文章编号:1000-2367(2020)01-0005-06　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.01.002

白噪声驱动的立方正色散奥斯特洛夫斯基方程

闫威,张俏俏

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘　要:主要研究白噪声驱动的奥斯特洛夫斯基方程的柯西问题.当初值 $u_0(\cdot,\omega)\in H^s(R)(a.e.\omega\in\Omega)$,$s\geq\frac{1}{4}$ 且 $\Phi\in L_2^{0,s}$ 时,初值 F_0- 可测,使用傅里叶限制定理、三线性估计和不动点定理,得到问题的局部适定性.

关键词:柯西问题;白噪声驱动的立方奥斯特洛夫斯基方程;三线性估计

中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A

本文考虑下列的白噪声驱动的立方正色散奥斯特洛夫斯基方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)=\left[\beta\partial_x^3u(t)-\frac{1}{3}\partial x(u^3)+\gamma\partial_x^{-1}u\right]\mathrm{d}t+\Phi\mathrm{d}W(t),\beta>0,\gamma>0,\\ u(0)=u_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中,$W(t)=\frac{\partial B}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_je_j$,$e_j$ 是 $L^2(R)$ 中的一组标准正交基,$(\beta_j)_{j\in N}$ 是在固定概率空间中相互独立的实布朗运动的子列,而且它还是在 $L^2(R)$ 中的圆柱形维纳过程.事实上,(1)式与下列方程等价:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\beta\partial_x^3u(t)-\frac{1}{3}\partial x(u^3)+\gamma\partial_x^{-1}u\right]+\Phi\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t},\beta>0,\gamma>0,\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{2}$$

方程(2)是带有随机项 $\Phi\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}$ 正色散奥斯特洛夫斯基方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\beta\partial_x^3u(t)-\frac{1}{3}\partial x(u^3)+\gamma\partial_x^{-1}u\right],\beta>0,\gamma>0,\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{3}$$

文献[1]提出了方程(1).该方程是考虑科旋转液体中弱非线性长波的模型.它描述了在旋转参照系中海面波在海洋中的传播.事实上,β 决定色散的类型,更确切地说,$\beta<0$(负色散)是对于海洋中的平面波和内波,或海底不平坦的浅槽中的平面波,和 $\beta>0$(正色散)是对于液体表面的毛细管波或等离子体中的斜磁声波[2-3]).一些人研究过方程(1)的柯西问题[4-6].

目前,白噪声驱动的奥斯特洛夫斯基方程的柯西问题在低正则性空间中还没有被研究.在文献[7]中,使用傅里叶限制范数方法[8-9],第一作者及其合作者证明了具有正色散的白噪声驱动的二次方程的柯西问题当初值 $u_0(\cdot,\omega)\in H^s(R)(a.e.\omega\in\Omega)$,$s>-\frac{3}{4}$ 是局部适定的.

由文献[2]的命题 2.1 知,使用空间 $X_{s,b}$,$b<\frac{1}{2}$ 是必要的,简略地说,指数 b 代表时间的光滑性,$\bar{u}=\int_0^tU(t-s)\Phi\mathrm{d}W(s)$ 与布朗运动具有相同的时间规律性.$E\bar{u}=\int_0^tU(t-s)\Phi\mathrm{d}W(s)$ 属于 $H^b([0,T])$ 其中 $b<$

收稿日期:2019-10-15;**修回日期**:2019-12-12.

基金项目:国家自然科学基金(11401180)

作者简介(通信作者):闫威(1982—),男,河南项城人,河南师范大学特聘教授,博士生导师,主要从事偏微分方程、调和分析、初值随机化以及随机偏微分方程的研究,E-mail:011133@htu.cn.

$\frac{1}{2}$.因此,必须考虑空间 $X_{s,b}$,$b<\frac{1}{2}$,而且必须证明这些空间中项 $\frac{1}{3}\partial_x(u^3)$ 的三线性估计.

本文的主要研究成果见定理 1.

