文章编号:1000－2367(2018)04－0008－06 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.04.002

一类受分数 Brown 运动影响的资源竞争种群系统的渐近行为

袁怀民[a],张启敏[b]

(宁夏大学 a.信息工程学院;b.数学统计学院,银川 750021)

摘 要:对一类 n 个种群,k 个资源的随机资源竞争种群模型进行了研究(恒化器模型).其中种群的死亡率受外界环境噪声分数 Brown 运动的影响.通过构造 Lyapunov 函数,得到该模型中种群在均方意义下的持续性和灭绝性准则. 通过数值算例对所得的结论进行了验证.

关键词:资源竞争;生物种群系统;分数 Brown 运动;持久性;灭绝性

中图分类号:O175.1 **文献标志码**:A

目前,关于生物资源的竞争系统已被广泛研究[1－2],例如 n 个种群 k 个资源的浮游植物竞争模型,其动力学行为由资源利用有效性决定,而资源利用有效性又受资源的供给量和种群数量的影响.文献[2]给出的下列 n 个 种群,k 个资源的模型能够较好地表示资源和生物种群之间的相互作用

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N_i(t)}{\mathrm{d}t}=N_i(t)(\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)-m_i), & i=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\mathrm{d}R_j(t)}{\mathrm{d}t}=D(S_j-R_j(t))-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}C_{ji}\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t), & j=1,2,\cdots,k,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $N_i(t)$ 表示种群 i 的密度,$R_j(t)$ 是资源 j 的数量, m_i 是种群 i 的死亡率,D 是系统的周转率,S_j 是资源 j 的供给浓度,c_{ji} 是种群 i 消耗资源 j 的系数,$\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)$ 代表种群 i 的生长率,是关于资源利用率的函数.$\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)$ 可以表示为如下形式[1－2]

$$\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)=\min\left(\frac{r_iR_1(t)}{K_{1i}+R_1(t)},\cdots,\frac{r_iR_k(t)}{K_{ki}+R_k(t)}\right),\tag{2}$$

其中 r_i 是种群 i 的最大增长率,K_{ji} 是种群 i 对资源 j 的半饱和常数.关于模型(1)的应用在文献[3－5]中已给出,同时 Monod 模型作为一种典型的资源竞争模型也被广泛的研究,例如文献[4]讨论了其稳态增长率,文献[6]应用 Lotka-Volterra 模型研究两种有限资源的两种群竞争模型,文献[1,7]均描述了两微生物种群的竞争模型. 在现有的文献中,大多数研究的是确定系统,都未考虑外界环境噪声的影响,事实上,温度、湿度、人为的破坏这些系统之外的因素对种群资源都会产生影响,并且能够改变系统动力学行为,使得一个稳定的系统出现震荡现象.而把随机噪声引入到种群系统中也存在大量的研究成果[8－10],但随机噪声均为 Brown 运动,并且没有考虑资源的影响.

本文考虑到环境中随机波动的影响,在模型(1)中引入随机因素.假设种群的死亡率 m_i 受分数 Brown 运动,也就是受噪声影响的死亡率为 $m_i\to m_i+\alpha_i\dot{B}_i^H(t)$,其中 B_i^H 是 Hurst 参数 $H\in(0,1)$ 的分数 Brown 运动. B_i^H 和 B_j^H 是相互独立的($i\neq j$).参数 α_i^2 是非负的,表示随机噪声的强度.用 $m_i+\alpha_i\dot{B}_i^H(t)$ 替换 m_i 后得到下面的随机扰动模型

收稿日期:2017-09-13;**修回日期**:2018-04-27.

基金项目:宁夏自然科学基金(NZ16041)

作者简介:袁怀民(1965－),男,宁夏银川人,宁夏大学教授,主要从事随机微分方程动力学研究,E-mail:Yuan_hm@nxu.edu.cn.

