第 44 卷 第 3 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol. 44 No. 3
2016 年 5 月 Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition) May 2016

文章编号:1000-2367(2016)03-0166-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.03.029

# 具有漏泄时滞和时变区间时滞的递归神经网络新的稳定性准则

王军涛[1], 郑群珍[2], 苏 展[3], 陈永刚[1]

(1.河南科技学院 数学科学学院, 河南 新乡 453003;2.河南教育学院 数学与统计学院, 郑州 450046;
3.上海辅仁医药研发有限公司,上海 200000)

**摘 要**:研究了具有漏泄时滞和时变区间传输时滞的递归神经网络的渐近稳定性问题.基于 Lyapunov-Krasovskii(L-K)稳定性理论.Jensen 不等式和互惠凸方法,得到了线性矩阵不等式(LMIs)表示的新的稳定性准则.相对于现存的方法,避免利用保守性较大的中立型变换,且在构造 L-K 泛函时充分利用了漏泄时滞和传输时滞的关联信息,因此所得准则具有较小的保守性.数值例子验证了所得结果的有效性和较小保守性.

**关键词**:递归神经网络;漏泄时滞;时变时滞;渐近稳定性

**中图分类号**:TP183 **文献标志码**:A

当今,神经网络广泛应用于信号过程,模式识别,静态图像处理,联系记忆,解最优化问题等.在神经网络的这些应用中,均要求神经网络的平衡点是稳定的.另一方面,在神经网络的一些实际应用中,神经网络神经元之间的传输延迟是不可避免的,且时滞的存在往往会导致神经网络的不稳定性和性能变差[1].因此,在过去 20 年内,许多学者对时滞神经网络的动态行为分析做了大量研究,具体参考文献[2-8].尤其,文献[5-8]中提出的稳定性条件用 LMIs 表示,能够方便地利用现有软件进行验证,且是时滞相关的,具有较小的保守性.

最近,文献[9]首次把漏泄延迟引入到 BAM 神经网络上,并得到了平衡点渐近稳定和指数稳定的充分条件.考虑到漏泄延迟在许多实际系统的存在性,文献[10-12]考虑了几类具有漏泄时滞的递归神经网络的稳定性问题.文献[13]研究了具有漏泄时滞和时变传输时滞的递归神经网络的无源性问题.然而需要指出的是,文献[10-13]在处理漏泄延迟时利用了中立型变换.事实上,对于时滞动态系统的稳定性分析,中立型变换具有较大的保守性[14-15].另一方面,具有漏泄延迟和传输延迟的神经网络本质上是一个多时滞系统,文献[9-13]在进行稳定性分析和无源分析时,并没有充分利用漏泄延迟和传输延迟之间的信息,因此所得结果具有较大保守性.除此之外,文献[11-13]中讨论的时变传输时滞的下界为 0.对于许多实际情形,时变时滞的下界未必为 0,如果所提出的稳定性条件忽略利用时变时滞的下界信息,将会具有一定的保守性.

基于上面的讨论,本文研究了具有漏泄时滞和时变区间传输时滞的递归神经网络的全局渐近稳定性问题.不同于文献[10-13]中方法,本文避免了利用中立型变换和自由权矩阵方法,取而代之,我们利用 Jensen 积分不等式和互惠凸方法.另外,在构造 L-K 泛函时,本文充分利用了漏泄时滞和时变传输时滞的上、下界信息,引入了时滞关联项.基于这些技术,本文得到了 LMIs 表示的新的时滞相关的渐近稳定性准则,这些条件能够利用现有的标准软件进行纠结和验证.最后,数值例子验证了所提出稳定性条件的有效性和较小保守性.

**收稿日期**:2016-01-14;**修回日期**:2016-04-11.

**基金项目**:国家自然科学基金(61304061)

**作者简介(通信作者)**:陈永刚(1981-),男,河南西平人,河南科技学院副教授,博士,研究方向为复杂系统的分析与控制,
E-mail: happycygzmd@163.com.

# 1　问题描述

考虑下面具有漏泄延迟的递归神经网络

$$\dot{x} = -Cx(t-\delta) + Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau(t))) + u(t), \tag{1}$$