定理 1 让 $u_0(x,\omega)\in L^2(\Omega;H^s(R))$,其中 $s\geq\frac{1}{4}$,$\Phi\in L_2^{0,x}$,u_0 是 F_0- 可测的,$b=\frac{1}{2}-2\varepsilon$ 而且,则对于 $a.e.\omega\in\Omega$,存在一个 $T_\omega>0$ 和(1) 式关于$[0,T_\omega]$ 的柯西问题的唯一解满足 $u\in C([0,T_\omega];H^s(R))\cap X_{s,b}^{T_w}$.

1 准备工作

在本节中,将回顾一些基本概念和一些不等式,它们在建立主要定理中起到了关键的作用.

1.1 空 间

在本小节中,回顾将用到的一些空间概念.

H 是一个希尔伯特空间. $L_2^0(L^2(R),H)$ 是 $L^2(R)$ 到 H 的 Hilbert-Schmidt 算子,其范数是 $\|\Phi\|^2_{L_2^0(R),H}=\sum_{j\in N}|\Phi e_j|_H^2$,$H^s(R)$ 是 Sobolev 空间,其范数是 $\|f\|_{H^s(R)}=\|\langle\xi\rangle^sF_xf\|_{L_0^2(R)}$,其中$\langle\xi\rangle^s=(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}$ 对任意的$\xi\in R$ 都成立,F_xu 和$F_x^{-1}u$ 分别表示u 相对于其空间变量的傅立叶变换和傅立叶逆变换.

当 $H=H^s(R)$ 时,$L_2^{0,s}=L_2^0(L^2(R),H^s(R))$.$\vartheta(R^2)$ 表示 Schwartz space 空间,$\vartheta'(R^2)$ 表示它的对偶空间. 函数 $u(x,t)$ 属于 $X_{s,b}(R^2)$ 当且仅当 $u\in\vartheta'(R^2)$,$\|u\|_{X_{s,b}(R^2)}=\left\|\langle\xi\rangle^s\left(\tau+\beta\xi^3+\frac{\gamma}{\xi}\right)^bFu(\xi,\tau)\right\|_{L_\tau^2(R)L_\xi^2(R)}<\infty$,对于任意给定的区间 L,有 $X_{s,b}(R\times L)=\{u=U|_{R\times L}:U\in X_{s,b}(R^2)\}$ 相应地,当 $L=[0,T]$,$X_{s,b}(R\times L)$ 可以缩写为 $X_{s,b}^T$.

1.2 估 计

在本小节中,给出一些符号和一些 Strichartz 估计.

符号:用 $A_1|X|\leq|Y|$ 表示 $X\sim Y$,其中 $A_j>0(j=1,2)$;用 $|X|>C|Y|$ 表示 $X\gg Y$ 其中$C(>2)$ 是某个正常数.F_xu 和 $F_x^{-1}u$ 分别表示 u 关于所有变量的傅立叶变换和傅立叶逆变换.

在本文中,设 (Ω,F,P) 为一个概率空间,它具有数值$(F_t)_{t\geq0}$ 且 $Ef=\int_\Omega f\,\mathrm{d}P$.

假设是一个零均值高斯过程,其协方差函数由下面给出 $E(B(t,x)B(s,y))=(t\wedge s)(x\wedge y)$,$t,x\geq0$,$x,y\in R$,其中$(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 空间的内积.

$W(t)=\frac{\partial B}{\partial x}=\sum_{j=1}^\infty\beta_je_j$ 是$(W(t))_{t\geq0}$ 在 $L^2(R)$ 上联系数值$(F_t)_{t\geq0}$ 的一个圆柱形维纳过程,其中$(e_k)_{k\in N}$ 是 $L^2(R)$ 中的一组标准正交基,$(\beta_k)_{k\in N}$ 是在空间$(\Omega,F,P,(F_t)_{t\geq0})$ 中相互独立的实布朗运动的子列.

此外,始终假设:ψ 是满足 $0\leq\psi\leq1$ 上的光滑函数,$\mathrm{supp}\psi\subset[-1,2]$ 且当 $t\in[0,1]$ 时,$\psi=1$.