通信作者:张启敏(1964－),女,宁夏银川人,宁夏大学教授,博士,博士生导师,研究方向为控制理论及其应用,E-mail:zhangqimin64@sina.com.

$$\begin{cases}\mathrm{d}N_i(t)=N_i(t)(\mu(R_1,R_2,\cdots,R_k)-m_i)\mathrm{d}t-\alpha_iN_i(t)\mathrm{d}B_i^H(t), & i=1,2,\cdots,n,\\ \mathrm{d}R_j(t)=D(S_j-R_j(t))\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}C_{ji}\mu(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t)\mathrm{d}t, & j=1,2,\cdots,k.\end{cases} \tag{3}$$

对于新的随机资源竞争种群模型(3),本文通过构造 Lyapunov 函数,讨论系统的持久性和灭绝性的判断准则,给出持久性和灭绝性充分条件,并利用数值算例验证结论的有效性.

1　持久性和灭绝性

为了研究随机资源竞争模型(3)的动力学行为,需要验证该模型有唯一的全局正解.令 (Ω,F,P) 为完备的概率空间,其中滤波 $\{F_t\}_{t\geq 0}$ 满足通常的条件.

定理 1　对于任意初值 $(N_i(0),R_j(0))\in\mathbf{R}_+^{n+k}$,系统(3)式的解依概率 1 保持在 $\mathbf{R}_+^{n+k}$ 中,即 $N_i(t)\in\mathbf{R}_+^n$,其中 $i\in(1,2,\cdots,n)$,$R_j(t)\in\mathbf{R}_+^k$,$j\in(1,2,\cdots,k)$.

证明　由于方程(3)式的系数不满足线性增长条件,因此存在唯一的局部解 $t\in[0,\tau_e)$,令 τ_e 是解的爆破时间.假设当 $m_0>0$ 足够大时,使得 $N_i(0)$ 和 $R_j(0)$ 均落在区间 $[1/m_0,m_0]$ 中,其中 $i=1,2,\cdots,n$,$j=1,2,\cdots,k$,对于任意整数 $m\geq m_0$,定义停时

$$\tau_m=\inf\{t\in[0,\tau_e):\min_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq k}\{N_i(t),R_j(t)\}\leq 1/m \text{ 或者 } \max_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq k}\{N_i(t),R_j(t)\}\geq m\}. \tag{4}$$

令 $\inf\varnothing=\infty$($\varnothing$ 表示空集).显然,τ_m 递增.令 $\tau_\infty=\lim_{m\to\infty}\tau_m$,其中 $0\leq\tau_\infty\leq\tau_e$ 几乎处处成立(几乎处处成立表示几乎必然).如果证明 $\tau_\infty=\infty$ 几乎处处成立,那么 $\tau_e=\infty$.并且对于所有 $t\geq 0$ 解保持在 R_+^{n+k} 上几乎处处成立.如果上面结论不成立,则存在一组常数 $T>0$,$0<\varepsilon<1$ 使得 $P\{\tau_\infty\leq T\}>\varepsilon$.因此,存在整数 $m_1\geq m_0$ 使得

$$P\{\tau_m\leq T\}\geq\varepsilon,m\geq m_1. \tag{5}$$

利用比较原理[11],可得对于任意 $t\leq\tau_e$

$$N_i(t)\vee R_j(t)\leq C_1, \tag{6}$$

其中 C_1 是正常数.

对方程(3)式构造 Lyapunov 函数,

$$V(N_i(t),R_j(t))=\sum_{i=1}^{n}[N_i(t)-b_i-b_i\ln(\frac{N_i(t)}{b_i})]+\sum_{j=1}^{k}[R_j(t)-a_j-a_j\ln(\frac{R_j(t)}{a_j})],$$

其中 $a_j(1\leq j\leq k)$,$b_i(1\leq i\leq n)$ 是正常数.

