}^{\varepsilon_n,N}-x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\|^2+|x^{\varepsilon_n,N}(u^*)-x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)|^2+|\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*)-\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*)|^2]. \tag{56}$$

利用(18)和(55)式,在上式两边取期望可以得出

$$E|\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x_{u^*}^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(u^*))-\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))|^2\le$$

$$K_N[E\|x_{u^*}^{\varepsilon_n,N}-x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)\|^2+E|x^{\varepsilon_n,N}(u^*)-x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)|^2+E|\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*)-\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*)|^2]\le$$

$$K_N\zeta_\Delta+K_{p,N,T}\Delta+\frac{\kappa^2(2L+\lambda_2)}{2\lambda_1-\lambda_2}\Delta^{2(\gamma\wedge\gamma_0)}\le K_N\zeta_\Delta+K_{p,N,T}\Delta^{2(\gamma\wedge\gamma_0)\wedge1},$$

这意味着

$$E\left|\sum_{l\Delta=s}^{t}[\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x_{u^*}^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(u^*))-\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))]\Delta\right|\le$$

$$\sum_{l\Delta=s}^{t}E|\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x_{u^*}^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(u^*))-\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))|\Delta\le$$

$$K_N\zeta_\Delta+K_{p,N,T}(t-s)\Delta^{(\gamma\wedge\gamma_0)\wedge1/2}.$$

由于 h 是有界函数,因此可以得出

$$I_2^{\varepsilon_n,N}=E[h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le k)\sum_{l\Delta=s}^{t}[\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x_{u^*}^{\varepsilon_n,N},\xi^{\varepsilon_n,N}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(u^*))-$$

$$\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta),\xi^{\varepsilon_n,N,x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta)}(u^*))V(x^{\varepsilon_n,N}(l\Delta))]\Delta=K_N\zeta_\Delta+K_{p,N,T}(t-s)\Delta^{(\gamma\wedge\gamma_0)\wedge1/2}.$$

将 $I_1^{\varepsilon_n,N}$ 和 $I_2^{\varepsilon_n,N}$ 代入(41)式可以得出

$$E[h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le k)\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(u),\xi^{\varepsilon_n,N}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(u))\mathrm{d}u]\to E[h(x^N(s_j),j\le$$

$$k)\sum_{l\Delta=s}^{t}\mathscr{L}^N(x^N(l\Delta))V(x^N(l\Delta))\Delta]+K_N\zeta_\Delta+O(\Delta^{(\gamma\wedge\gamma_0)\wedge1/2}),$$

这个和(40)式一起给出

$$0=E\{h(x^{\varepsilon_n,N}(s_j),j\le k)[V(x^{\varepsilon_n,N}(t))-V(x^{\varepsilon_n,N}(s))-\int_s^t\mathscr{L}^{\varepsilon_n,N}(x^{\varepsilon_n,N}(u),\xi^{\varepsilon_n,N}(u))V(x^{\varepsilon_n,N}(u))\mathrm{d}u]\}\to$$

$$E\{h(x^N(s_j),j\le k)[V(x^N(t))-V(x^N(s))-$$

$$\sum_{l\Delta=s}^{t}\mathscr{L}^N(x^N(l\Delta))V(x^N(l\Delta))\Delta]]\}+K_N\zeta_\Delta+O(\Delta^{(\gamma\wedge\gamma_0)\wedge1/2}).$$

最后让 $\Delta\to0$ 得到 $E\{h(x^N(s_j),j\le k)[V(x^N(t))-V(x^N(s))-\int_s^t\mathscr{L}^N(x_u^N)V(x^N(u))\mathrm{d}u]\}=0$,这说明

$x^{\varepsilon_n,N}(\cdot)$ 弱收敛到 $x^N(\cdot)$，其中 $x^N(\cdot)$ 就是 Itô 微分算子 $\mathscr{L}^N$ 的鞅问题的解，这也说明 $x^N(\cdot)$ 是截断方程(37)的弱解.