其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 是神经元状态向量;$f(x(\cdot)) = [f_1(x_1(\cdot)), f_2(x_2(\cdot)), \cdots, f_n(x_n(\cdot))]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 表示激励函数;$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 是外部输入向量; $C = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是正对角矩阵, $A$ 和 $B$ 是关联权矩阵;$\delta$ 和 $\tau(t)$ 分别表示常漏泄时滞和时变传输时滞,且 $0 \leq \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2, \dot{\tau}(t) \leq \mu$. 对于激励函数 $f(x(\cdot))$,文中假设:$f_j(0) = 0, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,且存在常数 $k_j^-$ 和 $k_j^+$ 使得

$$k_j^- \leq \frac{f_j(\zeta_1) - f_j(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \leq k_j^+, \forall \zeta_1, \zeta_2 \in R, \zeta_1 \neq \zeta_2. \tag{2}$$

假设 $x^* = [x_1{}^*, x_2{}^*, \cdots, x_n{}^*]^{\mathrm{T}}$是递归神经网络 (1) 的平衡点,令 $z(\cdot) = x(\cdot) - x^*$,则递归神经网络 (1) 可变为

$$\dot{z}(t) = -Cz(t-\delta) + Ag(z(t)) + Bg(z(t-\tau(t))), \tag{3}$$

其中 $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \cdots, z_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 表示变换后系统的状态向量,$g(z(\cdot)) = [g_1(z_1(\cdot)), \cdots, g_n(z_n(\cdot))]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$,且 $g_j(z_j(\cdot)) = f_j(z_j(\cdot) + x_j{}^*) - f_j(x_j{}^*)$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 由前面对激励函数 $f(x(\cdot))$ 的假设可知

$$k_j^- \leq \frac{g_j(z_j)}{z_j} \leq k_j^+, \ \forall z_j \neq 0, \ g_j(0) = 0. \tag{4}$$

**引理 1**[15]　对于给定的对称正定矩阵 $W \in \mathbf{R}^{n\times n}$,常数 $b > a$,和使得下面积分能很好地定义的向量函数 $\dot{\omega}: [a, b] \to \mathbf{R}^n$,则

$$-(b-a)\int_a^b \dot{\omega}(s) W \dot{\omega}(s) \mathrm{d}s \leq -\begin{bmatrix} x(a) \\ x(b) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -W & W \\ W & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(a) \\ x(b) \end{bmatrix}.$$

**引理 2**[16]　对于给定的常数 $\alpha \in (0,1)$,$n \times n$ 对称正定矩阵 $Z$,和向量 $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{R}^n$,定义函数 $\Theta(\alpha, Z) = \frac{1}{\alpha}\zeta_1^{\mathrm{T}} Z \zeta_1 + \frac{1}{1-\alpha}\zeta_2^{\mathrm{T}} Z \zeta_2$. 如果存在 $n \times n$ 矩阵 $U$ 使得 $\begin{bmatrix} Z & U \\ U^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} > 0$,则下面的不等式成立

$$\min_{\alpha \in (0,1)} \Theta(\alpha, Z) \geq \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Z & U \\ U^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}.$$

# 2　主要结果

基于 L-K 泛函稳定性理论,这一部分将给出递归神经网络(1) 新的时滞相关的渐近稳定性准则.

**定理 1**　对于给定的常数 $\delta, \tau_1, \tau_2$ 和 $\mu$,如果存在 $n \times n$ 对称正定矩阵 $P, Q_i, R_i, i = 1, 2, \cdots, 5$, $2n \times 2n$ 对称正定矩阵 $W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^{\mathrm{T}} & W_3 \end{bmatrix}$,$n \times n$ 正对角矩阵 $D, E, H_1, H_2$,和 $n \times n$ 矩阵 $M$ 使得 $\Phi = \begin{bmatrix} R_3 & M \\ M^{\mathrm{T}} & R_3 \end{bmatrix} > 0$ 和下面的 LMI 成立

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & R_1 - \tilde{P}C & R_2 & 0 & 0 & \Omega_{16} & \tilde{P}B \\ * & \Omega_{22} & R_4 & 0 & R_5 & \Omega_{26} & -C\tilde{R}B \\ * & * & \Omega_{33} & R_3 - M & M & 0 & 0 \\ * & * & * & \Omega_{44} & R_3 - M & 0 & \Omega_{47} \\ * & * & * & * & \Omega_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Omega_{66} & \Omega_{67} \\ * & * & * & * & * & * & \Omega_{77} \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

