第 43 卷　第 2 期　　河南师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 43　No. 2
2015 年 3 月　　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　　Mar. 2015

文章编号：1000－2367(2015)02－0001－06　　DOI：10.16366/j.cnki.1000－2367.2015.02.001

半正规、共轭置换与有限群的超可解性

赵先鹤，汪艳丽

(河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘　要：研究了有限群的超可解性问题，结合共轭置换子群与半正规子群的概念，在群 G 的极大子群(2-极大子群)或共轭置换或半正规的条件下给出了群 G 超可解的若干充分条件.

关键词：共轭置换子群；超可解群；半正规子群

中图分类号：O152　　**文献标志码：**A

共轭置换子群的概念是由 T. Foguel 在文献[1]中首次提出的. 群 G 的子群 H 称为 G 的共轭置换子群，若 $HH^x = H^xH$，对任意 $x \in G$ 都成立.

这一概念与群 G 结构之间的关系已被许多群论学者所研究，见文献[1－7]. 其中，在文献[2,4]中作者分别研究了 G 的极大子群和 2- 极大子群与 G 的超可解性之间的关系.

我们称群 G 的子群 A(在 G 中)是半正规的，如果存在一个子群 B 使得 $G = AB$，且对 B 的任何真子群 B_1，AB_1 是 G 的真子群，这样的子群 B 叫作 A 在 G 中的 S- 补. A 在 G 中的 S- 补之集合记为 $S_G(A)$.

对于半正规子群的研究已有许多很好的结果(如文献[8－9])，特别地，苏向盈在文献[9]中证明了如果有限群 G 的极大子群(2- 极大子群)在 G 中均是半正规的，则 G 是超可解的.

综合以上两方面的研究，在本文中，我们把半正规与共轭置换结合起来证明了：

定理 1　若有限群 G 的极大子群均在 G 中或共轭置换或半正规，则 G 超可解.

定理 2　如果 G 的 2- 极大子群在 G 中或半正规或共轭置换，且 G 的任何截断均不同构于内交换群，则 G 是超可解的.

本文所讨论的群 G 都是有限群，p 是 $|G|$ 的一个素因子，用 G_p 表示 G 的 Sylow p- 子群；$G_{p'}$ 表示 G 的 p'-Hall 子群；$\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的素因子的集合. 文中的其它符号都是标准的，参见文献[10].

1　主要引理

引理 1[1]　设 G 是一个群，$H <_{c-p} G$ 且 H 为 p- 群，则 H^G 必为 p- 群.

引理 2[1]　若 G 的极大子群均在 G 中共轭置换，则 G 幂零.

引理 3[9]　群 G 是超可解的当且仅当它的极大子群均是半正规的.

引理 4[9]　如果群 G 的 2- 极大子群都是半正规的，则 G 是超可解的.

引理 5[10]　设 G 是一个群且 $\Phi(G) = 1$，则 $F(G)$ 是交换群且 $F(G) = \langle N \mid N$ 是 G 的可解的极小正规子群$\rangle$.

引理 6[11]　设 G_1, G_2 是 G 的子群满足 $G = G_1G_2$，$P \in Syl_p(G)$. 则存在 $P_1 \in Syl_p(G_1)$，$P_2 \in Syl_p(G_2)$ 使得 $P = P_1P_2$.

收稿日期：2014-05-19；**修回日期：**2014-11-12.

基金项目：国家自然科学基金(10771172；11271301；U1204101)；河南省教育厅重点项目(13B110085)；校青年骨干教育培养计划(01016500608).

作者简介：赵先鹤(1979－)，女，河南南阳人，河南师范大学副教授，博士，主要从事有限群研究，E-mail：zhaoxianhe989@163.com.

引理 7[11] 设 G 是一个群,$M \lessdot G$,如果 M 的极大子群 H 在 G 中共轭置换,则 $H \trianglelefteq G$ 或者 $M \trianglelefteq G$.

证明 因为 $H <_{c-p} G$,则 $H \lhd \lhd G$,从而必存在一个次正规群列

$$H \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq K_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_t \trianglelefteq G,$$

由 $H <_{c-p} M$ 且 $H \lessdot M$ 得 $H \trianglelefteq M$,从而 $M \leq N_G(H)$.

