第 45 卷 第 1 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol. 45 No. 1
2017 年 1 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Jan. 2017

文章编号:1000 - 2367(2017)01 - 0106 - 08 DOI:10.16366/j.cnki.1000 - 2367.2017.01.017

具有 Crowley-Martin 型功能性反应的随机非自治捕食模型的持续与灭绝

赵治涛,邓晓宇

(黑龙江大学 数学科学学院,哈尔滨 150080)

摘 要:主要研究了一类具有 Crowley-Martin 型功能性反应的随机非自治捕食模型的持续性与灭绝性.种群灭绝、平均意义下非持续以及平均意义下弱持续的充分性判据被建立.此外,利用数值模拟验证了所得理论结果的有效性.

关键词:随机非自治捕食模型;Crowley-Martin 功能性反应;持续;灭绝

中图分类号:O29 **文献标志码**:A

种群动力学是生物数学中的一个重要分支,主要研究种群与种群、种群与环境之间的相互作用关系.由于捕食食饵关系的重要性和普遍存在性,捕食者 - 食饵模型已经受到国内外数学家与生物学家的极大关注[1-4].此外,在捕食者 - 食饵模型的研究中,功能性反应占有非常重要的地位.常见的功能性反应有:Holling 型功能性反应、Beddington-DeAngelis 型功能性反应、Hassell-Varley 型功能性反应、Crowley-Martin 型功能性反应等.1975 年,Crowley 和 Martin 提出了 Crowley-Martin 型功能性反应函数.它是一类既依赖于食饵又依赖于捕食者的功能性反应函数,考虑了捕食者之间的相互作用,并且假设即使食饵的种群密度很大,捕获量依然随着捕食者密度的增加而递减.此外,不论某个捕食者是否寻找食饵,捕食者之间的相互干扰始终存在,从这一点来看,它更加符合自然界中的生物现象.经典的具有 Crowley-Martin 型功能性反应的非自治捕食模型可以表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)\left[a(t) - b(t)x(t) - \dfrac{c(t)y(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\right],\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(t)\left[-d(t) + \dfrac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\right],\end{cases} \tag{1}$$

其中模型中所有参数均是 $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ 上连续有界函数,$x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 t 时刻食饵和捕食者的种群密度,$a(t)$ 表示食饵内禀增长率,$d(t)$ 表示捕食者死亡率,$c(t)$ 表示捕食者的捕获率,$e(t)$ 表示营养转化率,a/b 表示食饵的环境最大容纳量,$\alpha(t),\beta(t) > 0$.

然而,由于生物种群在自然界中容易受到外界环境因素的干扰,如洪水、地震、海啸以及人为干预等,从而使得模型(1)中的参数发生随机的波动.因此,研究随机环境下的种群动力系统的动力学行为,已经成为现代生物数学的一个主要研究课题[5-10].考虑到环境噪声的影响,在确定性模型(1)的方程中引入白噪声.假设模型(1)中的参数 $a(t)$ 和 $d(t)$ 受到环境噪声的影响,即

$$a(t) \to a(t) + \sigma_1(t)\dot{B}_1(t),\ -d(t) \to -d(t) + \sigma_2(t)\dot{B}_2(t),$$

其中 $(B_1(t),B_2(t))$ 是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0},\mathscr{P})$ 上的二维相互独立的标准 Brownian 运动,$\sigma_i^2(t)(i=1,2)$ 表示白噪声的强度.于是,相应于确定性模型(1),可以得到如下具有 Crowley-Martin 型功能

收稿日期:2016-06-07;**修回日期**:2016-12-22.

基金项目:国家自然科学基金(11201128);黑龙江省教育厅项目(12541621).

作者简介(通信作者):赵治涛(1981 -),男,山东平邑人,黑龙江大学副教授,博士,研究方向为微分方程及生物数学,E-mail:zhitaozhao0808@126.com

性反应的随机非自治捕食模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = x(t)\Big[a(t) - b(t)x(t) - \dfrac{c(t)y(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\Big]\mathrm{d}t + \sigma_1(t)x(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}y = y(t)\Big[-d(t) + \dfrac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))} - g(t)y(t)\Big]\mathrm{d}t + \sigma_2(t)y(t)\mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中初始条件 $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$. 本文将主要研究模型(2)中种群的持续性与灭绝性问题,建立种群灭绝、平均意义下非持续以及平均意义下弱持续的充分性判据,并利用数值模拟验证本文的理论结果.