则具有漏泄时滞的递归神经网络(1) 的平衡点是全局渐近稳定的,其中

$$\Omega_{11}=Q_1+Q_2+Q_3+W_1-2K_1H_1K_2-R_1-R_2,\Omega_{16}=\tilde{P}A+W_2+(K_1+K_2)H_1,$$
$$\Omega_{22}=C\tilde{R}C-Q_1+(\tau_1-\delta)Q_4+(\tau_2-\delta)Q_5-R_1-R_4-R_5,\Omega_{26}=-C(D-E)-C\tilde{R}A,$$
$$\Omega_{33}=-Q_2+(\delta-\tau_1)Q_4-R_2-R_3-R_4,\Omega_{44}=-(1-\mu)W_1-2R_3-2K_1H_2K_2+M+M^{\mathrm{T}},$$
$$\Omega_{47}=-(1-\mu)W_2+(K_1+K_2)H_2,\Omega_{55}=-Q_3+(\delta-\tau_2)Q_5-R_3-R_5,$$
$$\Omega_{66}=(D-E)A+A^{\mathrm{T}}(D-E)^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}\tilde{R}A+W_3-2H_1,\Omega_{67}=(D-E)B+A^{\mathrm{T}}\tilde{R}B,$$
$$\Omega_{77}=-(1-\mu)W_3-2H_2+B^{\mathrm{T}}\tilde{R}B,\tilde{P}=P+K_2E-K_1D,\tilde{R}=\delta^2R_1+\tau_1^2R_2+(\tau_2-\tau_1)^2R_3+$$
$$(\tau_1-\delta)^2R_4+(\tau_2-\delta)^2R_5,K_1=\mathrm{diag}\{k_1^-,k_2^-,\cdots,k_n^-\},\ K_2=\mathrm{diag}\{k_1^+,k_2^+,\cdots,k_n^+\}.$$

**证明** 选取下面的 L-K 泛函

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t), \tag{6}$$

其中

$$V_1(t)=z^{\mathrm{T}}(t)Pz(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[d_j\int_0^{z_j(t)}(g_j(s)-k_j^-s)\mathrm{d}s+e_j\int_0^{z_j(t)}(k_j^+s-g_j(s))\mathrm{d}s\right],$$
$$V_2(t)=\int_{t-\delta}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)Q_1z(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau_1}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)Q_2z(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau_2}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)Q_3z(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau(t)}^{t}\gamma^{\mathrm{T}}(s)W\gamma(s)\mathrm{d}s,$$
$$V_3(t)=\delta\int_{-\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_1\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\tau_1\int_{-\tau_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+(\tau_2-\tau_1)\int_{-\tau_2}^{-\tau_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$
$$V_4(t)=(\tau_1-\delta)\left[\int_{t-\tau_1}^{t-\delta}z^{\mathrm{T}}(s)Q_4z(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau_2}^{-\delta}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_4\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right]+$$
$$(\tau_2-\delta)\left[\int_{t-\tau_2}^{t-\delta}z^{\mathrm{T}}(s)Q_5z(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau_2}^{-\delta}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_5\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\right].$$

且 $P,Q_i,R_i,W,i=1,2,\cdots,5$ 为对称正定矩阵,$d_j,e_j$ 为正常数,$\gamma(s)=[z^{\mathrm{T}}(s)\ g^{\mathrm{T}}(z(s))]^{\mathrm{T}}$. L-K 泛函(6)中的项 $V_1(t),V_2(t),V_3(t)$ 和 $V_4(t)$ 沿着系统(3)对时间 $t$ 求导,则可得

$$\dot{V}_1(t)=2z^{\mathrm{T}}(t)P\dot{z}(t)+2[g(z(t))-K_1z(t)]^{\mathrm{T}}D\dot{z}(t)+2[K_2z(t)-g(z(t))]^{\mathrm{T}}E\dot{z}(t)=$$
$$2z^{\mathrm{T}}(t)(P+K_2E-K_1D)[-Cz(t-\delta)+Ag(z(t))+Bg(z(t-\tau(t)))]+$$
$$2g^{\mathrm{T}}(z(t))(D-E)[-Cz(t-\delta)+Ag(z(t))+Bg(z(t-\tau(t)))], \tag{7}$$

