

分数阶 Lorenz 超混沌系统的动力学分析与电路设计

陈 恒, 雷腾飞, 王 震, 刘文强

(西京学院 控制工程学院, 西安 710123)

摘 要:针对一类分数阶 Lorenz 超混沌系统,分别从系统的分岔图、Lyapunov 指数图和吸引子相图等角度分析与验证了分数阶 Lorenz 超混沌系统丰富的动力学行为.同时基于整数阶混沌电路的设计策略,设计了模拟电路,实现了分数阶 Lorenz 超混沌系统.最后,通过示波器观察到电路仿真结果与数值仿真结果具有一致性,从而揭示了分数阶超混沌系统的可实现性,也表明了分数阶混沌电路的正确性.

关键词:分数阶超混沌系统;Lyapunov 指数;分岔图;模拟电路

中图分类号:O415.5

文献标志码:A

半个世纪以前,美国著名气象学家 Lorenz 提出第一个混沌模型以来.自此,越来越多的科学工作者进入了混沌系统及应用的研究,特别最近几十年,构建混沌系统方面成果丰硕.许多新的混沌系统产生如 Chen 系统, Lü 系统, Liu 系统等,当然人们对不同系统之间关系也进行了探索与研究,文献[4]证明了 Chen 系统与 Lü 系统具有不光滑等价性.最近二十年,随着分数阶微积分理论应用到实际工程中^[5-7],如长尾运动的地下水传送过程与分数阶导数的性态非常相似网.2002年刘发旺教授等在海水浸入地下水层的研究项目中发现并得到了澳大利亚政府的项目支持^[8].不少学者提出了以整数阶混沌系统为基础的若干种分数混沌系统如分数阶 Chen 系统^[5]分数阶 Lü 系统^[6],分数阶 Lorenz 系统^[7]等.分数阶系统的复杂性不仅与参数有关且与阶数有关,与整数阶系统相比吸引子更为复杂.

最近几年,对于分数阶混沌系统的研究大多集中于研究其同步控制,而研究混沌特性的文献甚少.关于分数阶混沌系统特性分析的文献大多是通过吸引子、相轨迹图数值仿真进行的分析^[9-12].而分岔图、Lyapunov 指数与模拟电路实现是研究混沌动力系统特性常用的方法,据现有文献利用上述方法研究分数阶混沌系统的甚少.分岔图与 Lyapunov 指数可以给出系统随参数具体的变化情况,分析混沌系统的动态特性,从而利用相同找到系统的混沌吸引子和周期吸引子.模拟电路从物理意义上进一步说明混沌的可实现性为分数阶混沌系统的具体应用提供模拟电路模型.

当然,对于三维系统,一些专家学者已进行了相关的研究,如贾红艳等^[13]对一类三维分数阶 Lorenz 混沌系统做了分岔图与 Lyapunov 指数的研究.作者^[14-15]等分别对分数阶 Lü 系统与分数阶 Chen 系统进行了基本动力学分析,至于四维分数阶超混沌系统还未涉及.加之,工程与物理等一些实际系统中大多表现高维性,故开展四维分数阶超混沌系统的动力学研究、对于认识与理解分数阶混沌系统形成机理,以及工程应用具有重要的实际意义.

本文针对一类分数阶 Lorenz 超混沌系统,首先对分数阶 Lorenz 超混沌系统平衡点的稳定性进行了数值分析,然后利用分岔图与 Lyapunov 指数图、相图等,通过理论推导、数值仿真研究了该系统的基本动力学特.最后,基于整数阶混沌电路的设计方法^[16],用模拟电路实现了该分数阶 Lorenz 超混沌系统,通过电路实验结果与数值仿真具有一致性从而说明分数阶 Lorenz 超混沌系统的可实现性也为混沌应用于电子加密以及系统检测提供了参考.

收稿日期:2015-04-15;修回日期:2015-06-17.

基金项目:陕西省教育厅科研计划项目(2013JK1068);陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2014JM4176).

第1作者简介:陈 恒(1965-),男,江苏淮阴人,西京学院副教授,博士后,研究方向:电机控制与混沌控制.

通信作者:雷腾飞, E-mail: leitengfeicanhe@126.com.