若 $M = N_G(H)$,由 $K_1 \leq N_G(H)$ 得 $K_1 \leq M$,即 $H < K_1 \leq M$. 由 $H \lessdot M$ 得 $K_1 = M$. 又由 M 的极大性可知不存在 $K_2, \cdots, K_t$,即 $N < K_1 = M \trianglelefteq G$.

若 $M < N_G(H)$,由 M 的极大性可得 $N_G(H) = G$,则 $H \trianglelefteq G$.

引理 8 设 G 是一个群,$\pi(G) = \{p, q\}(p \neq q)$,$P$ 是 G 的 Sylow p- 子群,Q 为 G 的 Sylow q- 子群. 如果 P 是 G 的唯一极小正规子群,且 $|Q| = q$. 则 G 为内交换群.

证明 显然 G 可解,所以对任意的 $A \lessdot G$,有 $|G : A| = q$ 或 p^i. 若 $|G : A| = p^i, i \geq 1$. 因为 $P \in Syl_p(G)$,所以 $P \nleq A$,故 $G = PA$. 由 P 为可解的极小正规子群可知 P 是交换群,从而 $P \cap A \trianglelefteq P$,又因为 A 正规化 P,所以 $P \cap A \trianglelefteq A$,从而 $P \cap A \trianglelefteq G$. 因为 $P \nleq A$ 且 P 的唯一极小正规性知 $P \cap A = 1$. 又因 $G = PQ$,所以 $|A| = |Q|$. 从而 G 的极大子群要么是 P 要么是 q 阶的循环群,于是 G 的所有真子群都是交换的,则 G 为内交换群.

引理 9[9] 设 A 是 G 的半正规子群,则

(1) 如果 $A \leq H \leq G$,那么 A 是 H 的半正规子群;

(2) 如果 $N \trianglelefteq G$,那么 AN/N 是 G/N 的半正规子群.

引理 10[3] 若 $H <_{c-p} G$,则任意的 $N \trianglelefteq G$,有 $HN/N <_{c-p} G/N$.

引理 11 设 G 是一个群,如果 G 的 2- 极大子群在 G 中或共轭置换或半正规,对于任意的 $N \trianglelefteq G$,则 G/N 的 2- 极大子群在 G/N 中或共轭置换或半正规.

证明 设 $M/N \lessdot G/N$,则 $M \lessdot G$. 否则,必存在 $M < M'$ 使得 $M' \lessdot G$. 因为 $N \leq M < M'$,故 $M/N < M'/N < G/N$,此与 $M/N \lessdot G/N$ 矛盾. 所以 $M \lessdot G$. 设 $M_1/N \lessdot M/N$,则 $M_1 \lessdot M$,于是 M_1 是 G 的 2- 极大子群. 由题设条件可知 M_1 在 G 中或共轭置换或者半正规,又由引理 9 及引理 10 可知 M_1/N 在 G/N 中或共轭置换或半正规,所以 G/N 的 2- 极大子群在 G/N 中或共轭置换或半正规.

2 主要结果

在证明主要结果之前,我们需要下面的命题.

命题 1 设群 G 的 2- 极大子群在 G 中共轭置换,且 G 的任何截断均不同构于内交换群,则 G 超可解.

证明 假设 G 为极小阶反例,由引理 11 可知定理条件商群遗传,因此我们可以假设 $\Phi(G) = 1$.

(1) $G = PQ, P \trianglelefteq G, Q$ 为循环群,其中 $P \in Syl_p(G), Q \in Syl_q(G)$.

由引理 2 可知 G 的极大子群都是幂零的,从而 G 是内幂零群. 则 $G = PQ, P \trianglelefteq G, Q$ 为循环群,其中 $P \in Syl_p(G), Q \in Syl_q(G)$.

(2) G 有唯一的极小正规子群 N,满足 $N = P = F(G) = C_G(N)$.