$$\dot{V}_2(t)\leq z^{\mathrm{T}}(t)(Q_1+Q_2+Q_3)z(t)+\gamma^{\mathrm{T}}(t)W\gamma(t)-z^{\mathrm{T}}(t-\delta)Q_1z(t-\delta)-z^{\mathrm{T}}(t-$$
$$\tau_1)Q_2z(t-\tau_1)-z^{\mathrm{T}}(t-\tau_2)Q_3z(t-\tau_2)-(1-\mu)\gamma^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))W\gamma(t-\tau(t)), \tag{8}$$

$$\dot{V}_3(t)=\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)[\delta^2R_1+\tau_1{}^2R_2+(\tau_2-\tau_1)^2R_3]\dot{z}(t)-\delta\int_{t-\delta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_1\dot{z}(s)\mathrm{d}s-$$
$$\tau_1\int_{t-\tau_1}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)\mathrm{d}s-(\tau_2-\tau_1)\int_{t}^{t-\tau_1}-\tau_2\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s, \tag{9}$$

$$\dot{V}_4(t)=z^{\mathrm{T}}(t-\delta)[(\tau_1-\delta)Q_4+(\tau_2-\delta)Q_5]z(t-\delta)+(\delta-\tau_1)z^{\mathrm{T}}(t-\tau_1)Q_4z(t-\tau_1)+$$
$$(\delta-\tau_2)z^{\mathrm{T}}(t-\tau_2)Q_5z(t-\tau_2)+\dot{z}^{\mathrm{T}}(t)[(\tau_1-\delta)^2R_4+(\tau_2-\delta)^2R_5]\dot{z}(t)-$$
$$(\tau_1-\delta)\int_{t-\tau_1}^{t-\delta}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_4\dot{z}(s)\mathrm{d}s-(\tau_2-\delta)\int_{t-\tau_2}^{t-\delta}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_5\dot{z}(s)\mathrm{d}s, \tag{10}$$

其中 $D=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\},E=\mathrm{diag}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 利用 Jensen 不等式(引理 1)可得

$$-\delta\int_{t-\delta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_1\dot{z}(s)\mathrm{d}s\leq-[z(t)-z(t-\delta)]^{\mathrm{T}}R_1[z(t)-z(t-\delta)], \tag{11}$$

$$-\tau_1\int_{t-\tau_1}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)\mathrm{d}s\leq-[z(t)-z(t-\tau_1)]^{\mathrm{T}}R_2[z(t)-z(t-\tau_1)], \tag{12}$$

$$-(\tau_1-\delta)\int_{t-\tau_1}^{t-\delta}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_4\dot{z}(s)\mathrm{d}s\leq-[z(t-\delta)-z(t-\tau_1)]^{\mathrm{T}}R_4[z(t-\delta)-z(t-\tau_1)], \tag{13}$$

$$-(\tau_2-\delta)\int_{t-\tau_2}^{t-\delta}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_5\dot{z}(s)\mathrm{d}s\leq-[z(t-\delta)-z(t-\tau_2)]^{\mathrm{T}}R_5[z(t-\delta)-z(t-\tau_2)]. \tag{14}$$

对于积分项 $\int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s$,利用引理 1 和引理 2,可得

$$-(\tau_2-\tau_1)\int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s=-\int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s\leq$$

$$-\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau(t)-\tau_1}\xi_1^{\mathrm{T}}R_3\xi_1-\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2-\tau(t)}\zeta_2^{\mathrm{T}}R_3\zeta_2\leq-\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R_3 & M\\ M^{\mathrm{T}} & R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{bmatrix},\tag{15}$$

其中 $\zeta_1=\int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1}\dot{z}(s)\mathrm{d}s=z(t-\tau_1)-z(t-\tau(t))$，$\zeta_2=\int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)}\dot{z}(s)\mathrm{d}s=z(t-\tau(t))-z(t-\tau_2)$，且 $\Phi=\begin{bmatrix}R_3 & M\\ M^{\mathrm{T}} & R_3\end{bmatrix}>0$. 由(4)容易知道，存在对角矩阵 $H_1\geq 0$ 和 $H_2\geq 0$ 使得下面不等式成立

$$2[K_1z(t)-g(z(t))]^{\mathrm{T}}H_1[g(z(t))-K_2z(t))]\geq 0,\tag{16}$$

$$2[K_1z(t-\tau(t))-g(z(t-\tau(t)))]^{\mathrm{T}}H_2[g(z(t-\tau(t)))-K_2z(t-\tau(t)))]\geq 0.\tag{17}$$