利用 Itô 公式,可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V\leq&\sum_{i=1}^{n}b_im_i\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}N_i(t)\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}N_i(t)m_i\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}b_i\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)\mathrm{d}t+\\&\sum_{j=1}^{k}DS_j\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ji}\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{k}Da_j\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{R_j(t)}C_{ji}\mu_i(R_1,\\&R_2,\cdots,R_k)N_i(t)\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}Ht^{2H-1}\alpha_i^2\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{b_i}{N_i(t)})\alpha_iN_i(t)\mathrm{d}B_i^H(t).\end{aligned} \tag{7}$$

令

$$\begin{aligned}LV:=&\sum_{i=1}^{n}b_im_i+\sum_{i=1}^{n}N_i(t)\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)-\sum_{i=1}^{n}N_i(t)m_i-\sum_{i=1}^{n}b_i\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)+\\&\sum_{j=1}^{k}DS_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ji}\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t)+\sum_{j=1}^{k}Da_j+\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{R_j(t)}C_{ji}\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t)-\sum_{i=1}^{n}Ht^{2H-1}\alpha_i^2.\end{aligned}$$

选取 a_i,b_j,使得对于任意 $1\leq i\leq n$,$1\leq j\leq k$,有

$$\sum_{i=1}^{n}N_i(t)\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)-\sum_{i=1}^{n}b_i\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)\leq 0,$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ji}\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{R_j(t)}C_{ji}r_i\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t)\le 0.$$

当 $t\le\tau_e$ 时,由(6)式知,存在正常数 C_2,使得

$$LV\le C_2. \tag{8}$$

对于 $1\le i\le n,1\le j\le k$,由(7)、(8)式得到

$$\int_0^{\tau_m\wedge T}\mathrm{d}V(N_i(t),R_j(t))\le\int_0^{\tau_m\wedge T}C_2\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau_m\wedge T}(1-\frac{b_i}{N_i(s)})\alpha_iN_i(s)\mathrm{d}B_i^H(s). \tag{9}$$

根据标准 fBm 的性质,对方程(9)式两边进行估计,对于 $1\le i\le n,1\le j\le k$ 有

$$E[V(N_i(\tau_m\wedge T),R_j(\tau_m\wedge T)]\le V(N_i(0),R_j(0))+C_2T. \tag{10}$$

对于任意 $m\ge m_1$,令 $\Omega_m=\{\tau_m\le T\}$.根据(3)式,可得 $P(\Omega_m)\ge\varepsilon$.又对于任意 $\omega\in\Omega_m$,至少存在一个 $N_i(\tau_m,\omega),R_i(\tau_m,\omega)$,与 m 或 $1/m$ 相等,$1\le i\le n,1\le j\le k$.因此

$$V(N_i(\tau_m\wedge T),R_j(\tau_m\wedge T),1\le i\le n,1\le j\le k)\ge$$
$$\min_{1\le j\le k}\left\{m-a_j-a_j\ln\frac{m}{a_j},\frac{1}{m}-a_j-a_j\ln\frac{1}{ma_j}\right\}\wedge$$
$$\min_{1\le i\le n}\left\{m-b_i-b_i\ln\frac{m}{b_i},\frac{1}{m}-b_i-b_i\ln\frac{1}{mb_i}\right\}. \tag{11}$$

再根据(5)式和(11)式,可得

$$V(N_i(0),R_j(0),1\le i\le n,1\le j\le k)+CT\ge$$
$$\min_{1\le j\le k}\left\{m-a_j-a_j\ln\frac{m}{a_j},\frac{1}{m}-a_j-a_j\ln\frac{1}{ma_j}\right\}\wedge$$
$$\min_{1\le i\le n}\left\{m-b_i-b_i\ln\frac{m}{b_i},\frac{1}{m}-b_i-b_i\ln\frac{1}{mb_i}\right\}, \tag{12}$$

其中 $I_{\Omega_m}(\omega)$ 是 Ω_m 的指数函数.令 $m\to\infty$,则 $V(N_i(0),R_j(0),1\le i\le n,1\le j\le k)+C_2T=\infty$,推出矛盾.因此 $\tau_\infty=\infty$ 几乎处处成立.

