

一种基于组合的图像插值方法

康 牧,陈向奎,林 晓

(洛阳师范学院 信息技术学院,河南 洛阳 471022)

摘 要:针对现有的图像插值方法存在的不足,在图像放大中容易出现“锯齿”形边缘和模糊的现象,改变了图像
表示模型,提出了平面插值、球面插值、斜平面插值、双三次插值相结合的图像插值方法,避免了传统的插值方
法用同一个模型逼近所有像素存在的不足.理论分析和实验结果表明了文中所提方法的有效性.

关键词:图像插值;平面插值;球面插值;斜平面插值;双三次插值

中图分类号:TP317.4

文献标志码:A

图像在旋转或缩放大处理中,需要进行插值,图像插值是利用已知像素值估计出中间像素值的过程^[1],
图像插值需要选择一种模型逼近原图像.传统的插值方法有:最近邻插值法、双线性插值法、非均匀插值^[1],
双三次卷积法^[2]、双立方插值法^[3-4]、Lagrange 插值^[5]、线性和非线性插值法^[6]、基于模糊理论的方法^[7]、四
元数插值法^[8-9]、Hermite 插值^[10]、三线性插值^[11]和表面重构插值^[12]等.传统的图像插值方法是整幅的像素
进行同样的插值计算,没有考虑图像的局部特性^[13].本文根据待插入点周围像素的空间位置关系,分别进行
平面插值、球面插值、斜平面插值、双立方插值来进行组合插值,效果优于现有的插值方法.

1 最近邻插值算法、双线性插值算法和双三次插值

最近邻法是一种最简单的插值方法,它是取离待插入点 (x_0, y_0) 最近的那个像素点的值作为最终的像
素值.双线性法的原理是:根据待插入点到周围 4 个像素点的距离不同给出不同的比率,根据该比率,由 4 个
邻域的像素值计算出待插入点的像素值.

简化后的像素插值公式为:

$$g(x, y) = (1 - q)\{(1 - p) \times g([x], [y]) + p \times g([x] + 1, [y])\} + q\{(1 - p) \times g([x], [y] + 1) + p \times g([x] + 1, [y] + 1)\}, \quad (1)$$

其中式(1)中 $g(x, y)$ 是待插入点的像素值, $[x]$ 、 $[y]$ 是取整运算.

双三次插值的原理是:设 x 满足方程

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (2)$$

则 $f(x)$ 的导数为

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad (3)$$

所以

$$f(0) = d, f(1) = a + b + c + d, f'(0) = c, f'(1) = 3a + 2b + c. \quad (4)$$

若连续的 4 个点的像素值分别是: p_0, p_1, p_2, p_3 , 用差分方法求它们的导数, 则

$$f(0) = p_0, f(1) = p_3, f'(0) = \frac{p_2 - p_0}{2}, f'(1) = \frac{p_3 - p_1}{2}. \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)解得:

收稿日期:2014-05-20;修回日期:2014-09-17.

基金项目:国家自然科学基金(U1304616)

作者简介:康 牧(1968—),男,河南伊川人,洛阳师范学院教授,博士,研究方向为模式识别与智能图像处理,E-mail:
kmuwd@sina.com.

$$a = -\frac{1}{2}p_0 + \frac{3}{2}p_1 - \frac{3}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3, b = p_0 - \frac{5}{2}p_1 + 2p_2 - \frac{1}{2}p_3, c = -\frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_2, d = p_1. \quad (6)$$

考虑到连续的 4 个点的像素值,函数 $f(x)$ 改写成 $F(p_0, p_1, p_2, p_3, x)$.

$$F(p_0, p_1, p_2, p_3, x) = \left(-\frac{1}{2}p_0 + \frac{3}{2}p_1 - \frac{3}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3\right)x^3 + \left(p_0 - \frac{5}{2}p_1 + 2p_2 - \frac{1}{2}p_3\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_2\right)x + p_1. \quad (7)$$

则

$$g(x, y) = F(F(p_{00}, p_{01}, p_{02}, p_{03}, x), F(p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}, x), F(p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, x), F(p_{30}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, x), y). \quad (8)$$

2 新算法的提出

本文中对一个像素用如下模型来表示 $(i, j, f(i, j))$, 其中, i 表示像素所在的行, j 表示像素所在的列, $f(i, j)$ 表示该像素的像素值, 这样把一个像素对应到空间坐标系中的一个点 (x, y, z) .