$\psi_\delta(t)=\psi\left(\frac{t}{\delta}\right)$.$\phi(\xi)=\beta\xi^3+\frac{\gamma}{\xi}$,$\sigma=\tau+\phi(\xi)$ 且 $\sigma_k=\tau_k+\phi(\xi_k)(k=1,2)$.$N=2\left(\frac{\gamma}{3\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$P^Nu=C\int_{|\xi|\geq N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi-t\phi(\xi))}F_xu(\xi)\mathrm{d}\xi$.$P_Nu=C\int_{|\xi|\leq N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi-t\phi(\xi))}F_xu(\xi)\mathrm{d}\xi$.$U(t_0)=\int_R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi-t\phi(\xi))}F_xu_0(\xi)\mathrm{d}\xi$.

$\|f\|_{L_t^qL_x^p}=\left(\int_R\left(\int_R|f(x,t)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$,$\|f\|_{L_{xt}^p}=\|f\|_{L_t^pL_x^p}$.

引理 1(具有正色散的 Ostrovsky 方程) 若 $b=\frac{1}{2}+\varepsilon$ 且 $\beta>0$,$\gamma>0$.则对于 $0\leq s\leq\frac{1}{2}$,得到

$$\|I^S(u_1,u_2)\|_{L_{xt}^2}\leq C\prod_{j=1}^2\|u_j\|_{X_{0,\frac{3+2s}{4}b}},\tag{4}$$

其中 $FI^s(u_1,u_2)(\xi,\tau)=\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} |\xi_1^2-\xi_2^2|^s \left|1+\frac{\gamma}{3\beta\xi_1^2\xi_2^2}\right|^s Fu_1(\xi_1,\tau_1)Fu_2(\xi_2,\tau_2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau_1$.

对于引理 1,可参照文献[10].

引理 2(具有正色散的 Ostrovsky 方程)　若 $b=\frac{1}{2}+\varepsilon$,则得到

$$\|u\|_{L_{xt}^4}\leq C\prod_{j=1}^{2}\|u_j\|_{X_{0,\frac{3}{4}b}},\tag{5}$$

$$\|P^N D_x^{\frac{1}{8}}u\|_{L_{xt}^4}\leq C\prod_{j=1}^{2}\|u_j\|_{X_{0,\frac{3}{5}b}},\tag{6}$$

$$\|P^N\partial_x u\|_{l_x^\infty L_t^2}\leq C\|u\|_{X_{0,b}},\tag{7}$$

$$\|P_N u\|_{L_x^2 L_t^\infty}\leq C\|u\|_{X_{0,b}},\tag{8}$$

对于引理 2,可以参照文献[10]中的引理 2.7.

引理 3　若 $u_0\in H^s(R)$,$c>\frac{1}{2}$,$0<b<\frac{1}{2}$.则对于 $t\in[0,T]$,$U(t)u_0\in X_{s,c}^T$ 且存在一个常数 $k_2>0$,使得

$$\|U(t)u_0\|_{X_{s,c}^T}\leq k_2\|u_0\|_{H^s}.\tag{9}$$

有一个常数 $C>0$ 使得当 $t\in[0,T]$,$f\in X_{s,-b}^T$ 时,有

$$\left\|\int_0^T U(t-s)f(s)\mathrm{d}s\right\|_{X_{s,b}^T}\leq CT^{1-2b}\|f\|_{X_{s,-b}^T}.\tag{10}$$

关于引理 3 的证明,请参考文献[7]中的引理 3.1.

引理 4　若 $s\in R$,$b<\frac{1}{2}$,$\Phi\in L_2^{0,s}$,且

$$\bar{u}=\int_0^t U(t-s)\Phi\mathrm{d}W(s),\tag{11}$$

则可得

$$\psi\bar{u}\in L^2(\Omega;X_{s,b}),E(\|\Psi\bar{u}\|_{X_{s,b}}^2)\leq M(b,\psi)\|\Phi\|_{L_2^{0,s}}^2,\tag{12}$$

其中 $M(b,\psi)$ 是一个仅依赖于 b,$\|\psi\|_{H^b}$,$\||t|^{\frac{1}{2}}\psi\|_{L^2}$,$\||t|^{\frac{1}{2}}\psi\|_{L^\infty}$ 的常数.