下面研究随机模型(3)的渐近行为条件.采用与文献[6]类似的证明方法,当 Hurst 参数 $H\le 1/2$,可得如下的不等式

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t R_j(s)\mathrm{d}s}{t}\le M,\ j=1,2,\cdots,k, \tag{13}$$

其中 M 是正常数.

定理 2 如果 $S_j>\frac{\int_0^t R_j(s)\mathrm{d}s}{t}$,$0<H\le 1/2$,那么对于任意的初始值 $(N_i(0),R_j(0))\in\mathbf{R}_+^{n+k}$,模型(3)式的解满足

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t EN_i(s)\mathrm{d}s\ge-\frac{D}{\bar{C}m}(S_j-M)>0\quad 1\le i\le n,$$

其中 $m=\max\limits_{1\le i\le n}m_i,\bar{C}=\max\limits_{i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,k}C_{ji}$.
即种群系统依概率1持久.

证明 定义函数 $V(N_i(t))=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)$,由 Itô 公式,可得

$$\mathrm{d}V=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(t)-m_iN_i(t))\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}\alpha_iN_i(t)\mathrm{d}B_i^H(t). \tag{14}$$

对方程(14)式的两边从0到 t 积分,再除以 t,可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i(t)}{t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i(0)}{t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^t\mu_i(R_1,R_2,\cdots,R_k)N_i(s)\mathrm{d}s}{t}-$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\int_0^t N_i(t)(s)\mathrm{d}s}{t} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \int_0^t N_i(s)\mathrm{d}B_i^H(s)}{t}. \tag{15}$$

对系统(3)的第 2 个方程从 0 到 t 积分,有

$$R_j(t) - R_j(0) = D(S_j t - \int_0^t R_j(s)\mathrm{d}s) - \sum_{i=1}^{n} C_{ji} \int_0^t \mu(R_1, R_2, \cdots, R_k) N_i(s)\mathrm{d}s. \tag{16}$$

因此可得

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \mu(R_1, R_2, \cdots, R_k) N_i(s)\mathrm{d}s \geq -\frac{1}{\bar{C}} R_j + \frac{D}{\bar{C}} S_j t - \frac{D}{\bar{C}} \int_0^t R_j(s)\mathrm{d}s, \tag{17}$$

其中 $\bar{C} = \max\limits_{i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,k} C_{ji}$. 由(15)式和(17)式

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\int_0^t N_i(s)\mathrm{d}s}{t} \geq -\frac{D}{\bar{C}} \frac{\int_0^t R_j(s)\mathrm{d}s)}{t} - \frac{1}{\bar{C}} \frac{R_j}{t} + \frac{D}{\bar{C}} S_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i(t)}{t} +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i(0)}{t} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^t N_i(s)\mathrm{d}B_i^H(s)}{t}. \tag{18}$$

应用文献[4]中的引理 5.1,可得

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\int_0^t E N_i(s)\mathrm{d}s}{t} \geq -\frac{DM}{\bar{C}m} + \frac{DS_j}{\bar{C}m} > 0,$$

其中 $m = \max\limits_{1\leq i\leq n} m_i$, $\bar{C} = \max\limits_{i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,k} C_{ji}$, M 在方程(13)式中给出.

定理 3　如果 $r_i M < \max\limits_{1\leq j\leq k} K_{ji} m_i$, $0 < H \leq 1/2$, $1 \leq i \leq n$,那么对于任意初值$(N_i(0), R_j(0)) \in \mathbf{R}^{n+k}$,随机模型(3)式的解满足

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln N_i(t)}{t} < 0, 1 \leq i \leq n.$$

即种群依概率 1 灭绝.