空间中的 4 个点只有两种可能的位置关系: 平面关系或者球面关系.

2.1 空间中的 4 个点在同一平面上

假设待插入点周围 4 个点的坐标分别是: $A(x_0, y_0, z_0), B(x_0, y_0 + 1, z_1), C(x_0 + 1, y_0, z_2)$ 和 $D(x_0 + 1, y_0 + 1, z_3)$, 则线段 AD 和 BC 的中点坐标分别是: $\left(\frac{2x_0 + 1}{2}, \frac{2y_0 + 1}{2}, \frac{z_0 + z_3}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{2x_0 + 1}{2}, \frac{2y_0 + 1}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$, 如果 $z_0 + z_3 = z_1 + z_2$, 则说明线段 AD 和 BC 的中点坐标相同, 也就是它们相交, 而相交的两条直线在同一平面上, 即 A, B, C, D 这 4 个点在同一平面上.

2.2 空间中的 4 个点不在同一平面上就在同一球面上

假设空间中的 4 个点不在同一平面上, 如果能够找到一点 P 到 A, B, C, D 这 4 个点的距离相等, 就说明 A, B, C, D 这 4 个点在同一球面上. 通过如下方法可以找到点 P : 1) 过 $\triangle ABC$ 的外心 O , 做 $\triangle ABC$ 所在平面的垂线 l , 过 $\triangle BCD$ 的外心 O' 做 $\triangle BCD$ 所在平面的垂线 l' , 则 l 上的任一点到 A, B, C 的距离相等, l' 上的任一点到 B, C, D 的距离相等, 如果 l 和 l' 相交, 则它们的交点即为所求的点 P ; 2) 设线段 BC 的中点为 M , 连接 OM 和 $O'M$, 根据外心的性质 $OM \perp BC, O'M \perp BC$, 又因为 $l \perp BC, l' \perp BC$, 所以 BC 垂直 OM 和 l 所在的平面, 且垂直 $O'M$ 和 l' 所在的平面; 同一条直线只能垂直一个平面, 所以 $l, OM, l', O'M$ 在同一平面上; 3) l 和 l' 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的垂线(注: A, B, C, D 这 4 点不在同一平面上), 故 l 和 l' 不平行, 在同一平面上的两条直线不平行就相交, 所以 l 和 l' 相交, 则它们的交点即为所求的点 P . 所以 A, B, C, D 这 4 个点在同一球面上. 如图 1 所示.

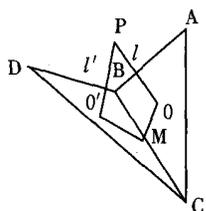


图1 球面上的 4 点



图2 两种斜平面

进行如下具体插值. 将 A, B, C, D 的第 1 个和第 2 个坐标分别减去 x_0 和 y_0 得到的新坐标为: $A'(0, 0, z_0), B'(0, 1, z_1), C'(1, 0, z_2)$ 和 $D'(1, 1, z_3)$. 注: 这种运算属于平移运算, 不会改变 A, B, C, D 这 4 点的位置关系.

2.2.1 当 $z_0 + z_3 = z_1 + z_2$, 说明点 A', B', C', D' 在同一平面上, 将 A', B', C' 这 3 个点的坐标代入空间平面方程

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (9)$$

得到方程组

$$\begin{cases} c \times z_0 + d = 0, \\ b + c \times z_1 + d = 0, \\ a + c \times z_2 + d = 0. \end{cases} \quad (10)$$

解方程组(10)得平面插值公式

$$g(x, y) = z_0 + x \times (z_2 - z_0) + y \times (z_1 - z_0). \quad (11)$$

2.2.2 当点 A', B', C', D' 不在同一平面上,即在同一球面上时,将它们的坐标代入球面方程(12)得(13),

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = R^2, \quad (12)$$

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + (z_0 - Z)^2 = R^2, \\ X^2 + (1 - Y)^2 + (z_1 - Z)^2 = R^2, \\ (1 - X)^2 + Y^2 + (z_2 - Z)^2 = R^2, \\ (1 - X)^2 + (1 - Y)^2 + (z_3 - Z)^2 = R^2. \end{cases} \quad (13)$$

解方程组(13)得球面插值公式

$$g(x, y) = Z \pm \sqrt{R^2 - (x - X)^2 - (y - Y)^2}, \quad (14)$$

其中 R 是球面半径, (X, Y, Z) 是球心坐标. 当 A', B', C', D' 全在球心上面时(14)式中选“+”,全在球心下面时(14)式中选“-”.