利用系统方程(3)，(7) ~ (14) 式，并把(16) ~ (17) 式的左端添加到 $\dot{V}(t)$，则 $\dot{V}(t)$ 可被估计为

$$\dot{V}(t)\leq\xi^{\mathrm{T}}(t)\Omega\xi(t),\tag{18}$$

其中 $\xi(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-\delta)\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_1)\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_2)\quad f^{\mathrm{T}}(x(t))\quad f^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))]^{\mathrm{T}}$. 如果 LMIs $\Phi>0$ 和(5)式成立，则由(18)式可得 $\dot{V}(t)<0$，根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论可知，递归神经网络(1)是全局渐近稳定的.

**注记 1**　最近，文献[10－12，13]分别考虑了具有漏泄时滞的神经网络的稳定性和无源性问题. 相对于文献[10－13]，本文是基于 Jensen 不等式和互惠凸方法(引理 2)，并没有利用中立型变换和自由权矩阵方法. 事实上，对于时滞的稳定性分析，中立型变换具有较大的保守性[14－15]. 另外，自由权矩阵方法将会引入较多的变量，复杂化了相应的计算[16]. 此外，本文在构造 L-K(6) 泛函时引入了时滞关联项 $V_4(t)$，相对于文献[10－13]的方法，$V_4(t)$ 项充分利用了递归神经网络(1)中时滞 $\delta$ 和 $\tau(t)$ 的关联信息，因此进一步降低了所得结果的保守性.

**注记 2**　相对于文献[10－13]，本文假设时变传输时滞 $\tau(t)$ 的下界未必为 0，并且文中定理 1 依赖于时变时滞的下界 $\tau_1$. 对于时变时滞下界不为 0 情形，利用时变时滞下界 $\tau_1$ 的信息将能有效降低所得结果的保守性.

当时变传输时滞 $\tau(t)$ 的下界 $\tau_1$ 为 0 时，利用下面的 L-K 泛函

$$V(t)=V_1(t)+\bar{V}_2(t)+\bar{V}_3(t)+\bar{V}_4(t),\tag{19}$$

其中

$$\bar{V}_2(t)=\int_{t-\delta}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)Q_1z(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau_2}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)Q_2z(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau(t)}^{t}\gamma^{\mathrm{T}}(s)W\tau(s)\mathrm{d}s,$$

$$\bar{V}_3(t)=\delta\int_{-\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_1\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\tau_2\int_{-\tau_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$\bar{V}_4(t)=(\tau_2-\delta)[\int_{t-\tau_2}^{t-\delta}z^{\mathrm{T}}(s)Q_3z(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau_2}^{-\delta}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta],$$

并沿着定理 1 的证明路线，则可得到下面简单的渐近稳定性准则.

**推论 1**　对于给定的常数 $\delta,\tau_2$ 和 $\mu$，如果存在 $n\times n$ 对称正定矩阵 $P,Q_i,R_i,i=1,2,3$，$2n\times 2n$ 对称正定矩阵 $W=\begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ W_2{}^{\mathrm{T}} & W_3\end{bmatrix}$，$n\times n$ 正对角矩阵 $D,E,H_1,H_2$，和 $n\times n$ 矩阵 $M$ 使得 $\Phi=\begin{bmatrix}R_2 & M\\ M^{\mathrm{T}} & R_2\end{bmatrix}>0$ 和下面的 LMI 成立

$$\begin{bmatrix}\Xi_{11} & R_1-\tilde{P}C & R_2-M & M & \Xi_{15} & \tilde{P}B\\ * & \Xi_{22} & 0 & R_3 & \Xi_{25} & -C\tilde{R}B\\ * & * & \Xi_{33} & R_2-M & 0 & \Xi_{36}\\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0\\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \Xi_{56}\\ * & * & * & * & * & \Xi_{66}\end{bmatrix}<0,\tag{20}$$

则具有漏泄时滞的递归神经网络(1)的平衡点是全局渐近稳定的，其中

$\Xi_{11}=Q_1+Q_2+W_1-2K_1H_1K_2-R_1-R_2$，$\Xi_{15}=\tilde{P}A+W_2+(K_1+K_2)H_1$，$\Xi_{22}=C\tilde{R}C-Q_1+(\tau_2-\delta)Q_3-R_1-R_3$，$\Xi_{25}=-C(D-E)-C\tilde{R}A$，$\Xi_{33}=-(1-\mu)W_1-2R_2-$