证明　定义函数 $V(N_i(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln N_i(t)$. 由 Itô 公式得

$$\mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i(R_1, R_2, \cdots, R_k) - m_i) - \sum_{i=1}^{n} H t^{2H-1} \alpha_i^2. \tag{19}$$

对方程(19)式的两边从 0 到 t 积分,再除以 t ,可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(N_i(t))}{t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(N_i(0))}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\int_0^t \mu_i(R_1, R_2, \cdots, R_k)\mathrm{d}s}{t} -$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{2} t^{2H-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \int_0^t \mathrm{d}B_i^H(s)}{t}. \tag{20}$$

因为 $\mu_i(R_1, R_2, \cdots, R_k) \leq \dfrac{r_i R_i(t)}{K_{ji} + R_i(t)}$,所以对于 $\forall i \in 1, 2, \cdots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(N_i(t))}{t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(N_i(0))}{t} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{tK_{ji}} \int_0^t R_i(s)\mathrm{d}s -$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{2} t^{2H-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \int_0^t \mathrm{d}B^H(s)}{t}. \tag{21}$$

由假设条件可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(N_i(t))}{t}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(N_i(0))}{t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{r_iM}{K_{ji}}-\sum_{i=1}^{n}m_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\int_0^t \mathrm{d}B_i^H(s)}{t}. \tag{22}$$

令 $t\to\infty$,当 $H<\frac{1}{2}$,由大数定理[12],可推出

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\int_0^t \mathrm{d}B_i^H(s)}{t}=0, \tag{23}$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln N_i(t)}{t}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{r_iM}{K_{ji}}-\sum_{i=1}^{n}m_i<0.$$

2　数值算例

2.1　算例 1

本算例是一个包含 6 种群 3 种资源的竞争系统.令 $r_i=1$,$m_i=D=0.25$,$S_1=6$,$S_2=10$,$S_3=14$,$H=1/4$,$\alpha_i=0.3$,$i=1,2,3$,K 和 C 如下所示

$$K=\begin{pmatrix}1.00&0.90&0.30&1.04&0.34&0.77\\0.30&1.00&0.90&0.71&1.02&0.76\\0.90&0.30&1.00&0.46&0.34&1.07\end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$C=\begin{pmatrix}0.04&0.07&0.04&0.10&0.03&0.02\\0.08&0.08&0.10&0.10&0.05&0.17\\0.14&0.10&0.10&0.16&0.06&0.14\end{pmatrix}. \tag{25}$$

k_{ij} 和 c_{ij} 分别是矩阵 K 和 C 的元素.初始条件为,$t=0$ 时,$R_j=S_j$,并且对于所有的种群 i,$N_i=0.1+i/100$.图 1 描述的是随时间的变化种群数量的改变,得到了 6 种种群的持久性.在生态系统中,当 6 种种群共同存在时,种群 4~6 的密度比种群 1~3 的密度大.

2.2　算例 2

此算例同样是一个包含 6 种群 3 种资源的竞争系统.令 $r=(0.87,0.88,0.85,0.90,0.86,0.88)$,$r_i$ 是向量 r 中的元素,$m_i=0.60$,$D=0.25$,$S_i=1$,$N(0)=(0,5,0.4,0.6,0.3,0.2,0.1)$,$H=1/4$,$\alpha_i=0.4$,$i=1,2,3$,

$$K=\begin{pmatrix}1.52&1.49&1.46&1.52&1.59&1.44\\1.47&1.55&1.42&1.53&1.58&1.56\\1.48&1.45&1.61&1.51&1.50&1.54\end{pmatrix}. \tag{26}$$

初始条件包括,$t=0$ 时,$R_j=S_j$,图 2 描述的是随时间的变化种群数量的改变,表明了 6 种种群的灭绝性动力行为.

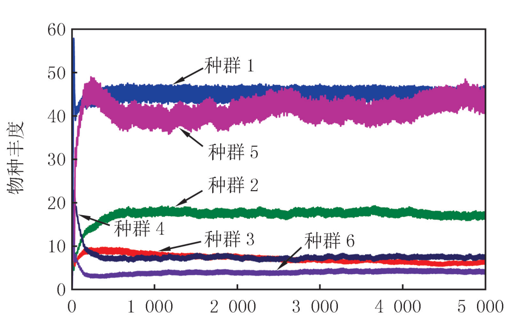

图 1　6 种群 3 资源种群系统的时间序列(算例 1)