引理 4 的证明可以类似于文献[7]中的命题 2.1 的证明.

2　关于正色散 Ostrovsky 方程的三线性估计

在这一部分中,会给出一些重要的三线性估计,它们对建立定理 1 有着非常重要的作用.

引理 5　若 $s\geq\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 且 $u_j(j=1,2,3)\in X_{s,b}$.则有

$$\|\partial_x(u_1u_2u_3)\|_{X_{s,b}}\leq C\prod_{j=1}^{3}\|u_j\|_{X_{s,b}}.\tag{13}$$

证明　定义 $F_j(\xi_j,\tau_j)=\langle\xi_j\rangle^s\langle\sigma_j\rangle^b\zeta u_j(\xi_j,\tau_j)(j=1,2,3)$,$F(\xi,\tau)=\langle\xi\rangle^s|\xi|^{-b}\langle\sigma\rangle^{-b}\zeta u(\xi,\tau)$,为了获得(13)式,通过对偶性,需要证明

$$\int_{R^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_1(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)|F|\prod_{j=1}^{3}|F_j|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{j=1}^{3}\|F_j\|_{L_{\xi\tau}^2}.\tag{14}$$

其中 $K_1(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)=\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\sigma\rangle^b\prod_{j=1}^{3}\langle\xi_j\rangle^s\langle\sigma_j\rangle^b}$.在不失一般性的情况下,假定 $F\geq0$,$F_j\geq0(j=1,2,3)$ 且由对称性有 $|\xi_1|\geq|\xi_2|\geq|\xi_3|$,定义

$$D=\left\{(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\in R^6,\xi=\sum_{j=1}^{3}\xi_j,\tau=\sum_{j=1}^{3}\tau_j,\ |\xi_3|\le|\xi_2|\le|\xi_1|\right\}.$$

显然地,$D=\bigcup_{j=1}^{4}\Omega_j$,其中

$$\Omega_1=\{(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\in D,\ |\xi_1|\le 8N\},$$

$$\Omega_2=\{(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\in D,\ |\xi_1|\le 8N,\ |\xi_1|\ge 4|\xi_2|\},$$

$$\Omega_3=\left\{(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\in D,\ |\xi_2|\le|\xi_1|\le 4|\xi_2|,\ |\xi_1|\le 8N,\ |\xi_3|\le\frac{|\xi_2|}{4}\right\},$$

$$\Omega_4=\left\{(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\in D,\ |\xi_2|\le|\xi_1|\le|\xi_2|,\ |\xi_1|\ge 8N,\ |\xi_3|\le\frac{|\xi_2|}{4}\right\},$$

对于 $\Omega_j(1\le j\le 4,j\in N)$ 的积分将由 $J_k(1\le k\le 4,k\in N)$ 表示.

定义 $Ff_j=\dfrac{F_j}{\langle\sigma_j\rangle^b}(j=1,2,3)$,$Ff=\dfrac{F}{\langle\sigma\rangle^b}$.

(1)Ω_1.在这个区域里,因为 $|\xi_3|\le|\xi_2|\le|\xi_1|\le 8N$,得到 $K_1(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\le\dfrac{C}{\langle\sigma\rangle^b\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}$.