1 预备知识

为方便起见,引进以下记号. 设 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ 上连续有界,那么记

$$f^u = \sup_{t\in\mathbf{R}_+} f(t), f^l = \inf_{t\in\mathbf{R}_+} f(t),$$

并假设 $a^l, b^l, c^l, d^l, e^l, g^l > 0$. 此外,记

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s, f^* = \lim_{t\to+\infty}\sup f(t), f_* = \lim_{t\to+\infty}\inf f(t).$$

接下来,给出一个定义和两个重要的引理,它们在本文主要结论的证明中是非常有用的.

定义 1[11]　(1) 如果 $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\ a.s.$,则称物种 $x(t)$ 灭绝.

(2) 如果 $\langle x \rangle^* = 0\ a.s.$,则称物种 $x(t)$ 在平均意义下是非持续的.

(3) 如果 $\langle x \rangle^* > 0\ a.s.$,则称物种 $x(t)$ 在平均意义下是弱持续的.

引理 1　对于任意初始值 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_i > 0, i = 1,2\}$,当 $t \geq 0$ 时,模型(2) 存在唯一解 $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2\ (a.s.)$. 此外,模型(2) 的解 $(x(t), y(t))$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\sup \ln x(t)/t \leq 0\ a.s., \lim_{t\to+\infty}\sup \ln y(t)/t \leq 0\ a.s.. \tag{3}$$

证明　关于模型(2)解的存在与唯一性的证明,与文献[12]完全类似,此处省略. 因此,仅给出引理后半部分的证明. 根据模型(2),可以得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}x \leq x(t)[a(t) - b(t)x(t)]\mathrm{d}t + \sigma_1(t)x(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}y \leq y(t)\Big[\dfrac{e(t)c(t)}{\alpha(t)} - g(t)y(t)\Big]\mathrm{d}t + \sigma_2(t)y(t)\mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{4}$$

令

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)[a(t) - b(t)\tilde{x}(t)]\mathrm{d}t + \sigma_1(t)\tilde{x}(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t)\Big[\dfrac{e(t)c(t)}{\alpha(t)} - g(t)\tilde{y}(t)\Big]\mathrm{d}t + \sigma_2(t)\tilde{y}(t)\mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 是系统(5) 的解,且初始值 $x_0 > 0, y_0 > 0$. 根据随机微分方程的比较定理,可得

$$x(t) \leq \tilde{x}(t), y(t) \leq \tilde{y}(t) a.s., t \in [0, +\infty). \tag{6}$$

根据文献[7]中引理 3.4,可以得到 $\mathrm{d}x(t) = x(t)[b(t) - a_{11}(t)x(t)]\mathrm{d}t + \sigma(t)x(t)\mathrm{d}B(t)$,其中 $b(t)$, $a_{11}(t)$, $\sigma(t)$ 都是定义在 $\mathbf{R}_+$ 上的非负函数,如果 $a_{11}^l > 0$,那么 $\lim_{t\to+\infty}\sup \ln x(t)/\ln t \leq 1\ a.s.$. 因 $b(t), g(t) > 0$,故根据(5)和(6)式可以得到

$$\lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln x(t)}{\ln t} \leq \lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln \tilde{x}(t)}{\ln t} \leq 1\ a.s., \lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln y(t)}{\ln t} \leq \lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln \tilde{y}(t)}{\ln t} \leq 1\ a.s..$$

此外,又由于

$$\lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln x(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln x(t)}{\ln t}\lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln t}{t} \leq \lim_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln t}{t} = 0,$$

因此,可以推得 $\lim_{t\to+\infty}\sup \ln x(t)/t \leq 0\ a.s.$. 同理,可以得到 $\lim_{t\to+\infty}\sup \ln y(t)/t \leq 0\ a.s.$.

引理 2[9]　设 $x(\omega, t) \in C[\Omega \times [0, +\infty), \mathbf{R}_+]$. 若存在 3 个常数 $\lambda \in \mathbf{R}$ 和 $T, \lambda_0 > 0$,使得当 $t \geq T$ 时,

$$\ln x(t) \leq \lambda t - \lambda_0\int_0^t x(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t)B_i(t),$$

其中 $B_i(t)(1 \le i \le n)$ 是相互独立的标准 Brownian 运动,$\sigma_i(t)(1 \le i \le n)$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的连续有界函数,那么当 $\lambda \ge 0$ 时,有 $\langle x\rangle^* \le \lambda/\lambda_0$ a. s. ;当 $\lambda < 0$ 时,有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ a. s. .

2 主要结论

在本节中,将给出本文的主要结果.