2.2.3 当点 A', B', C', D' 有在球心上也有在球心下时:

如果是图2所示的 45° 斜平面且 $y \leq x$ 时,将 $(0, 0, z_0)$ 、 $(1, 0, z_2)$ 和 $(1, 1, z_1)$ 代入(9)式得到相应的插值公式(15)

$$g(x, y) = z_0 + x \times (z_2 - z_0) + y \times (z_1 - z_0), \quad (15)$$

如果是 45° 斜平面且 $y \geq x$ 将 $(-1, 0, z_0)$ 、 $(0, 0, z_2)$ 和 $(0, 1, z_1)$ 代入(9)式得到相应的插值公式(16)

$$g(x, y) = x \times (z_2 - z_0) + y \times (z_1 - z_2) + z_2. \quad (16)$$

说明:此时需要取“左边”或“右边”的像素点,故坐标值可能是“负值”.

如果是 135° 斜平面且 $y \geq 1 - x$ 将 $(1, 0, z_0)$ 、 $(2, 0, z_2)$ 和 $(0, 1, z_1)$ 代入(9)式得到相应的插值公式(17)

$$g(x, y) = x \times (z_2 - z_0) + y \times (z_1 + z_2 - 2z_0) + 2z_0 - z_2. \quad (17)$$

如果是 135° 斜平面且 $y \leq 1 - x$ 将 $(0, 0, z_0)$ 、 $(1, 0, z_2)$ 和 $(0, 1, z_3)$ 代入(9)式得到相应的插值公式(18)

$$g(x, y) = z_0 + x \times (z_2 - z_0) + y \times (z_3 - z_0). \quad (18)$$

如果不是 45° 斜平面也不是 135° 斜平面则按双3次法插值公式(8)进行插值.

3 实验结果及分析

在图像旋转方面对只有水平、垂直、 45° 和 135° 的4条直线组成的图片用不同的插值算法进行逆时针旋转 45° 的实验,结果如图3所示.

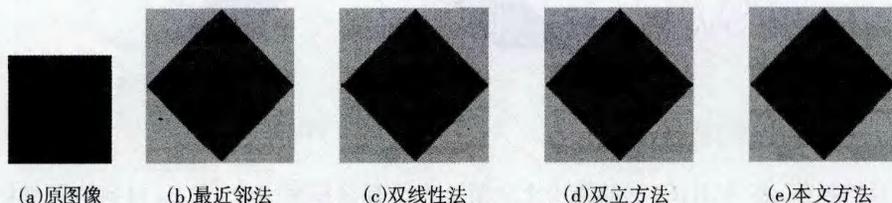


图3 逆时针旋转 45° 的实验结果

从图3中的结果看,原来 45° 的斜线旋转后变为垂直线,原来 135° 的斜线旋转后变为水平线,此时最近邻法中的这两条线体现为一些不连续的散点,双线性法和双立方方法中的这两条线虽然连续,但可以清晰地看到有点状的“颗粒”存在,不是十分“光滑”,而文中算法中的这两条线则非常“光滑”效果相对较好.

在图像放大方面还用上述图片进行实验,结果如图4所示.