通过应用 Plancherel 恒等式和赫尔德不等式,(6)式和 $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\varepsilon\right)<\dfrac{1}{2}-\varepsilon$, 可得

$$J_1\le C\int_{R^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3\\ \tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3}}\frac{F\prod_{j=1}^{3}F_j}{\langle\sigma\rangle^b\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}d\xi_1d\tau_1d\xi_2d\tau_2d\xi d\tau\le C\int_{R^2}ff_1f_2f_3dxdt\le$$

$$C\|f\|_{L_{xt}^2}\prod_{j=1}^{3}\|f_j\|_{L_{xt}^6}\le C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{j=1}^{3}\|f_j\|_{X_{0,\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\le C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{j=1}^{3}\|F_j\|_{L_{\xi\tau}^2}.\tag{15}$$

(2)Ω_2.因为 $|\xi_1|\ge 8N,\ |\xi_1|\ge 4|\xi_2|,\ |\xi_2|\le N$,得到 $K_1(\xi_1,\tau_2,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\le\dfrac{C}{\langle\sigma\rangle^b}\dfrac{|\xi|}{\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}\le$

$$C\frac{|\xi_2^2-\xi_1^2|^{\frac{1}{2}-10\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}\frac{|\xi|^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma\rangle^b}.$$

通过应用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 1,得到

$$J_3\le C\int_{R^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3\\ \tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3}}\frac{|\xi_2^2-\xi_1^2|^{\frac{1}{2}-10\varepsilon}|\xi|^{\frac{1}{4}}F\prod_{j=1}^{3}F_j}{\langle\sigma\rangle^b\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}d\xi_1d\tau_1d\xi_2d\tau_2d\xi d\tau\le C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{j=1}^{3}\|F_j\|_{L_{\xi\tau}^2}.$$

(3)Ω_3.当 $s\ge\dfrac{1}{4}$,因为 $|\xi_2|\ge 4|\xi_3|$,得到 $K_1(\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2,\xi,\tau)\le C\dfrac{|\xi_2|^{\frac{3}{4}}}{\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}\le C\dfrac{|\xi_2^2-\xi_3^2|^{\frac{3}{8}}}{\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}$,通过应用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 1,得到

$$J_3\le C\int_{R^2}\int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3\\ \tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3}}\frac{|\xi_2^2-\xi_3^2|^{\frac{3}{8}}F\prod_{j=1}^{2}F_j}{\prod_{j=1}^{3}\langle\sigma_j\rangle^b}d\xi_1d\tau_1d\xi_2d\tau_2d\xi d\tau\le C\|F\|_{L_{\xi\tau}^2}\prod_{j=1}^{3}\|F_j\|_{L_{\xi\tau}^2}.$$

(4)Ω_4.当 $s\ge 0$ 时,由于 $\xi_1\xi_2\le 0$,得到 $K_1(\xi_1,\tau_1,\xi,\tau)\le C\dfrac{|\xi_1|^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{2}\langle\sigma_j\rangle^b}\le C\dfrac{|\xi_2^2-\xi_1^2|^{\frac{1}{4}+\varepsilon}}{\prod_{j=1}^{2}\langle\sigma_j\rangle^b}$.

这个情况的证明与 Ω_4 的证明形似.

从而得到引理 5 的证明.

3　局部适定性

在这一部分,受文献[11-12]的启发,证明定理 1.

若 $z(t)=U(t)u_0,\bar{u}=\int_0^t U(t-s)\Phi\mathrm{d}W(s)$.定义停止时间 T_w 通过

$$T_w=\inf\left\{T>0,CT^{1-2b}(\|u_0\|_{H^s}+\|\bar{u}\|_{Z_{s,b,b}^T}+1)^2\geq\frac{1}{4}\right\}.\tag{16}$$

从引理 4,引理 5,得到

$$\|\bar{u}\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T}<C(\omega).\tag{17}$$

几乎可以确定 $\omega\in\Omega$.

此外,因为 $b=\frac{1}{2}-\varepsilon$,$\|\bar{u}\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T}$ 几乎可以确定是关于 T 是连续的.下面几乎可以确定 $T_w>0$.因为 $\|\bar{u}\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T}$ 是 F_T 可测的,T_w 是停止时间.