设 N 是 G 的极小正规子群,由(1) 可知 N 为初等交换群. 事实上,N 是 G 唯一的极小正规子群. 否则,若 G 还有另一极小正规子群 N^*,由引理 11 可知 G/N 与 G/N^* 超可解,所以 $G/N \cap N^* \lesssim G/N \times G/N^*$ 超可解. 又因为 $N \cap N^* = 1$,所以 G 超可解,矛盾. 所以 N 是唯一极小正规子群. 由 N 的唯一极小正规性及引理 5 得 $F(G) = N$. 由步骤(1) 中 $P \trianglelefteq G$ 可知 $P \leq F(G) = N$,又因为 N 为素数幂阶群,所以 $P = N$. 由 G 可解可得 $C_G(F(G)) \leq F(G)$,即 $C_G(N) \leq N$,再由 N 初等交换可知 $N \leq C_G(N)$,于是 $C_G(N) = N$. 所以 $N = P = F(G) = C_G(N)$.

(3) Q 为 G 的极大子群,且 Q 为素数阶群.

证明如下.

(3.1) Q 为 G 的极大子群.

假设 Q 不是 G 的极大子群，则存在 $M \lessdot G$ 使得 $Q < M$，所以存在 $L \lessdot M$ 使得 $Q \leq L \lessdot M$. 因为 M 为幂零群，所以 $Q \trianglelefteq L$. 又因为 $L <_{c-p} G$，所以 $L \lhd \lhd G$，从而 $Q \lhd \lhd G$. 由于 $Q \in Syl_q(G)$，所以 $Q \trianglelefteq G$，从而 $Q \leq C_G(P) = C_G(N) = N$，矛盾.

(3.2) Q 为素数阶群.

否则，存在 $1 < Q_2 \lessdot Q$，由题设条件知 $Q_2 <_{c-p} (G)$. 由引理 1 知 $Q_2{}^G$ 为 q- 群，所以 $Q_2{}^G P = Q_2{}^G \times P$，故 $Q_2{}^G \leq C_G(P) = C_G(N) = N$，矛盾. 所以 $Q_2 = 1$，即 Q 为素数阶群.

(4) 最终的矛盾.

由以上讨论知 $G = PQ$ 且 $|G| = p^n q$. 由引理 8 知 G 为内交换群，此与假设矛盾.

定理 1　设 G 是一个群，若群 G 的极大子群均在 G 中或共轭置换或半正规，则 G 超可解.

证明　假设 G 为极小阶反例，证明如下.

(1) G 中至少存在两个极大子群 S, T 使得 $S \neq T$ 且 $S > 1, T > 1$ 满足 S 在 G 中共轭置换(或半正规)，T 在 G 中半正规(或共轭置换).

如果 G 的极大子群均在 G 中共轭置换，由引理 2 可知 G 幂零，显然 G 也是超可解的，矛盾. 若 G 的极大子群均 在 G 中半正规，由引理 3 可知 G 超可解，矛盾. 若 G 的极大子群均为 1，则 G 为素数阶群，从而 G 超可解，矛盾. 所以 G 中至少存在两个极大子群 S, T 使得 $S \neq T$ 且 $S > 1, T > 1$ 满足 S 在 G 中共轭置换(或半正规)，T 在 G 中半正规(或共轭置换).

(2) 对于任意 $M \lessdot G$，$|G : M|$ 为素数.

由步骤(1) 知 $M > 1$，下面分两种情形进行讨论：

情形 1　M 在 G 中共轭置换.

因为 M 在 G 中共轭置换，所以 $M \lhd \lhd G$，由 M 的极大性可知 $M \trianglelefteq G$. 由 M 的极大性可知 G/M 没有非平凡的子群，所以 $|G : M|$ 为素数.

情形 2　M 在 G 中半正规.

因 M 在 G 中半正规，所以存在一个子群 B 使得 $G = MB$. 设 p 是 $|G : M|$ 的一个素因子，因为 $|G : M| = |MB : M| = \dfrac{|B|}{|B \cap M|}$，所以 p 也是 $|B|$ 的一个素因子. 事实上，必存在一个 p- 元 x 使得 $x \in B$ 但 $x \overline{\in} M$. 否则，M 必包含 G 的某个 Sylow 子群，这与 p 是 $|G : M|$ 的一个素因子矛盾.