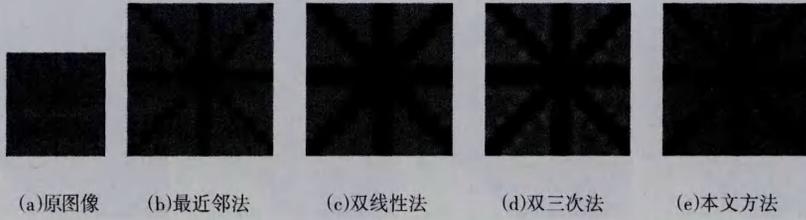


图4 图像放大实验结果1

由于文章的篇幅问题,图片的尺寸不能太大,图 4 中的(b)~(e)是放大以后截取中间的一部分内容,最近邻法的线条颜色“最黑”,其次是双三次法和文中方法,双线性法的颜色“最淡”,从各自的斜线部分来看,最近邻法“锯齿”形边缘非常明显,效果最差,双线性法和双三次法也有“锯齿”形边缘,但效果要比最近邻法好许多,双线性法的斜线不怎么连续,且呈现为“模糊”的小方块,双三次法基本上是连续的,呈现为小球形,看起来好像“糖葫芦”,且边缘处的阴影比背景还要“亮”,因为此图片的背景像素值是‘128’,线条的像素值是‘0’,当待插入点(0.479 452,0.123 288)周围的 16 个点的像素值分别是(0,0,128,128,0,128,128,128,0,0,128,128,128,128,0,128)时,代入(8)式求出的待插入点的像素值是“133.661 622”,超过了‘128’,另外,当待插入点(0.306 220,0.693 712)周围的 16 个点的像素值分别是(255,0,255,255;255,0,255,0;255,0,0,255;0,0,0,0)时,代入(8)式得待插入点的像素值是‘-6.495 781’为负值,如图 5 所示。

而图像的插值是根据待插入点周围的像素值估算待插入点的像素值,它不应该比最大值大,也不应该比最小值小,这说明双三次法存在一定的不足,但总的来说,双三次法比双线性法要好一些,而文中方法的斜线部分是“光滑”的、“连续”的,只是在交叉点处“颜色”稍微“暗淡”一些,与双三次法相同,文中算法该部分就是用双三次法实现的。

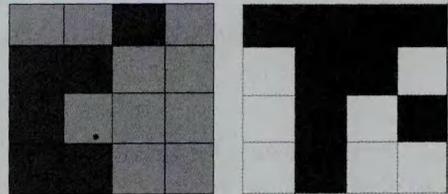


图5 示例图像

为了验证算法的实用性,对 Lenna 图像取出一小块,用不同的算法进行放大,结果如图 6 所示。

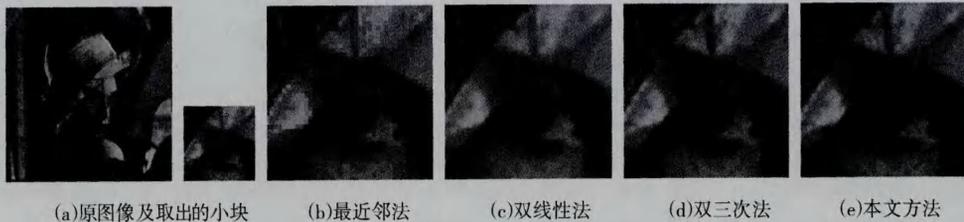
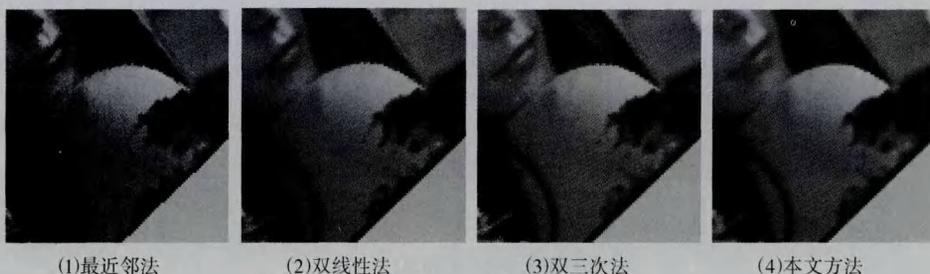


图6 图像放大实验结果2

从实验结果看,最近邻法效果最差,双线性法、双三次法和文中方法效果差别不大,但是从图片左上部帽子的边缘处看,双线性法、双三次法的“锯齿”现象更明显,文中方法还是比较好的。

为了进一步验证算法的实用性,对 Lenna 图像逆时针旋转 43°,然后截取结果图像右下角的部分内容,结果如图 7 所示。从实验结果看,最近邻法效果最差,图像右下角的边缘“锯齿”现象非常严重,双线性法、双三次法的效果差别不大,但是和文中方法相比,人物的“脸部”、“肩部”和“头发”等边缘处“锯齿”现象要明显的多,文中方法的效果还是比较好的。