1 分数阶 Lorenz 超混沌系统

1.1 典型混沌吸引子

王兴元等^[17]提出了 Lorenz 超混沌系统,本文在此基础上提出了分数阶 Lorenz 超混沌系统的动力学方程

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = a(y-x) + w, \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = cx - y - xz, \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = xy - bz, \\ \frac{d^{q_4} w}{dt^{q_4}} = -yz - w, \end{cases} \quad (1)$$

其中 x, y, z, w 为系统变量, a, b, c 为系统参数, 当 $a = 1.5, b = 3, c = 28, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$. 此时系统(1)存在一个典型的混沌吸引子(如图1所示). 数值计算, 得出系统的4个 Lyapunov 指数为 $\lambda_1 = 0.84, \lambda_2 = 0.17, \lambda_3 = -1.26, \lambda_4 = -2.49$. 由于系统有2个 Lyapunov 指数大于0, 可判定 $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$ 即3.6阶系统(1)具有混沌特性且是超混沌系统.

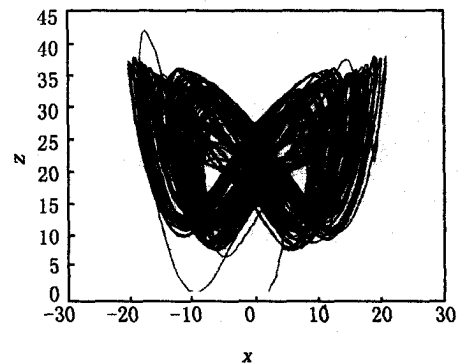


图1 系统吸引子

1.2 平衡点与稳定性

令系统(1)各式右边等于0, 很容易得到系统(1)5个平衡点

$$E_1 = (0, 0, 0, 0),$$

$$E_2 = (0.4038, 10.7240, 1.444, -15.4803),$$

$$E_3 = (-0.4038, -10.7240, 1.444, 15.4803),$$

$$E_4 = (38.6026, -2.1804, 28.0564, 61.1745),$$

$$E_5 = (-38.6026, 2.1804, 28.0564, -61.1745).$$

在平衡点处线性化, 得到其 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

由 $|\lambda I - J| = 0$, 得到对应平衡点 E_1 的特征值: $\lambda_1 = -7.736, \lambda_2 = 5.236, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -1$. 在平衡点 E_2, E_3 采用同样的方法, 可求出 E_2, E_3 具有相同的相应的特征根 $\lambda_1 = -2.4830, \lambda_2 = 0.06800, \lambda_3 = -2.04251 + 38.6118i, \lambda_4 = -2.04251 - 38.6118i$, 计算平衡点 E_4, E_5 具有相同的相应的特征根 $\lambda_1 = -1.994, \lambda_2 = 6.3730, \lambda_3 = -5.4394 + 2.3637i, \lambda_4 = -5.4394 - 2.3637i$.

根据文献[18]可知, 上述所有每个平衡点的特征值不都满足 $|\arg \lambda_i| > \frac{q_i \pi}{2}$, 则知, 上述系统(5)满足存在混沌的必要条件.

2 分数阶 Lorenz 超混沌系统分岔图与 Lyapunov 指数

2.1 分岔图

固定参数 $b = 3, c = 28, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$ 对于参数 a 来说, 在 $a \in (0, 12]$ 系统分岔图如图2(a)所示. 系统存在单周期和双周期、三周期吸引子.

同理, 固定参数 $a = 1.5, c = 28, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$, 改变参数 $b, b \in (0, 10]$ 系统(1)的关于 x 的

分岔图如图2(b)所示.易看出系统是通过倍周期脱离混沌状态.对于分岔图与 Lyapunov 指数图可看具有一致性即在处于混沌时系统具有两个正 Lyapunov 指数.