下面证 $B = \langle x \rangle$，否则 $\langle x \rangle < B$. 因为 M 是半正规的，$B \in S_G(M)$，所以 $M\langle x \rangle < G$. 由 $x \overline{\in} M$ 可知 $M < M\langle x \rangle$，则此与 M 的极大性矛盾. 所以 $B = \langle x \rangle$，从而 $G = M\langle x \rangle$.

我们也可以断定 $M \cap B \lessdot B$. 一方面，因为 $x \overline{\in} M$，所以 $M \cap B < B$，从而存在 $B_1 \lessdot B$ 使得 $M \cap B \leq B_1$. 另一方面，由于 M 半正规可知 $MB_1 < G$. 由 $M \leq MB_1$ 及 M 的极大性可知 $M = MB_1$，从而 $B_1 \leq M$，故 $B_1 \leq M \cap B$. 综合这两方面可知 $M \cap B = B_1 \lessdot B$. 因为 B 为 p- 群，所以 $|B : M \cap B| = p$，从而 $|G : M| = |MB : M| = |B : M \cap B| = p$.

综上可知，对于 G 的任一极大子群 M，有 $|G : M|$ 为素数，故 G 超可解，矛盾.

定理 2　设群 G 的 2- 极大子群在 G 中或共轭置换或半正规，且 G 的任何截断均不同构于内交换群. 则 G 超可解.

证明　假设 G 为极小阶反例，由定理 1 知 G 的任一极大子群超可解，故 G 内超可解(从而 G 是可解群). 由引理 11 知定理条件商群遗传，因此我们假设 $\Phi(G) = 1$.

(1) G 中至少存在两个 2- 极大子群 S_1, T_1 使得 $S_1 \neq T_1$ 且 $S_1 > 1, T_1 > 1$，满足 S_1 在 G 中共轭置换(或半正规)，T_1 在 G 中半正规(或共轭置换).

若 G 的 2- 极大子群均在 G 中共轭置换，由命题 1 知 G 超可解，矛盾. 如果 G 的 2- 极大子群均在 G 中半正规，由引理 4 知 G 超可解，矛盾. 如果 G 的 2- 极大子群均为 1，则 G 的极大子群均为素数阶循环群，所以 G 要么是素数幂阶群要么是素数阶 Sylow 子群的乘积，故 G 超可解，矛盾. 所以 G 中至少存在两个 2- 极大子

群 S_1,T_1 使得 $S_1 \leq T_1$ 且 $S_1>1,T_1>1$,满足 S_1 在 G 中共轭置换(或半正规),T_1 在 G 中半正规(或共轭置换).

(2) G 有唯一极小正规子群 N,使得 $G=N\rtimes M,M \lessdot G$,且 $N=F(G)=C_G(N)$.

证明如下.

(2.1) G 有唯一极小正规子群 N 且 $N=F(G)=C_G(N)$.

设 N 是 G 的极小正规子群,由 G 的可解性可得 N 为初等交换群.事实上,N 是 G 唯一的极小正规子群.否则,若 G 还有另一极小正规子群 N^*,由 G/N 与 G/N^* 满足定理条件可得 G/N 与 G/N^* 超可解,故 $G/N\cap N^* \lesssim G/N\times G/N^*$ 超可解.又因为 $N\cap N^*=1$,所以 G 超可解,矛盾.

由 N 的唯一极小正规性及引理 5 得 $F(G)=N$.由 G 的可解性可知 $C_G(F(G))\leq F(G)$.因为 N 初等交换,则 $N\leq C_G(N)=C_G(F(G))\leq F(G)$.又因为 $F(G)=N$,所以 $N=F(G)=C_G(N)$.

(2.2) $G=N\rtimes M$,其中 $M\lessdot G$.

由 $\Phi(G)=1$ 可得存在 $M\trianglelefteq G$ 使得 $N\not\leq M$,因此 $G=NM$.因为 N 是交换的,所以 $N\cap M\trianglelefteq N$,又因为 M 正规化 N,所以 $N\cap M\trianglelefteq M$,于是 $N\cap M\trianglelefteq NM=G$.而 $N\not\leq N\cap M$,由 N 的唯一极小正规性得 $N\cap M=1$,所以 $G=N\rtimes M$.

(3) 设 N 为 p- 群,则 p 为 $|G|$ 的最大素因子.