从像素的 3×3 邻域看,如图 8 所示,过中心点的边缘只有水平、垂直、45°和 135°这 4 个方向,本文方法考虑到了这 4 个方向,另外,对于符合球面且 4 个点都在球心上面或都在球心下面时用球面插值,这是合理的,但是 4 个点有在球心上且有在球心下的情况,用球面法“补”就不合适了,对于不满足上述情况的用双三次法,本文采用组合的方法根据不同的情况选择不同的插值方法,要比传统的方法好;最近邻法最简单,但效



(1)最近邻法

(2)双线性法

(3)双三次法

(4)本文方法

图7 图像逆时针旋转43°的实验结果

果也最差;双线性法考虑到待插入点周围的4个点,效果比最近邻法肯定要好,运算也比较简单,且运算结果不会比4个点中的最大值大,也不会比最小值小;双三次法考虑到待插入点周围的16个点,效果比双线性法肯定要好,但是双三次法的运算量大,且会出现运算值超出范围的现象,当待插入点周围的4个点在同一平面上时,本文方法与双线性法结果一样,双三次法考虑的范围大,运算结果稍有不同。

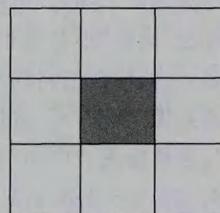


图8 像素的3×3领域

4 结论

本文从避免图像插值时容易产生“锯齿”形边缘和模糊的现象入手,分析了最近邻法、双线性法和双三次法,用空间模型表示图像,采用组合的方法根据不同情况选择不同的插值方法,在图像旋转和图像放大方面均有比较好的效果,实验结果和理论分析说明了文中方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] 余 徽,陈华旺. 图像超分辨率技术研究进展[J]. 光学与光电技术, 2012, 10(5): 45-50.
- [2] 陈玲玲,周 宁,殷 勇,等. 插值方法在光声图像重建中的应用[J]. 计算机与数字工程, 2013, 41(10): 1676-1678.
- [3] 徐彤阳,方 勇. 基于Contourlet变换的双三次插值算法[J]. 计算机工程, 2010, 36(7): 20-22.
- [4] 宋爱斌,马瑞红,要俊杰,等. 双立方插值和二元三次样条插值在心磁图像处理中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(11): 81-85.
- [5] 齐宗会. Lagrange插值算子逼近导数的平均收敛性[J]. 天津理工大学学报, 2013, 29(5): 58-60.
- [6] 闫丽霞,吴 凡. 线性与非线性成像系统下的多光谱重建研究[J]. 计算机应用与软件, 2014, 3(31): 208-210.
- [7] 徐 艳,董江涛,王少华. 基于模糊隶属度的图像空间距离修正插值算法[J]. 物理学报, 2010, 59(11): 7535-7539.
- [8] 苏本跃,盛 敏. 彩色图像缩放的四元数插值算法[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(12): 2067-2070.
- [9] 刘爱东,黄 彬,卢中武,等. 基于四元数的坐标旋转与插值方法研究[J]. 计算机与现代化, 2012(2): 44-49.
- [10] 于媛媛,王兆仲. 一种改进的放大图像边缘修复算法[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(15): 167-171.
- [11] 赵 茹,陶晓杰,王鹏飞,等. 基于图像处理的贴片机自动纠偏系统[J]. 电子设计工程, 2013, 21(3): 154-156.
- [12] ZHANG Ling, LI Xue-mei. Image Interpolation Through Surface Reconstruction[J]. Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing, 2013, 23(4): 25-29.
- [13] 余俊荣,何彦行,潘 丰,等. 一种新的区域图像插值算法[J]. 传感器与微系统, 2014, 33(3): 150-153.

The Combination Methods of Image Interpolation

KANG Mu, CHEN Xiangkui, LIN Xiao

(Academy of Information Technology, Luoyang Normal University, Luoyang 471022, China)

Abstract: The existing image interpolation methods have some shortcomings, i. e., the image blur or saw-tooth shaped edges in enlarged image. In the paper, the image representation model has been modified, and the image interpolation methods are given for the plane interpolation, spherical interpolation, slope interpolation and bicubic interpolation in order to avoid the shortcomings of the traditional interpolation methods in which all the pixels are approached with the same model. Through the theoretical analysis and experimental results, the given methods of image interpolation are shown effectiveness.

Keywords: image interpolation; plane interpolation; spherical interpolation; slope interpolation; bicubic interpolation