定理 1 对于模型(2)中的物种 $x(t)$,有

(i) 若 $\langle f_1(t)\rangle^* < 0$,那么物种 $x(t)$ 灭绝,其中 $f_1(t) = a(t) - 0.5\sigma_1{}^2(t)$;

(ii) 若 $\langle f_1(t)\rangle^* = 0$,那么物种 $x(t)$ 在平均意义下是非持续的;

(iii) 若 $\langle f_1(t)\rangle^* > 0$,那么物种 $x(t)$ 在平均意义下是弱持续的.

证明 对模型(2)中的第一个方程,应用伊藤公式可得

$$\mathrm{d}\ln x = \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{(\mathrm{d}x)^2}{2x^2} = \left[a(t) - b(t)x - \frac{c(t)y}{(1+\alpha(t)x)(1+\beta(t)y)} - \frac{\sigma_1{}^2(t)}{2}\right]\mathrm{d}t + \sigma_1(t)\mathrm{d}B_1(t),$$

两边从 0 到 t 积分并且同时除以 t,得到

$$\frac{1}{t}\ln\left[\frac{x(t)}{x_0}\right] = \langle f_1(t)\rangle - \langle b(t)x(t)\rangle - \left\langle\frac{c(t)y(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\right\rangle + \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_1(s)\mathrm{d}B_1(s), \quad (7)$$

同理,可得

$$\frac{1}{t}\ln\left[\frac{y(t)}{y_0}\right] = \langle -f_2(t)\rangle + \left\langle\frac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\right\rangle - \langle g(t)y(t)\rangle + \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_2(s)\mathrm{d}B_2(s). \quad (8)$$

定义 $M_i(t) = \int_0^t \sigma_i(s)\mathrm{d}B_i(s), i = 1,2$,那么,$M_i(t)$ 是一个局部鞅,其二次变差为

$$\langle M_i, M_i\rangle_t = \int_0^t \sigma_i^2(s)\mathrm{d}s \le (\sigma_i^2)^u t,$$

根据鞅的强大数定律[13]可得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{M_i(t)}{t} = 0 \quad a.s., \qquad i = 1,2.$$

(i)在(7)式两端同时取上极限,并且利用(9)式可得

$$\left[\frac{\ln x(t)}{t}\right]^* \le \langle f_1(t)\rangle^* - \langle b(t)x(t)\rangle_* - \left\langle\frac{c(t)y(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\right\rangle_* \le \langle f_1(t)\rangle^* < 0,$$

因此,$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ a. s. ,即物种 $x(t)$ 灭绝.

(ii)根据上极限的性质,对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$,存在 $T > 0$,当 $t > T$ 时有 $\langle f_1(t)\rangle < \langle f_1(t)\rangle^* + \varepsilon/2$. 再由(9) 式可得,当 $t > T$ 时,$M_1(t)/t \le \varepsilon/2$. 将上述两个不等式代入(7)式可得

$$\frac{1}{t}\ln\left[\frac{x(t)}{x_0}\right] \le \langle f_1(t)\rangle^* + \frac{\varepsilon}{2} - \langle b(t)x(t)\rangle + \frac{\varepsilon}{2} \le \langle f_1(t)\rangle^* + \varepsilon - b^l\langle x(t)\rangle = \varepsilon - b^l\langle x(t)\rangle,$$

于是,根据引理 2 可以得到 $\langle x\rangle^* \le \varepsilon/b^l$,再利用 ε 的任意性即可得证.

(iii)在(7)式两端同时取上极限,并利用(3)式和(9)式可得

$$b^u\langle x\rangle^* + c^u\langle y\rangle^* \ge \left[\frac{\ln x(t)}{t}\right]^* + \langle b(t)x(t)\rangle^* + \left\langle\frac{c(t)y(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\right\rangle^* -$$
$$\left\langle\frac{M_1(t)}{t}\right\rangle_* \ge \langle f_1(t)\rangle^* > 0. \quad (10)$$

因此,必有 $\langle x\rangle^* > 0$ a. s. 若不然,对于任意的 $\omega \in \{\langle x(t,\omega)\rangle^* = 0\}$,由(10) 式可知,必有 $\langle y(t,\omega)\rangle^* > 0$. 另一方面,在(8) 式两端同时取上极限,并利用(9) 式及 $\langle x(t,\omega)\rangle^* = 0$,可得

$$\left[\frac{\ln y(t,\omega)}{t}\right]^* \le -\langle f_2(t)\rangle_* - g^l\langle y(t,\omega)\rangle_* \le -\langle f_2(t)\rangle_* < 0.$$

这就说明 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ a. s. ,此与 $\langle y(t,\omega)\rangle^* > 0$ 矛盾,因此 $\langle x(t)\rangle^* > 0$ a. s. .