否则,存在 $|G|$ 的某个素因子 q 使得 $q>p$.取 M 的 q 阶子群 Q,由(2) 中 $N\trianglelefteq G$ 可知 $NQ\leq G$.我们考虑子群 NQ.

如果 $NQ=G$,由(2) 知 N 为 G 唯一的极小正规子群,从而 G 满足引理 8 的条件,于是 G 为内交换群,这与定理假设矛盾.所以 $NQ<G$.

由 G 内超可解可知 NQ 超可解,又因为 $q>p$,所以 $Q\trianglelefteq NQ$.故 $NQ=N\times Q$,进而 $Q\leq C_G(N)=N$,与(2) 矛盾.因此,p 为 $|G|$ 的最大素因子.

(4) N 为 G 的 Sylow p- 子群.

设 P 是群 G 的一个 Sylow p- 子群,由(3) 知 $N\leq P$.若 $N<P$,由(2) 中 $G=NM$ 可知 p 整除 $|M|$.设 $M_p\in Syl_p(M)$,由 G 内超可解知 M 超可解,结合(3) 中的 p 为 $|G|$ 的最大素因子,所以 $M_p\trianglelefteq M$.我们分以下步骤进行证明:

(4.1) 必存在子群 $H\lessdot M$ 使得 $|M:H|=p$,特别地,$H>1$.

否则,对任意的 $H\lessdot M$,由 G 内超可解可知 M 是超可解群,所以 $|M:H|$ 是一个不等于 p 的素数,从而 $M_p\leq H$.由 H 的任意性及 M_p 的正规性可知 $M_p\leq\Phi(M)$,矛盾.故必存在子群 $H\lessdot M$ 满足 $|M:H|=p$.

如果 $H=1$,则 $|M|=p$,由(2) 中 $G=NM$ 及(3) 中 N 为 p- 群可知 G 为 p- 群,从而 G 超可解,矛盾.因此可以假设 $H>1$.

(4.2) H 在 G 中半正规,对于 $D\in S_G(H)$,可以假设 D 为 p- 群.

由(4.1) 知 H 为 G 的 2- 极大子群,由题设可知 H 在 G 中或共轭置换或半正规.如果 $H<_{c-p}(G)$,由引理 7 可知 $M\trianglelefteq G$ 或者 $H\trianglelefteq G$.如果 $M\trianglelefteq G$,则 $G=N\times M$,所以 $M\leq C_G(N)=N$,与(2) 矛盾.如果 $H\trianglelefteq G$,则 $HN=H\times N$,所以 $H\leq C_G(N)=N$,与(2) 矛盾.所以 H 在 G 中半正规.

设 $D\in S_G(H)$,则 $G=HD$.设 $P\in Syl_p(G)$,则由引理 6 可知存在 $H_p\in Syl_p(H)$,$D_p\in Syl_p(D)$ 使得 $P=H_pD_p$.可以断定 D 为 p- 群,若否,我们有 $D_p<D$,由 H 半正规可知 $HD_p<G$.考虑子群 HD_p,一方面,$P=H_pD_p\leq HD_p$,即 HD_p 包含 G 的 Sylow p- 子群.另一方面,由(2) 中 $G=NM$ 及(4.1) 中 $|M:H|=p$ 可知 $|G:H|=|G:M|\cdot|M:H|=|N|\cdot p$.又由(3) 可知 N 为 p- 群,于是 H 包含 G 的 p'-Hall 子群,从而 HD_p 包含 G 的 p'-Hall 子群.综合可得 $G=HD_p$,与 $HD_p<G$ 矛盾.所以 D 为 p- 群.

(4.3) $|N|=p$.

因为 $H\lessdot M\lessdot G$ 及(4.2) 中 $G=HD$,所以 $D\not\leq M$,于是 $M\cap D<D$.从而存在 $D_1\lessdot D$ 使得 $M\cap D\leq D_1$,所以 $M=M\cap G=M\cap HD=H(M\cap D)\leq HD_1$.又因为 H 是半正规的,且 $D_1\lessdot D$,所以 $HD_1<G$,从而 $M\leq HD_1<G$.由 M 的极大性可得 $M=HD_1$.