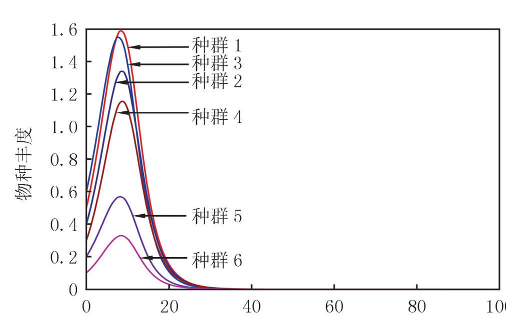

图 2　6 种群 3 资源种群系统的时间序列(算例 2)

3 结 论

把死亡率受外界环境噪声影响也就是分数 Brown 运动引入到 n 个种群、k 个资源的资源竞争种群系统中,从而得到了一个新的随机的资源竞争种群模型.首先讨论了正解的存在性,其次进一步研究该竞争模型的持久性和灭绝性判断准则.由于随机噪声的引入在分析持久性和灭绝性时,与确定的资源种群竞争系统相比增加了一定的难度,这也是本文的创新点.同时,当 Hurst 参数 $H > 1/2$ 的结果也有待以后继续讨论.

参 考 文 献

[1] Zheng D,Bengtsson J,Aegren G.How do soil organisms affect total organic nitrogen storage and substrate nitrogen to carbon ratio in soils? A theoretical analysis[J].Oikos,1999,86(3):430-442.

[2] Huisman J,Weissing F J.Biodiversity of plankton by species oscillations and chaos[J].Nature,1999,402(6760):407-410.

[3] Khan A A,Zytner R G,Feng Z.Establishing Correlations and Scale-Up Factor for Estimating the Petroleum Biodegradation Rate in Soil [J].Bioremediation Journal,2015,19(1):32-46.

[4] Monod J.La Technique De Culture Continue Theorie Et Applications[J].Selected Papers in Molecular Biology by Jacques Monod,1978(不详):184-204.

[5] Fang Y,Scheibe T D,Mahadevan R,et al.Direct coupling of a genome-scale microbial in silico model and a groundwater reactive transport model[J].Journal of Contaminant Hydrology,2011,122(1):96-103.

[6] Li B,Smith H L.Global dynamics of microbial competition for two resources with internal storage[J].Journal of Mathematical Biology, 2007,55(4):481.

[7] Fowler A C,Winstanley H F,Mcguinness M J,et al.Oscillations in soil bacterial redox reactions.[J].Journal of Theoretical Biology,2014, 342(3):33-38.

[8] Wei M.Exponential stability of numerical solutions to stochastic age-dependent population equations with Poisson jumps[J].International Journal of Computational & Mathematical Sciences,2011,6(1):28-33.

[9] Ma W,Zhang Q,Wang Z.Asymptotic stability of stochastic age-dependent population equations with Markovian switching[J].Elsevier Science Inc,2014,227:309-319.

[10] 申芳芳,辛志贤,张启敏,等.与年龄相关的随机种群系统分裂倒向 Euler 法的几乎必然指数稳定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2017,45(2):8-13.

[11] Li D,Zhu Q.Comparison principle and stability of stochastic delayed neural networks with Markovian switching[J].Neurocomputing, 2014,123:436-442.

[12] Khasminskii R.Stochastic modelling and applied probability[M].2ed.Berlin Heidelberg: Springer-Verlag,2012.

Asymptotic behaviour of a class of resource competition biology species system by a fractional brownian motion

Yuan Huaimin[a], Zhang Qimin[b]

(a.College of Information and Engineering; b.School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: In this paper, the stochastic resource competitive population model of n species and k resources is studied (i.e. chemostat model), in which the species mortality rates are influenced by the fractional Brownian motion of extrinsic noise environment. By constructing a Lyapunov functional, the persistence and extinction criteria are derived in the mean square sense. Some examples are given to illustrate the effectiveness of the theoretical result.

Keywords: resource competition; biology species system; fractional Brownian motion; persistence; extinction

[责任编校 陈留院]