定理 2　对于模型(2)中的物种 $y(t)$，有

(I)若 $\langle b(t)\rangle_*\langle -f_2(t)\rangle^* + \langle e(t)c(t)\rangle^*\langle f_1(t)\rangle^* < 0$，那么物种 $y(t)$ 灭绝，这里 $f_2(t) = d(t) + 0.5\sigma_2^2(t)$.

(II)若 $\langle b(t)\rangle_*\langle -f_2(t)\rangle^* + \langle e(t)c(t)\rangle^*\langle f_1(t)\rangle^* = 0$，那么物种 $y(t)$ 在平均意义下是非持续的.

(III)若 $\langle -f_2(t)\rangle^* + \langle \frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\rangle^* > 0$ 成立，那么物种 $y(t)$ 在平均意义下是弱持续的，其中 $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ 是系统(5)的解，且初始值 $(x_0,y_0)\in \mathbf{R}_+^2$.

证明　(I)如果 $\langle f_1(t)\rangle^* \le 0$，那么根据定理 1(i)可知 $\langle x\rangle^* = 0$. 另一方面，根据上极限的性质，对于任意充分小且满足 $\langle -f_2(t)\rangle^* + \varepsilon < 0$ 的 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，当 $t > T$ 时，有 $\langle -f_2(t)\rangle < \langle -f_2(t)\rangle^* + \varepsilon/3$，$\langle x(t)\rangle < \langle x(t)\rangle^* + \varepsilon/(3e^uc^u) = \varepsilon/(3e^uc^u)$. 再由(9)式可得，当 $t > T$ 时，$M_2(t)/t \le \varepsilon/3$. 将上述 3 个不等式代入(8)式可以得到

$$\frac{1}{t}\ln\left[\frac{y(t)}{y_0}\right] \le \langle -f_2(t)\rangle + e^uc^u\langle x(t)\rangle - g^l\langle y(t)\rangle + \frac{M_2(t)}{t} \le \langle -f_2(t)\rangle^* + \frac{\varepsilon}{3} + e^uc^u\cdot\frac{\varepsilon}{3e^uc^u} - g^l\langle y(t)\rangle + \frac{\varepsilon}{3} = \langle -f_2(t)\rangle^* + \varepsilon - g^l\langle y(t)\rangle < 0,$$

于是，得到 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ a.s..

如果 $\langle f_1(t)\rangle^* > 0$，那么根据(7)式和(9)式可得

$$\frac{1}{t}\left[\ln\frac{x(t)}{x_0}\right] \le \langle f_1(t)\rangle^* + \frac{\varepsilon}{2} - [\langle b(t)\rangle_* - \varepsilon]\langle x(t)\rangle + \frac{\varepsilon}{2},$$

根据引理 2 以及 ε 的任意性，可以推得

$$\langle x(t)\rangle^* \le \frac{\langle f_1(t)\rangle^*}{\langle b(t)\rangle_*}. \tag{11}$$

将这些不等式代入(8)式并利用 ε 的任意性，可以得到

$$\left[\frac{\ln y(t)}{t}\right]^* \le \langle -f_2(t)\rangle^* + \langle\frac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\rangle^* \le \langle -f_2(t)\rangle^* + [\langle e(t)c(t)\rangle^* + \varepsilon]\langle x(t)\rangle^* \le \frac{\langle b(t)\rangle_*\langle -f_2(t)\rangle^* + [\langle e(t)c(t)\rangle^* + \varepsilon]\langle f_1(t)\rangle^*}{\langle b(t)\rangle_*} < 0,$$

因此，可以推得 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ a.s..

(II)根据(I)的证明可知，如果 $\langle f_1(t)\rangle^* \le 0$，那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ a.s.，于是 $\langle y(t)\rangle^* = 0$. 现在假设 $\langle f_1(t)\rangle^* > 0$，将通过反证法来证明(II). 若 $\langle y(t)\rangle^* > 0$，那么根据(3)式可知 $[t^{-1}\ln y(t)]^* = 0$，然后利用(8)式，可以推得

$$0 = \left[\frac{\ln y(t)}{t}\right]^* \le \langle -f_2(t)\rangle^* + \langle\frac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\rangle^* \le \langle -f_2(t)\rangle^* + \langle e(t)c(t)\rangle^*\langle x(t)\rangle^*,$$

另一方面，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，当 $t > T$ 时，使得

$$\langle -f_2(t)\rangle < \langle -f_2(t)\rangle^* + \frac{\varepsilon}{3}, \langle\frac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))}\rangle < \langle e(t)c(t)\rangle^*\langle x(t)\rangle^* + \frac{\varepsilon}{3}, \frac{M_2(t)}{t} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