由于(2) 中的 $G = NM$ 且 $N \cap M = 1$，所以 $1 < |N| = |G : M| = |HD : HD_1| = \frac{|D|}{|H \cap D|} \cdot \frac{|H \cap D_1|}{|D_1|} = \frac{|D|}{|D_1|} \cdot \frac{|H \cap D_1|}{|H \cap D|}$. 因为 $D_1 \lessdot D$ 且 D 为 p- 群，所以 $\frac{|D|}{|D_1|} = p$. 由于 $|H \cap D_1| \leq |H \cap D|$，所以 $|N| = p$.

(4.4) 最终的结论.

由 G/N 超可解及(4.3) 可知 G 超可解，矛盾，从而 N 为 G 的 Sylow p- 子群.

(5) 设 $A \lessdot M$，则 $A > 1$，并且 A 在 G 中半正规. 特别地，对于 $B \in S_G(A)$，有 $B = RN$，$B < G$ 且 $M = AR$，其中 $R \in Syl_r(B)$.

具体的证明如下.

(5.1) 设 $A \lessdot M$，则 $A > 1$.

若 $A = 1$，由 $A \lessdot M$ 可知 M 为素数阶循环群，则$(|M|, p) = 1$. 否则，M 为 p- 群，由(2) 中 $G = MN$ 及(3) 中 N 为 p- 群可知 G 为 p- 群，于是 G 超可解，矛盾. 不妨设 $|M| = q$ 且 $(q, p) = 1$，所以 $|G| = p^n q$(n 为正整数且 $n \geq 1$)，从而由(2)，(4) 及引理 8 可知 G 是内交换群，矛盾. 所以 $A > 1$.

(5.2) A 在 G 中半正规.

否则，由定理假设可知 A 在 G 中共轭置换. 由引理 7 可知 $M \trianglelefteq G$ 或 $A \trianglelefteq G$. 若 $M \trianglelefteq G$，则 $G = N \times M$，所以 $M \leq C_G(N) = N$，与(2) 矛盾. 若 $A \trianglelefteq G$，则 $NA = N \times A$，所以 $A \leq C_G(N) = N$，与(2) 矛盾. 所以 A 在 G 中半正规.

(5.3) 设 $B \in S_G(A)$，下面证明 $B = RN$，且 $M = AR$，其中 $R \in Syl_r(B)$ 且 $r \neq p$.

由 M 超可解及假设 $A \lessdot M$ 可知 $|M : A| = r$，其中 r 为 $|G|$ 的某一素因子. 由(2) 和(4) 可知 $G = NM$，$N \cap M = 1$ 且 $N \in Syl_p(G)$，所以 M 为 G 的 p'-Hall 子群，则 $|M : A|$ 为一个 p'- 数，从而 $r \neq p$.

又因为 $A \lessdot M$，且 M 为 p'- 群，所以 A 为 p'- 群. 又由(5.2) 中 A 在 G 中半正规且 $B \in S_G(A)$ 可知 $G = AB$，从而 $N \leq B$.

一方面，$|G : A| = |G : M| \cdot |M : A| = |N| \cdot r$. 另一方面，$|G : A| = |AB : A| = \frac{|B|}{|A \cap B|}$，故 $|N| \cdot r = \frac{|B|}{|A \cap B|}$，从而 r 整除 $|B|$. 设 $R \in Syl_r(B)$，由 $N \leq B$ 及(2) 中 $N \trianglelefteq G$ 知 $N \trianglelefteq B$，所以 $RN \leq B$. 下面证 $B = RN$.

如果 $RN < B$，因为 A 是半正规的，$B \in S_G(A)$，$R \in Syl_r(B)$，所以 $AR < G$. 又因为 $AR \cap B = (A \cap B)R$，所以$(A \cap B)R \leq B$. 由 $N \leq B$ 及(2) 中 $N \trianglelefteq G$ 知 $N \trianglelefteq B$，所以$(A \cap B)RN \leq B$. 注意到 $\frac{|B|}{|A \cap B|} = |N| \cdot r$，由(4) 中 $N \in Syl_p(G)$ 及 $R \in Syl_r(B)$ 可知 $B = (A \cap B)RN$，从而 $AB = A(A \cap B)RN = ARN$. 由假设 $RN < B$ 及 A 是半正规的可知 $ARN < G$，从而 $AB < G$，此与(5) 中 $B \in S_G(A)$ 矛盾.