最后一步从截断方程回到到原始方程，这个论述类似于文献[16]：对不依赖于小参数 ε 的初始值 $x(0)\in\mathbf{R}^n$，$P(\cdot)$ 和 $P^N(\cdot)$ 分别表示 $x(\cdot)$ 和截断过程 $x^N(\cdot)$ 所诱导的概率测度，由假设(A4)知，对于初始值 x_0，$\mathscr{L}$对应的鞅问题具有唯一解，所以 $P(\cdot)$ 是唯一的.对任意的 $T<\infty$，由方程(34)确定的 $P(\cdot)$ 的唯一性在球 S_N 中与截断方程(37)所确定的 $P^N(\cdot)$ 是相同的.因为当 $N\to\infty$ 时，$P\{\sup_{t\le T}|x(t)|\le N\}\to 1$，再结合 $x^{\varepsilon_n,N}(\cdot)$ 的弱收敛，可以得出 $x^{\varepsilon_n}(\cdot)\Rightarrow x(\cdot)$，进一步，唯一性意味着极限不依赖于所选择的子序列$\{\varepsilon_n\}_n$，这就完成了这个证明.

5　直接平均法在奇异摄动的延迟和泛函扩散系统中的进展及面临的困难

当考虑时间延迟的影响时，奇异摄动的扩散系统被称为奇异摄动的延迟或泛函扩散系统.当前对于奇异摄动的延迟或泛函扩散系统的随机平均化原理还没有系统的处理方法，主要原因在于延迟或泛函随机系统的解不具有 Markov 性，这给当前的方法带来极大的困难，比如 Kolmogorov-Fokker-Planck 方程的建立直接依赖于 Markov 性，Poisson 方程方法中椭圆算子的构造如果依赖于延迟或泛函项，则变得难以处理.摄动的验证函数方法也依赖于泛函或延迟项的求导问题，当前也没有成熟的方法处理.直接平均方法在应用于奇异摄动的延迟或泛函扩散系统也变得非常困难，但还是一个可以利用的方法.

本文作者和合作者一起考虑了如下奇异摄动的泛函扩散系统[24]：

$$\mathrm{d}x^{\varepsilon}(t)=b(x_t^{\varepsilon},\xi^{\varepsilon}(t))\mathrm{d}t+\psi(x_t^{\varepsilon},\xi^{\varepsilon}(t))\mathrm{d}w_1(t),\tag{57a}$$

$$\mathrm{d}\xi^{\varepsilon}(t)=\frac{1}{\varepsilon}h(x_t^{\varepsilon},\xi^{\varepsilon}(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\phi(x_t^{\varepsilon},\xi^{\varepsilon}(t))\mathrm{d}w_2(t),\tag{57b}$$

此处初始值 $\xi(0)\in\mathbf{R}^m$ 和 $x_0\in C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$，其中 $x_t^{\varepsilon}:=\{x^{\varepsilon}(t+\theta):-\tau\le\theta\le 0\}$ 称为片段过程或解映射过程(参考文献[25])，泛函 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)':C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$，$\psi=[\psi_{ij}]_{n\times l_1}:C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{n\times l_1}$，$h=(h_1,h_2,\cdots,h_m)':C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 和 $\phi=[\phi_{ij}]_{m\times l_2}:C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{m\times l_2}$，$w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 仍然定义两个独立的标准 Brown 运动.在一些合适的条件下，建立了系统(57)的随机平均化原理，本文与之前的一篇文章(文献[26])的结果相比，本文是快慢耦合的奇异系统，而之前的文章快系统中不含慢变量.

与没有延迟的奇异摄动的扩散过程的平均化原理相比，由于此时建立的鞅过程同时依赖于解过程$x^{\varepsilon}(t)$和片段过程 x_t^{ε}，因此需要考虑片段过程的弱收敛问题，也需要指出解过程的分布是片段过程的分布的边际分布.由片段过程的弱收敛也可以得出解过程的弱收敛，但是在建立胎紧性时，需要考虑空间 $C([0,T];C([-\tau,0];\mathbf{R}^n))$，因此需要建立此空间的完备性和可分性等性质.