$2K_1H_2K_2+M+M^{\mathrm{T}},\Xi_{36}=-(1-\mu)W_2+(K_1+K_2)H_2,\Xi_{44}=-Q_2+(\delta-\tau_2)Q_3-R_2-R_3,\Xi_{55}=(D-E)A+A^{\mathrm{T}}(D-E)^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}\tilde{R}A+W_3-2H_1,$

$\Xi_{56}=(D-E)B+A^{\mathrm{T}}\tilde{R}B,\Xi_{66}=-(1-\mu)W_3-2H_2+B^{\mathrm{T}}\tilde{R}B,\tilde{R}=\delta^2R_1+\tau_2^2R_2+(\tau_2-\delta)^2R_3.$

当神经元之间的传输时滞为常数时,也就 $\tau(t)\equiv\tau,\forall t\geq 0$,选取下面的 L-K 泛函

$$V(t)=V_1(t)+\hat{V}_2(t)+\hat{V}_3(t)+\hat{V}_4(t),\tag{21}$$

其中

$$\hat{V}_2(t)=\int_{t-\delta}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)Q_1z(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}\gamma^{\mathrm{T}}(s)W\gamma(s)\mathrm{d}s,$$

$$\hat{V}_3(t)=\delta\int_{-\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_1\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$\hat{V}_4(t)=(\tau-\delta)\Big[\int_{t-\tau}^{t-\delta}z^{\mathrm{T}}(s)Q_2z(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau}^{-\delta}\int_{t+\theta}^{t}\dot{z}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{z}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\Big],$$

沿着定理 1 的证明,容易得到下面的全局渐近稳定性准则.

**推论 2** 对于给定的常数 $\delta$ 和 $\tau$,如果存在 $n\times n$ 对称正定矩阵 $P,Q_1,Q_2,R_1,R_2,R_3$,$n\times n$ 正对角矩阵 $D$,$E,H_1,H_2$,$2n\times 2n$ 对称正定矩阵 $W=\begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ W_2^{\mathrm{T}} & W_3\end{bmatrix}$,使得下面的 LMI 成立

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & R_1-\tilde{P}C & R_2 & \Pi_{14} & \tilde{P}B\\ * & \Pi_{22} & R_3 & \Pi_{24} & -C\hat{R}B\\ * & * & \Pi_{33} & 0 & \Pi_{35}\\ * & * & * & \Pi_{44} & \Pi_{45}\\ * & * & * & * & \Pi_{55}\end{bmatrix}<0,\tag{22}$$

则具有漏泄时滞的递归神经网络(1) 的平衡点是全局渐近稳定的,其中

$\Pi_{11}=Q_1+W_1-2K_1H_1K_2-R_1-R_2,\Pi_{14}=\tilde{P}A+W_2+(K_1+K_2)H_1,\Pi_{22}=C\hat{R}C-Q_1+(\tau-\delta)Q_2-R_1-R_3,\Pi_{24}=-C(D-E)-C\hat{R}A,\Pi_{33}=(\delta-\tau)Q_2-W_1-R_2-R_3-2K_1H_2K_2,$

$\Pi_{35}=-W_2+(K_1+K_2)H_2,\Pi_{44}=(D-E)A+A^{\mathrm{T}}(D-E)^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}\hat{R}A+W_3-2H_1,$

$\Pi_{45}=(D-E)B+A^{\mathrm{T}}\hat{R}B,\Pi_{55}=-W_3-2H_2+B^{\mathrm{T}}\hat{R}B,\hat{R}=\delta^2R_1+\tau^2R_2+(\tau-\delta)^2R_3.$

**注记 3** 对于常时滞情形,容易看出:L-K 泛函(21) 中 $\hat{V}_4(t)$ 直接利用了漏泄时滞 $\delta$ 和传输时滞 $\tau$ 的关联信息.尽管通过设定 $\mu=0$,推论 1 也能够适应于常时滞情形,但是 L-K 泛函(19) 是利用漏泄时滞 $\delta$ 和时变传输时滞 $\tau(t)$ 的上下界的关联信息.因此对于常时滞情形,相对于推论 1,文中推论 2 具有更小的保守性.