下面证明 $M = AR$. 由(5.3) 中 $r \neq p$ 且 $B = RN$ 可得 $R < B$，结合 A 是半正规的及 $B \in S_G(A)$ 可知 $AR < G$. 因为 $G = AB$，且 $B = RN$，于是 $G = ARN$，从而 $|G : N| = \frac{|AR|}{|AR \cap N|}$. 由(5.2) 中 A 为 p'- 群及 $r \neq p$ 可知 AR 为 p'- 群，所以 $AR \cap N = 1$，即 $|G : N| = |AR|$. 又由(4) 中 $N \in Syl_p(G)$ 可知 AR 是 G 的 p'-Hall 子群，从而由 G 的可解性可知 AR 与 M 共轭，我们不妨设 $M = AR$.

(5.4) B 为 G 的真子群.

否则，我们假设 $B = G$. 因为(5.2) 中 A 是半正规的，对于任意的 $M \lessdot G$，有 $AM < G$. 由 $M \leq AM$ 及 M 的极大性可知 $M = AM$，从而 $A \leq M$，因此 $A \leq \Phi(G) = 1$，与(5) 中 $A > 1$ 矛盾，所以 $B < G$.

(6) 最终的矛盾.

由 G 内超可解可知 B 超可解，又由(5) 中 $B = RN$ 可知存在 B 的正规 p- 子群 P_B 使得 $|N : P_B| = p$. 由 $|RN : RP_B| = p$ 可知 $RP_B < RN = B$. 又因为 A 是半正规的且 $B \in S_G(A)$，于是 $ARP_B < G$，结合(5) 中 $M = AR$ 可知 $M \leq ARP_B < G$，从而由 M 的极大性可知 $M = ARP_B$，故 $P_B \leq M$. 又由(5) 中 M 为 p'- 群

可知 $P_B = 1$,于是由 $|N:P_B| = p$ 可知 $|N| = p$,由 G/N 超可解可得 G 超可解,矛盾.

参 考 文 献

[1] Foguel T. Conjugate permutable subgroups[J]. J Algebra,1993,191(1):235-239.

[2] 陈顺民,陈贵云.共轭置换子群与有限群的可解性[J].云南大学学报:自然科学版,2008,30(5):443-447.

[3] 裴旭莲,钟祥贵.共轭置换子群与群的幂零性[J].广西师范大学学报:自然科学版,2007,25(3):28-31.

[4] 张勤海,赵俊英.超可解群的若干充分条件[J].数学杂志,2005,25(4):399-404.

[5] 陈瑞芳,陈贵云.一些特殊子群与有限群的性质[J].西南师范大学学报:自然科学版,2010,35(5):5-8.

[6] Murashka V I. On partially conjugate permutable subgroups of finite groups[J]. Probl Mat Tech,2013,14(1):74-78.

[7] Shen Z C, Li S R, Liu J J, et al. Finite Groups All of Whose Second Maximal Subgroups Are PSC^*-Groups[J]. J Math Res Appl,2009,29(4):615-622.

[8] Guo W B. Finite Groups with Seminormal Sylow Subgroups[J]. Acta Math Sinica,2008,24(10):1751-1757.

[9] 苏向盈.有限群的半正规子群[J].数学杂志,1988,8(1):5-10.

[10] 徐明曜.有限群导引(上册)[M].北京:科学出版社,1999.

[11] Huppert B, Blackburn N. Finite Groups[M]. New York: Springer,1982.

Semi-normal,Conjugate-permutable and Supersolvability of Finite Groups

ZHAO Xianhe, WANG Yanli

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007,China)

Abstract: This paper investigates the supersolvability of the finite group G. Combine the concepts of semi-normal subgroups and conjugate-permutable subgroups, we get some sufficient conditions for supersolvability of the group G, which is based on that the maximalsubgroups(2-maximal subgroups) of a group G are either conjugate-permutable or semi-normal.

Keywords: conjugate-permutable subgroups; supersolvable groups; semi-normal subgroups