(1)式的解和下列积分方程的解是等价的

$$u(t)=U(t)u_0+\frac{1}{3}\int_0^t U(t-s)\partial_x(u^3)\mathrm{d}s+\int_0^t U(t-s)\Phi\mathrm{d}W(s),\tag{18}$$

且 $\nu(t)=u(t)-z(t)-\bar{u}$.则,得到

$$\nu(t)=u(t)-z(t)-\bar{u}=\frac{1}{3}\int_0^t U(t-s)\partial_x(\nu+z(t)+\bar{u})^2\mathrm{d}s.\tag{19}$$

定义

$$G(\nu)=\frac{1}{3}\int_0^t U(t-s)\partial_x(\nu+z(t)+\bar{u})^3\mathrm{d}s,\tag{20}$$

$$B^{T_w}=\{\nu\in\widetilde{Z}_{s,-b,b}^{T(\omega)}\|\nu\|_{\widetilde{Z}_{s,-b,b}^{T(\omega)}}\leq 1\}.\tag{21}$$

通过应用引理 1 至引理 5,得到

$$\begin{aligned}&\|G(\nu)_{X_{s,b}^T}\|\leq\left\|\frac{1}{3}\int_0^t U(t-s)\partial_x(\nu-z(t)+\bar{u})^3\mathrm{d}s\right\|_{X_{s,b}^T}\leq C\|\nu^3+z^3+(\bar{u})^3+2\nu^2z+2\nu^2\bar{u}+2z^2\bar{u}\|_{X_{s,-b}^T}\leq\\&CT^{1-2b}(\|\nu^3\|_{X_{s,-b}^T}+\|z(t)^3\|_{X_{s,-b}^T}+\|\bar{u}^3\|_{X_{s,-b}^T}+\|\nu z\|_{X_{s,-b}^T}+\|\nu\bar{u}\|_{X_{s,-b}^T}+\|z\bar{u}\|_{X_{s,-b}^T})\leq\\&CT^{1-2b}[\|\nu\|_{\dot{Z}_{s,b,b}^T}^3+\|z(t)\|_{X_{s,d}^T}^3+\|\bar{u}\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T}^3]\leq CT^{1-2b}(\|\nu\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T}^3+\|u_0\|_{H^s}^3+\|\bar{u}\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T}^3)\leq\\&CT^{1-2b}(1+\|u_0\|_{H^s}+\|\bar{u}\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T})^3.\end{aligned}\tag{22}$$

结合(21)、(22)式,得到

$$\|G(\nu)_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T}\|\leq CT^{1-2b}(1+\|u_0\|_{H^s}+\|\bar{u}\|_{\dot{Z}_{s,-b,b}^T})^3\leq 1.\tag{23}$$

相似地,得到

$$\begin{aligned}&\|G(\nu_1)-G(\nu_2)\|_{Z_{s,-b,b}^T}\leq CT^{1-2b}\|\nu_1-\nu_2\|_{Z_{s,-b,b}^T}\times(\|\nu_1\|_{Z_{s,-b,b}^T}^2+\|\nu_2\|_{Z_{s,-b,b}^T}+\|u_0\|_{H^s}^2+\\&\|\bar{u}\|_{Z_{s,-b,b}^T}^2)\leq CT^{1-2b}\|\nu_1-\nu_2\|_{Z_{s,-b,b}^T}(1+\|u_0\|_{H^s}^2+\|\bar{u}\|_{Z_{s,-b,b}^T}^2)\leq\frac{1}{2}\|\nu_1-\nu_2\|_{Z_{s,-b,b}^T}.\end{aligned}\tag{24}$$

因此,G 有一个唯一确定的点,它是 ν 在区间$[0,T_w]$满足(1)式的唯一过程.因此,几乎可以确定的是存在一个解 ν,它满足 $G\nu=\nu$.因此,通过利用类似于(24)式的证明,得到

$$\|\nu_1-\nu_2\|_{Z_{s,-b,b}^T}\leq\frac{1}{2}\|\nu_1-\nu_2\|_{Z_{s,-b,b}^T}.\tag{25}$$

因此,可以几乎确定的是 $\nu_1=\nu_2$.从(19)式得到 $u=z(t)+\nu+\bar{u}$,因此,几乎可以确定的是证明了(20)式存

在一个唯一的解 u.但仍然需要证明的是在 $s \geq \frac{1}{4}$ 的空间 $H^s(R)$ 所得的解 u 是连续的.