**注记 4** 文献[10-13]中的条件都是基于时变传输时滞 $\tau(t)$ 不可微这一假设提出的.通过设定 LMI(5) 和 LMI(20) 中的矩阵 $W_1=W_2=W_3=0$,文中定理 1 和推论 1 也可适用于时变时滞 $\tau(t)$ 不可微的情形.

## 3 数值例子

**例子 1**[10] 考虑具有漏泄时滞的递归神经网络(1),相应的参数选取如下

$$C=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}0.5 & -0.2\\ 0.7 & 0.5\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0.6 & -0.1\\ -1.2 & -0.8\end{bmatrix},\ k_1^-=k_2^-=0,\ k_1^+=k_2^+=1.$$

对于这个例子,首先假设时变传输时滞 $\tau(t)$是不可微的.对于 $\tau_1=0$ 和不同的 $\tau_2$,利用本文中的结果和文献[10,13]中的结果,可得到最大容许的漏泄时滞 $\delta$,见表 1.由表 1 可知,本文能够给出更大的容许时滞 $\delta$,这表明本文中提出的条件相对于文献[10,13]具有更小的保守性.对于给定的 $\delta=0.16$,和对于不同的 $\tau_1$,利用定理 1 和推论 1,我们可以得到最大的容许时变时滞上界 $\tau_2$,见表 2.由表 2 可知定理 1 能够给出较大的容许时滞界 $\tau_2$,这表明对于区间时变时滞,利用时滞的下界信息能够得到保守性更小的条件,也即验证了注记 2.

对于常时滞情形,表 3 列出了不同漏泄时滞 $\delta$ 下最大容许的传输时滞 $\tau$.显然,相对于推论 1,推论 2 能

够给出更大的时滞 $\tau$. 这表明尽管推论 1 能够适用于常时滞情形，但是具有一定的保守性，也即验证了注记 3.

表 1 不同 $\tau_2$ 下最大容许的漏泄时滞 $\delta$

| $\tau_2$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 文献[10]中 $\delta$ | 0.123 | 0.120 | 0.115 | 0.104 | 0.080 | infeasible |
| 文献[13]中 $\delta$ | 0.080 | 0.079 | 0.078 | 0.076 | 0.073 | 0.046 |
| 推论 1 中 $\delta$ | 0.169 | 0.153 | 0.141 | 0.133 | 0.126 | 0.120 |

表 2 不同 $\tau_1$ 下最大容许的时变时滞上界 $\tau_2$

| $\tau_1$ | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 推论 1 中 $\tau_2$ | 0.153 | 0.153 | 0.153 | 0.153 | 0.153 | 0.153 |
| 定理 1 中 $\tau_2$ | 0.153 | 0.263 | 0.311 | 0.263 | 0.259 | 0.283 |

表 3 不同 $\delta$ 下最大容许的传输时滞 $\tau$

| $\delta$ | 0.155 | 0.156 | 0.157 | 0.158 | 0.159 | 0.160 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 推论 1 中 $\tau$ | 0.252 | 0.226 | 0.208 | 0.193 | 0.180 | 0.168 |
| 推论 2 中 $\tau$ | 0.372 | 0.360 | 0.349 | 0.338 | 0.327 | 0.316 |

**注记 5** 在利用文献[10]中定理 5.1 求解上面的数值例子时，由于我们考虑了免于脉冲的情形，因此我们仅利用 LMI(8)，且选取 $\gamma=1$. 在利用文献[13]中结果时，为了得到稳定性条件，我们删除了 LMI(30)中的第九行和第九列，且纠正了 LMI(30)中的一些小错误，也即：删去 $\Omega_{11}$ 和 $\Omega_{12}$ 中的项 $-Q_2C-CQ_2$ 和 $-CQ_1^{\mathrm{T}}$，在(1,5)和(2,5)位置上分别添加项 $-Q_2C$ 和 $-Q_1C$，且把(2,6)位置上的项 $P_1C$ 纠正为 $-P_1C$.

## 4 结 论

对具有漏泄时滞和时变区间传输时滞的递归神经网络，利用 Jensen 积分不等式、互惠凸方法及漏泄时滞和时变传输时滞的上、下界的关联信息，本文得到了 LMIs 表示的新的时滞相关的渐近稳定性准则. 相对于现存的结果，本文在分析问题时利用了一些新的方法，因此所提出的稳定性条件具有较小的保守性. 数值例子验证了所提出结果的有效性和优势. 本文提出的分析方法可以应用于研究具有漏泄时滞的 BAM 神经网络[9]、含有分布时滞的递归神经网络[10,12]，和具有脉冲影响的递归神经网络[10-11].