将上述 3 个不等式代入(8)式，立即可得

$$\frac{1}{t}\ln\left[\frac{y(t)}{y_0}\right] \le \langle -f_2(t)\rangle^* + \frac{\varepsilon}{3} + \langle e(t)c(t)\rangle^*\langle x(t)\rangle^* + \frac{\varepsilon}{3} - [\langle g(t)\rangle_* - \varepsilon]\langle y(t)\rangle + \frac{\varepsilon}{3} = \langle -f_2(t)\rangle^* + \langle e(t)c(t)\rangle^*\langle x(t)\rangle^* + \varepsilon - [\langle g(t)\rangle_* - \varepsilon]\langle y(t)\rangle.$$

根据引理 2 和 ε 的任意性，可以得到

$$\langle y(t)\rangle^{*} \le \frac{\langle -f_2(t)\rangle^{*} + \langle e(t)c(t)\rangle^{*}\langle x(t)\rangle^{*}}{\langle g(t)\rangle_{*}},$$

将(11)式代入上面等式,可以得出

$$\langle y(t)\rangle^{*} \le \frac{\langle b(t)\rangle_{*}\langle -f_2(t)\rangle^{*} + \langle e(t)c(t)\rangle^{*}\langle f_1(t)\rangle^{*}}{\langle b(t)\rangle_{*}\langle g(t)\rangle_{*}} = 0,$$

此与假设矛盾,因此得到 $\langle y(t)\rangle^{*} = 0$ *a. s.*.

(Ⅲ)接下来,证明 $\langle y(t)\rangle^{*} > 0$ *a. s.*. 否则,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在模型(2) 的一个解$(\hat{x}(t),\hat{y}(t))$,并且满足正初始值条件$(x_0,y_0) \in \mathbf{R}_{+}^{2}$,使得$\mathscr{P}\{\langle \hat{y}(t)\rangle^{*} < \varepsilon\} > 0$. 取 ε 足够小,以使得

$$\langle -f_2(t)\rangle^{*} + \langle \frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\rangle^{*} > \left(g^{u} + \frac{2e^{u}(c^{u})^{2}}{b^{l}}\right)\varepsilon. \tag{12}$$

根据(8)式可以推得

$$\frac{1}{t}\ln\left[\frac{\hat{y}(t)}{y_0}\right] = \langle -f_2(t)\rangle + \langle \frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\rangle - \langle g(t)\hat{y}(t)\rangle + \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_2(s)\mathrm{d}B_2(s) + \langle \frac{e(t)c(t)\hat{x}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))} - \frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\rangle,$$

这里 $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ 是系统(5) 满足初始条件$(x_0,y_0) \in \mathbf{R}_{+}^{2}$ 的解,并且由随机微分方程的比较定理还有

$$\hat{x}(t) \le \tilde{x}(t),\hat{y}(t) \le \tilde{y}(t) \quad a.s., \quad t \in [0,+\infty).$$

由于

$$\begin{aligned}
&\frac{e(t)c(t)\hat{x}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))} - \frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))} = \\
&\frac{e(t)c(t)\beta(t)\tilde{x}(t)(\tilde{y}(t)-\hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))} + \\
&\frac{e(t)c(t)\alpha(t)\beta(t)\tilde{x}(t)\hat{x}(t)(\tilde{y}(t)-\hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))} - \\
&\frac{e(t)c(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))} - \\
&\frac{e(t)c(t)\beta(t)\tilde{y}(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))} \ge \\
&\frac{e(t)c(t)\beta(t)\tilde{x}(t)(\tilde{y}(t)-\hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))} + \\
&\frac{e(t)c(t)\alpha(t)\beta(t)\tilde{x}(t)\hat{x}(t)(\tilde{y}(t)-\hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))} - \\
&e(t)c(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)) - e(t)c(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)) \ge \\
&-2e(t)c(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)),
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\ln\left[\frac{\hat{y}(t)}{y_0}\right] \ge{}& \langle -f_2(t)\rangle + \langle \frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\rangle - \langle g(t)\hat{y}(t)\rangle + \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_2(s)\mathrm{d}B_2(s) - \\
&2\langle e(t)c(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t))\rangle \ge \langle -f_2(t)\rangle + \langle \frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\rangle - \\
&\langle g(t)\hat{y}(t)\rangle + \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_2(s)\mathrm{d}B_2(s) - 2e^{u}c^{u}\langle \tilde{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{13}$$