但是可以观察到的是，在系统(57)中，快系统自己本身不是延迟系统，所以当考虑凝固方程时，凝固方程本身是一个非延迟的随机微分方程，此时可以通过通常的方法考虑凝固方程的遍历性和参数的连续依赖性等性质.如果快系统(57b)自己本身也是延迟或泛函系统，则需要通过考虑片段过程来考虑遍历性和对参数的连续依赖性.由于片段过程是一个函数过程，此时会变得更加困难，而且此时慢系统对于快系统的依赖也是通过片段过程实现的，在考虑平均系统的时候，系数的平均也是通过片段过程的不变测度实现的，这个可能需要高度的计算和证明技巧.

值得注意的是，当前奇异摄动的问题在复杂系统的理论发展和实际的跨域无人系统中具有广泛应用，比如在“机—艇”跨域协同系统中，无人机子群相对速度快，无人艇子群相对速度慢，所以这个跨域无人系统呈现“快—慢”耦合的特点.由于存在子系统中个体间和两个子系统之间的信息交互的延迟现象和天气、地形等随机现象的影响，奇异摄动的延迟或泛函扩散系统可以建立更加精确的模型，因此具有重要的理论和实际意义.

参　考　文　献

[1]　GALTIER M，WAINRIB G.Multiscale analysis of slow-fast neuronal learning models with noise[J].J Math Neurosci，2012，2 (1)：1-64.

[2] BAO J,YIN G,YUAN C.Two-time-scale stochastic partial differential equations driven by α-stable noise:averaging principles[J].Bernoulli,2017,23:645-669.

[3] FREIDLIN M I,WENTZELL A D.Random Perturbations of Dynamical Systems[M].3rd Edition.Berlin:Springer,2012.

[4] KHASMINSKII R Z,YIN G.On transition densities of singularly perturbed diffusions with fast and slow components[J].SIAM J Appl Math,1996,56:1794-1819.

[5] PAVLIOTIS G A,STUART A M.Multiscale Methods:Averaging and Homogenization[M].Berlin:Springer,2008.

[6] SKOROKHOD A V,HOPPENSTEADT F C,SALEHI H D.Random Perturbation Methods with Applications in Science and Engineering[M].New York:Springer,2002.

[7] WU F,TIAN T,RAWLINGS J B,YIN G.Approximate method for stochastic chemical kinetics with two-time scales by chemical Langevin equations[J].J Chemical Phy,2016,144(17):174112.

[8] YIN G,ZHANG H Q.Singularly perturbed Markov chains:Limit results and applications[J].Ann Appl Probab,2007,17:207-229.

[9] YIN G,ZHANG Q.Continuous-time Markov Chains and Applications:A Two-time-scale Approach[M].New York:Springer,2013.

[10] KHASMINSKII R Z.On stochastic processes defined by differential equations with a small parameter[J].Theory Probab Appl,1966,11:211-228.

[11] KHASMINSKII R Z,YIN G.Asymptotic series for singularly perturbed Kolmogorov-Fokker-Planck Equations[J].SIAM J Appl Math,1996,56:1766-1793.

[12] KHASMINSKII R Z,YIN G.Limit behavior of two-time-scale diffusions revisited[J].J Differential Equations,2005,212:85-113.

[13] KHASMINSKII R Z.Stochastic Stability of Differential Equations[M].2nd Edition.Berlin:Springer,2012.

[14] PARDOUX E,VERETENNIKOV YU A.On the Poisson equation and diffusion approximation I[J].Ann Probab,2001,29(3):1061-1085.

[15] RÖCKNER M,XIE L.Diffusion approximation for fully coupled stochastic differential equations[J].Ann Probab,2021,49(3):1205-1236.

[16] KUSHNER H J.Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes,with Applications to Stochastic Systems Theory[M].Cambridge:MIT Press,1984.

[17] KUSHNER H J. Weak Convergence Methods and Singularly Perturbed Stochastic Control and Filtering Problems[M].Boston:Birkhäuser,1990.

[18] KURTZ T.Semigroups of conditioned shifts and approximation of Markov processes[J].Ann Probab,1975,3(4):618-642.

[19] KARATZAS I,Shreve S E.Brownian Motion and Stochastic Calculus[M].New York:Springer,1988.