因为 $\| z(t) \|_{X^T_{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq C \| U(t)u_0 \|_{X^T_{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq C \| u_0 \|_{H^s}$. 因此,$z(t) \in C([0,T];H^s(R))$. 显然地,

$$\| \nu \|_{X^T_{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq C \left\| \int_0^t U(t-\tau)\partial_x[(\nu + z(t) + \bar{u})^3]\mathrm{d}\tau \right\|_{X^T_{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq C \| \partial_x[(\nu + z(t) + \bar{u})^3] \|_{X^T_{s,-\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq$$

$$C \| \partial_x[(\nu + z(t) + \bar{u})^3] \|_{\dot{Z}^T_{s,-b,b}} \leq C(1 + \| u_0 \|_{H^s} + C(\omega))^2 < \infty.$$

通过利用类似于命题 4.7[12] 的证明,几乎可以确定 $\bar{u}$ 的连续性.

证毕.

参 考 文 献

[1] OSTROVSKII L A.Nonlinear internal waves in a rotating ocean[J].Okeanologiya,1978,18:181-191.

[2] GALKIN V,STEPANYANTS Y.On the existence of stationary solitary waves in a rotatingfl uid[J].J Appl Math Mech,1991,55:939-943.

[3] GILMAN O,GRIMSHAW R,STEPANYANTS Y.Approximate and numerical solutions of the stationary Ostrovsky equation[J].Stud Appl Math,1995,95:115-126.

[4] LEVANDOSKY S,LIU Y.Stability of solitary waves of a generalized Ostrovsky equation[J].SIAM J Math Anal,2006,38:985-1011.

[5] GUI G,LIU Y.On the Cauchy problem for the Ostrovsky equation with positive dispersion[J].Commun Partial Diff Eqns,2007,32:1895-1916.

[6] WANG J,WANG Z.Sharp well-posedness of the Cauchy problem for a generalized Ostrovsky equation with positive dispersion[J].Bound Value Probl,2017,186:12.

[7] YAN W,YANG M,DUAN J.White noise driven Ostrovsky equation[J].J Diff Eqns,2019,267:5701-5735.

[8] BOURGAIN J.Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations[J]. Part II:The KdV equation,Geom Funct Anal,1993,3:209-262.

[9] KENIG C,PONCE G,VEGA L.A bilinear estimate with applications to the KdV equation[J].J Amer Math Soc,1996,9:573-603.

[10] YAN W,LI Y,HUANG J,et al.The Cauchy problem for the Ostrovsky equation with positive dispersion[J].Nonlinear Differential Equations Appl,2018,25:37.

[11] de Bouard A,DEBUSSCHE A,TSUTSUMI Y.White noise driven Korteweg-de Vriesequation[J].J Funct Anal,1999,169:532-558.

[12] RICHARDS G.Maximal-in-time behavior of deterministic and stochastic dispersive differential equations[D].Toronto: University of Toronto,2012.

White noise driven cubic Ostrovsky equation

Yan Wei,Zhang Qiaoqiao

(College of Mathematics and Information Science,Henan Normal University,Xinxiang 453007,China)

Abstract:This paper mainly studied the Cauchy problem for the white noise driven cubic Ostrovsky equation. When $u_0(\cdot,\omega) \in H^s(R)(a.e.\omega \in \Omega), s \geq \frac{1}{4}$ 且 $\Phi \in L_2^{0,s}$, the data is F_0 measurable, by using the Fourier restriction norm method and trilinear estimates as well as the fixed point theorem, we obtain the local well-posedness result.

Keywords:Cauchy problem;cubic Ostrovsky equation driven by white noise;trilinear estimate

[责任编校 陈留院 赵晓华]