定义 $V_1(t) = |\ln\tilde{x}(t) - \ln\hat{x}(t)|$,则当 $t \ge 0$ 时,$V_1(t)$ 是一个正值连续函数. 计算 $V_1(t)$ 的右上导数,然后利用伊藤公式,可以推得

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{+}V_1(t) ={}& \mathrm{sgn}(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t))\left\{\left[\frac{\mathrm{d}\tilde{x}(t)}{\tilde{x}(t)} - \frac{(\mathrm{d}\tilde{x}(t))^2}{2\tilde{x}^2(t)}\right] - \left[\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\hat{x}(t)} - \frac{(\mathrm{d}\hat{x}(t))^2}{2\hat{x}^2(t)}\right]\right\} = \\
&\mathrm{sgn}(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t))\left\{-b(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)) + \frac{c(t)\hat{y}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))}\right\}\mathrm{d}t =
\end{aligned}$$

$$\left[-b(t)(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t))+\frac{c(t)\hat{y}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))}\right]\mathrm{d}t \le$$
$$[-b^l(\tilde{x}(t)-\hat{x}(t))+c^u\hat{y}(t)]\mathrm{d}t,$$

两边同时从 0 到 t 积分再同时除以 t,得到 $\frac{V_1(t)-V_1(0)}{t}\le c^u\langle\hat{y}(t)\rangle-b^l\langle\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle$. 由于 $\frac{V_1(t)}{t}\ge 0$,所以,根据上式可以推得 $b^l\langle\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle\le c^u\langle\hat{y}(t)\rangle+\frac{V_1(0)}{t}$.

因为 $V_1(0)=0$,故 $\langle\tilde{x}(t)-\hat{x}(t)\rangle\le\frac{c^u}{b^l}\langle\hat{y}(t)\rangle$,将此式代入(13)式中,可以得出

$$\frac{1}{t}\ln\left[\frac{\hat{y}(t)}{y_0}\right]\ge\langle -f_2(t)\rangle+\left\langle\frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\right\rangle-$$
$$\langle g(t)\hat{y}(t)\rangle+\frac{1}{t}\int_0^t\sigma_2(s)\mathrm{d}B_2(s)-2\frac{e^u(c^u)^2}{b^l}\langle\hat{y}(t)\rangle. \tag{14}$$

在(14)式两边同时取上极限,可得

$$\left[\frac{\ln\hat{y}(t)}{t}\right]^*\ge\langle -f_2(t)\rangle^*+\left\langle\frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\right\rangle^*-\left(g^u+\frac{2e^u(c^u)^2}{b^l}\right)\varepsilon>0,$$

此与引理 1 矛盾.

3 数值模拟

在本节,将利用 Milstein 方法[14]进行数值模拟,以验证和补充上述主要结果的有效性. 考虑下面的离散化方程:

$$x_{k+1}=x_k+x_k\left[a(k\Delta t)-b(k\Delta t)x_k-\frac{c(k\Delta t)y_k}{(1+\alpha(k\Delta t)x_k)(1+\beta(k\Delta t)y_k)}\right]\Delta t+$$
$$\sigma_1(k\Delta t)x_k\sqrt{\Delta t}\xi_k+\frac{\sigma_1^2(k\Delta t)}{2}x_k(\xi_k^2-1)\Delta t,$$
$$y_{k+1}=y_k+y_k\left[-d(k\Delta t)+\frac{e(k\Delta t)c(k\Delta t)x_k}{(1+\alpha(k\Delta t)x_k)(1+\beta(k\Delta t)y_k)}-g(k\Delta t)y_k\right]\Delta t+$$
$$\sigma_2(k\Delta t)y_k\sqrt{\Delta t}\eta_k+\frac{\sigma_2^2(k\Delta t)}{2}y_k(\eta_k^2-1)\Delta t,$$

其中 ξ_k 和 $\eta_k,k=1,2,\dots n$,是服从正态分布 $N(0,1)$ 的高斯随机变量.

在图 1 中,取 $a(t)=0.7+0.1\sin t,d(t)=0.1-0.04\sin t,b(t)=g(t)=2+0.01\sin t,c(t)=e(t)=1.4+0.1\sin t,\alpha(t)=\beta(t)=1,\sigma_1(t)=1.25+0.1\sin t,\sigma_2^2(t)/2=0.1+0.04\sin t$,那么 $\langle f_1(t)\rangle^*=-0.055<0$,由定理 1 和定理 2 可知,物种 $x(t),y(t)$ 均灭绝.