[20] ZEIDLER E.Applied functional analysis:applications to mathematical physics[M].New York:Springer Science & Business Media,2012.

[21] BILLINGSLEY P.Convergence of Probability Measures[M].2nd Edition.New York:A Wiley-Interscience Publication,1999.

[22] MAO X.Stochastic Differential Equations and Applications[M].2nd Edition.Chichester:[s.n.],2007.

[23] BAO J,YIN G,YUAN C.Asymptotic analysis for functional stochastic differential equations[M].London:Springer,2016.

[24] WU F,YIN G.Fast-slow-coupled stochastic functional differential[J].J Differential Equations,2022,323:1-37.

[25] MOHAMMED S-E A.Stochastic Functional Differential Equations[M].New York:[s.n.],1986.

[26] WU F,YIN G.An averaging principle for two-time-scale stochastic functional differential equations[J].J Differential Equations,2020,269:1037-1077.

The averaged principle of diffusion systems with singular perturbations in the sense of weak convergence: overview and advancement of the direct-averaging method

Wu Fuke

(School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: This paper mainly introduces the direct-averaging method for stochastic averaged principle of diffusion systems with singular perturbations, which is based on the martingale problem and the weak convergence. Finally, the advances and difficulties of this method in stochastic averaged principle of the diffusion delay and functional diffusion systems with singular perturbations.

Keywords: singular perturbation; diffusion system; stochastic averaged principle; martingale problem; weak convergence

[责任编校 陈留院 赵晓华]

本期优秀校友介绍

吴付科，华中科技大学教授，博士，博士生导师，博士毕业于华中科技大学数学与统计学院，曾在英国 Strathclyde 大学数学与统计系从事博士后研究，国家优秀青年基金获得者，入选教育部新世纪优秀人才支持计划.1998 年本科毕业于河南师范大学数学系，主要从事随机微分方程以及相关领域的研究，近年来主持 7 项国家自然科学基金.曾获得过美国数学学会交流项目(AMS：Ky and Yu-Fen Fan)和德意志对外交流文化中心支持基金(DAAD)的支持，2015 年获得湖北省自然科学二等奖，2017 年获得英国皇家学会"高级牛顿学者"基金.迄今为止，在 *SIAM* 系列杂志，*JDE*，*SPA* 等期刊发表论文 90 余篇，出版 1 部专著《随机微分方程》和 1 部译著《随机微分方程：导论与应用》，当前为 *IET Control Theory & Applications* 编委.

苗雨，河南师范大学教授，博士，博士生导师，科技处处长，河南省优秀青年科技专家.2001 年本科毕业于河南师范大学数学与信息科学学院，研究领域是概率论与数理统计，主持 3 项国家自然科学基金(青年 1 项，面上 2 项).先后担任数学与信息科学学院院长，河南省应用统计学会理事长，河南省数学会副理事长，河南省统计学类教学指导委员会副主任委员，中国现场统计研究会经济与金融统计分会常务理事，中国商业统计学会常务理事等.入选教育部新世纪优秀人才支持计划，河南省科技创新杰出青年支持计划，河南省高校科技创新人才支持计划.国家一流本科专业建设点、河南省高校科技创新团队、河南省高等学校精品在线课程、河南省重点学科负责人.荣获河南省青年科技奖，河南省青少年科技创新奖，被中共河南省委，中共河南省委高校工委分别授予优秀共产党员称号.

李海刚，北京师范大学教授，博士，博士生导师.2003 年本科毕业于河南师范大学数学与信息科学学院，主要从事材料科学中的偏微分方程理论研究，在复合材料中的 Babuška 问题、流－固模型的悬浮问题等方面取得一系列进展，已在 *Adv Math*，*ARMA*，*JMPA*，*JFA*，*AIHP-NL*，*SIMA*，*TAMS*，*CV&PDEs* 等国际权威数学杂志发表论文 30 余篇. 2016 年获得霍英东青年教师基金，2018 年获得教育部自然科学二等奖.入选 2020 年度教育部长江学者奖励计划青年学者.