### 参 考 文 献

[1] Gopalsamy K, He X Z. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1994, 76(4):344-358.

[2] 刘 霞，焦建锋. 具有时滞的递归神经网络模型的分支分析[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2016，44(1):1-7.

[3] Chen T. Global exponential stability of delayed Hopfield neural networks[J]. Neural Networks, 2001, 14(8):977-980.

[4] Ensari T, Arik S. Global stability of class of neural networks with time varying delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express briefs, 2005, 52(3):126-130.

[5] He Y, Liu G P, Rees D, et al. Stability analysis for neural networks with time-varying interval delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2007, 18(6):1850-1854.

[6] 王路平，刘晓华. 基于 LMI 的时滞细胞神经网络的指数稳定性分析[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2007，35(2):39-41.

[7] Chen Y, Bi W, Li W. Stability analysis for neural networks with time-varying delay: A more general delay decomposition approach[J]. Neurocomputing, 2010, 73(4/5/6):853-857.

[8] Chen Y, Fei S, Li Y. Improved delay-dependent stability conditions for recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(2):803-812.

[9] lsamy K. Leakage delays in BAM [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 325(2):1117-1132.

(下转第 177 页)

were increased, changes in the isometric strength 60° in Tai Chi exercise group were significant; (2) the kinesthesia of left and right knees was improved obviously in experimental group, but no significant change in control group, and there is no significant change in the 3D position sense of the left and right sides of knee joints in both groups before and after the experiment; (3) the time of standing on one leg with eyes closed has improved in both groups, but no significant change before and after the experiment; (4) the deviation of walking straight with eyes closed changed significantly, compared to that before the experiment, in experimental group. Conclusion: (1)16-week regular Tai Chi exercise can significantly improve the muscle strength and proprioception of lower limbs of the elderly; (2) 16-week regular Tai Chi exercise can improve the neuromuscular control ability of lower limb, but no obvious effect on balance function; (3) 16-week regular Tai Chi exercise can improve lower limb function in elderly people. It should be applied in mass fitness to prevent the occurrence of falls in the elderly.

**Keywords**: Tai Chi exercise; proprioception; muscle strength; neuromuscular control ability; balance ability

(上接第 171 页)

[10] Li X, Fu X, Balasubramaniam P, et al. Existence, uniqueness and stability analysis of recurrent neural networks with time delay in the leakage term under impulsive perturbations[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(5):4092-4108.

[11] Li X, Cao J. Delay-dependent stability of neural networks of neutral type with time delay in the leakage term[J]. Nonlinearity, 2010, 23(7):1709-1726.

[12] Wang Y, Zheng C D, Feng E. Stability analysis of mixed recurrent neural networks with time delay in the leakage term under impulsive perturbations[J]. Nonlinearity, 2013, 119:454-461.

[13] Song Q, Cao J. Passivity of uncertain neural networks with both leakage delay and time-varying delay [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(2):1695-1707.

[14] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and $H_\infty$ control: constant and time-varying delays [J]. International Journal of Control, 2003, 76(1):48-60.

[15] Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12):2171-2176.

[16] Park P, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.

# New Stability Criteria for Recurrent Neural Networks with Leakage Delay and Time-varying Interval Delay

WANG Juntao[1], ZHENG Qunzhen[2], SU Zhan[3], CHEN Yonggang[1]

(1. School of Mathematics Sciences, Henan Institute of Science and Technology, Xinxiang 453003, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Henan Institute of Education, Zhengzhou 450046, China;

3. Shanghai Furen Medicine R & D Co. Ltd, Shanghai 200000, China)

**Abstract**: This paper considers the asymptotic stability problem for recurrent neural networks with leakage delay and time-varying interval transmission delay. Based on Lyapunov-Krasovskii (L-K) stability theory, Jensen inequality, and reciprocally convex approach approach, new asymptotic stability criteria are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Compared with the existing approaches, this paper avoids using the neutral transformation, and utilizes the interconnected information between leakage delay and transmission delay sufficiently when constructing L-K functionals, thus the obtained criteria are less conservative. Numerical example verifies the effectiveness and less conservatism of the obtained results.

**Keywords**: recurrent neural network; leakage delay; time-varying delay; asymptotic stability