在图 2 中,取 $a(t)=0.7+0.1\sin t,d(t)=0.1-0.04\sin t,b(t)=g(t)=2+0.01\sin t,c(t)=e(t)=1.4+0.1\sin t,\alpha(t)=\beta(t)=1,\sigma_1(t)=1+0.1\sin t,\sigma_2^2(t)/2=0.24+0.04\sin t$,那么 $\langle f_1(t)\rangle^*=0.2>0,\langle b(t)\rangle_*\langle -f_2(t)\rangle^*+\langle e(t)c(t)\rangle^*\langle f_1(t)\rangle^*=1.99\times-0.34+1.5\times1.5\times0.2=-0.23<0$. 根据定理 1 与定理 2 可知,物种 $x(t)$ 在平均意义下弱持续而 $y(t)$ 灭绝.

在图 3 中,取 $a(t)=0.7+0.1\sin t,d(t)=0.1-0.04\sin t,b(t)=g(t)=2+0.01\sin t,c(t)=e(t)=1.4+0.1\sin t,\alpha(t)=\beta(t)=1,\sigma_1(t)=1+0.1\sin t,\sigma_2^2(t)/2=0.02+0.04\sin t$,那么 $\langle f_1(t)\rangle^*=0.2>0$,但是 $\langle -f_2(t)\rangle^*+\left\langle\frac{e(t)c(t)\tilde{x}(t)}{(1+\alpha(t)\tilde{x}(t))(1+\beta(t)\tilde{y}(t))}\right\rangle^*>0$ 很难验证. 图 3 说明物种 $x(t),y(t)$ 在平均意义下都是弱持续的.

4 结束语

基于理论和实际的重要性,具有 Crowley-Martin 型功能性反应的捕食模型已经引起了生态学家与数学家

的极大关注,并被广泛地研究.然而,对于随机非自治情形至今还没有被研究.因此,本文主要考虑了具有Crowley-Martin型功能性反应的随机非自治捕食模型的持续性与灭绝性.根据伊藤公式并通过构造Lyapunov函数给出了物种灭绝、平均意义下非持续以及平均意义下弱持续的充分条件,得到了食饵种群在平均意义下弱持续与灭绝的阈值,最后通过数值模拟验证了结论的有效性.

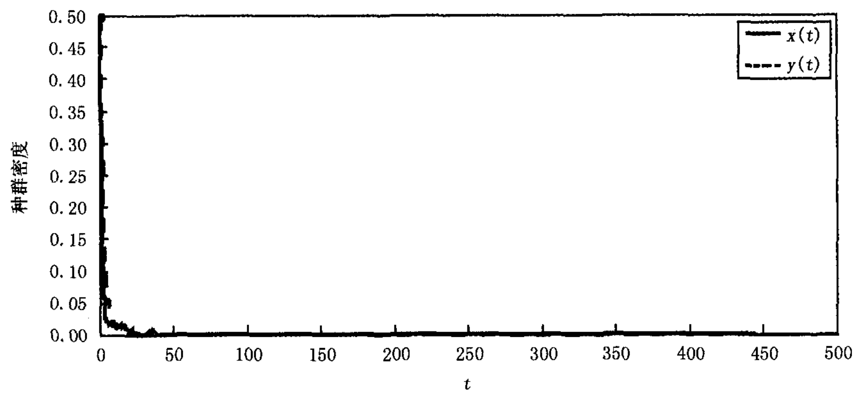

图1 食饵$x(t)$与捕食者$y(t)$均灭绝

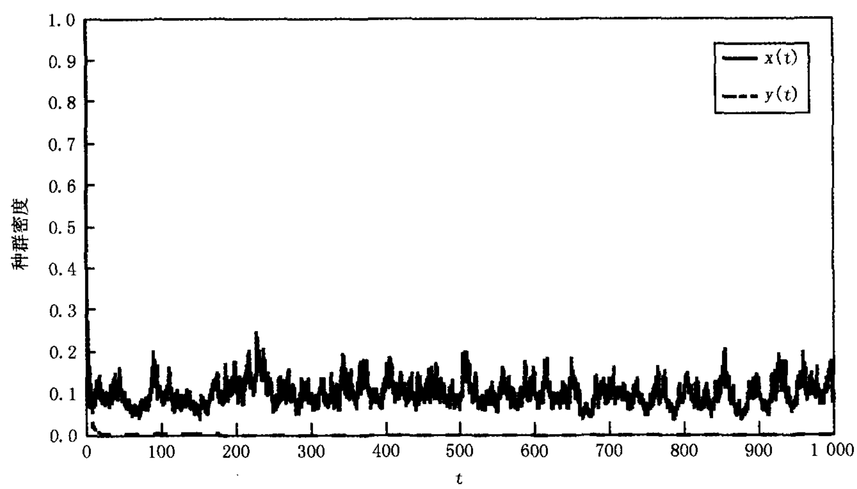

图2 食饵$x(t)$弱持续,捕食者$y(t)$灭绝

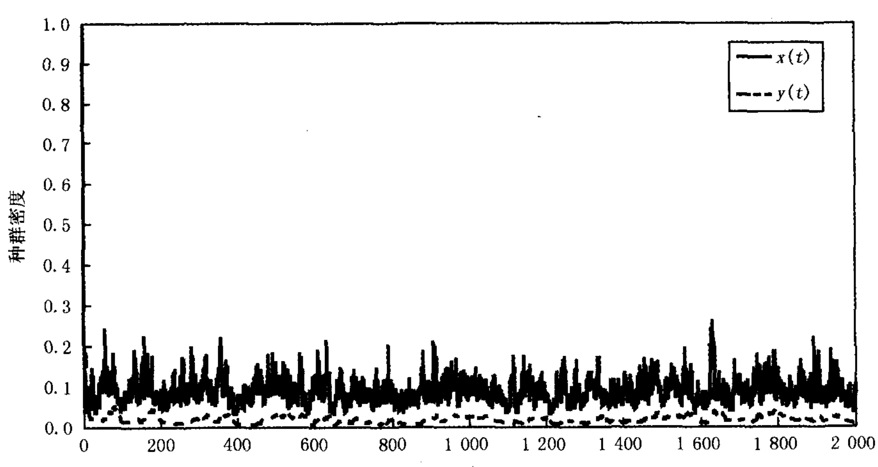

图3 食饵$x(t)$与捕食者$y(t)$均弱持续

然而,仍有一些有趣的问题值得进一步研究. 例如,本文仅仅得到了捕食者种群在平均意义下弱持续的充分条件,而这个条件并不是很理想,也许可以得到捕食者种群在平均意义下弱持续与灭绝的阈值. 此外,还可以研究该模型在平均意义下强持续与全局吸引性等.

参 考 文 献

[1] Rai B, Freedman H, Addicott J. Analysis of three-species models of mutualism in predator-prey and competitive systems[J]. Math Biosci,1983, 65(1):13-50.

[2] Gan W, Lin Z. Coexistence and asymptotic periodicity in a competitor-competitor-mutualist model[J]. J Math Anal Appl,2008,337(2): 1089-1099.

[3] Aguirre P, González-Olivares E, Torres S. Stochastic predator-prey model with Allee effect on prey [J]. Nonlinear Anal-Real,2013,14(1): 768-779.

[4] 李畅通,唐三一. 具有季节性变参数和脉冲的捕食系统的动态行为[J]. 生物数学学报,2013,28(3):499-504.

[5] Golec J, Sathananthan S. Stability analysis of a stochastic logistic model[J]. Math Comput Model,2003,38(5/6):585-593.

[6] Zhu C, Yin G. On competitive Lotka-Volterra model in random environments[J]. J Math Anal Appl,2009,357(1):154-170.

[7] Mao X, Li X. Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka-Volterra competitive system with random perturbation[J]. Discrete Contin Dyn Syst,2009,24(2):523-545.

[8] Saha T, Chakrabarti C. Stochastic analysis of prey-predator model with stage structure for prey[J]. J Appl Math Comput,2011,35(1):195-209.

[9] Liu M, Wang K, Wu Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle [J]. Bull Math Biol,2011,73(9):1969-2012.

[10] Liu M, Wang K. Dynamics of a two-prey one-predator system in random environments[J]. J Nonlinear Sci,2013,23(5):751-775.

[11] Ma Z, Cui G, Wang W. Persistence and extinction of a population in a polluted environment[J]. Math Biosci,1990,101:75-97.

[12] Cheng S R. Stochastic population systems[J]. Stoch Anal Appl,2009,27:854-874.

[13] Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications[M]. Chichester: Horwood Publishing,1997.

[14] Higham D. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations[J]. SIAM Rew,2001,43:525-546.

Persistence and Extinction for a Stochastic Non-autonomous Predation Model with Crowley-Martin Functional Response

Zhao Zhitao, Deng Xiaoyu

(School of Mathematical Sciences, Heilongjiang University, Harbin 150086, China)

Abstract: In this paper, we mainly study the persistence and extinction of a stochastic non-autonomous predation model with Crowley-Martin functional response. Sufficient criteria for extinction, non-persistence in the mean and weak persistence in the mean are established. In addition, some numerical simulations are carried out to support our theoretical results.

Keywords: stochastic non-autonomous predation model; Crowley-Martin functional response; persistence; extinction