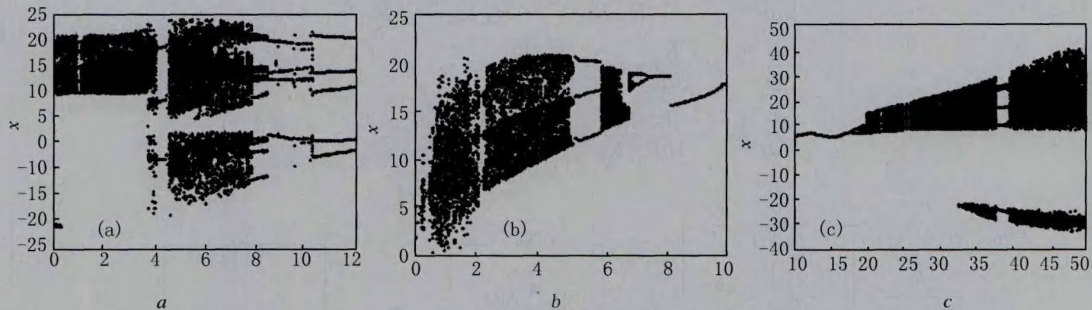


图2 系统(1)的分岔图

2.2 系统 Lyapunov 指数

固定参数 $b = 3, c = 28, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$. 对于参数 a 来说,在 $a \in (0, 12]$, 系统 Lyapunov 指数如图3(a)所示.可以看出图3(a)中混沌状态区域对应着 Lyapunov 指数大于0且有2个系统此时处于超混沌态.

同理,固定参数 $a = 1.5, c = 28, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$, 改变参数 $b, b \in (0, 10]$, 系统 Lyapunov 指数如图3(b)所示.由分岔图如图3(b)与 Lyapunov 指数图可知具有一致性即在处于混沌时系统具有2个正的 Lyapunov 指数.

同理,固定参数 $a = 1.5, b = 3, q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$. 改变参数 $c, c \in (10, 50]$, 系统 Lyapunov 指数如图3(c)所示可以看出系统在 $c = 38$ 左右时候处于周期态,而在 Lyapunov 指数图中最大指数等于0.

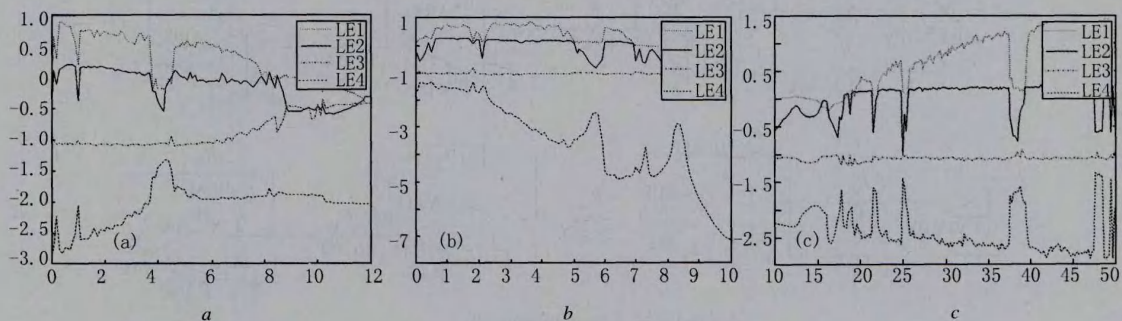


图3 系统(1) Lyapunov 指数图

3 系统电路原理图及方程

利用 Multisim 电路软件,实现 $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.9$ 阶 Lorenz 超混沌系统的电路设计与模拟.

根据混沌系统(1)的动力学方程,进行设计模拟电路,设计电路原理图如图4所示.从图4中可以看出,混沌系统(1)是由各种阻值电阻,电容、运算放大器 LM741、乘法器 AD633 以及 0.95 阶模块电路来实现的^[16].因 LM741 与 AD633 允许工作电压为 ± 15 V 的限制,根据 x, y, z, w 的幅值,将幅值缩小为 1/10.

运用 Multisim10 对电路进行仿真,将水平轴线进行调整,结果在泰克示波器上实时显示,如图5所示.

根据电路图,写出其相应的振荡电路方程为

$$\begin{cases} \frac{d^{0.9}x}{dt^{0.9}} = \frac{R_{13}}{R_{12}}y - \frac{R_{13}R_{16}}{R_{11}R_{15}}x - \frac{R_{13}R_{16}}{R_{17}R_{15}}w, \\ \frac{d^{0.9}y}{dt^{0.9}} = -\frac{R_{16}R_{24}}{10R_{15}R_{23}}xz - \frac{R_{24}R_{16}}{R_{22}R_{15}}x + \frac{R_{24}}{R_{21}}y, \\ \frac{d^{0.9}z}{dt^{0.9}} = \frac{R_{33}}{10R_{31}}xy - \frac{R_{33}R_{36}}{R_{32}R_{35}}z, \\ \frac{d^{0.9}w}{dt^{0.9}} = \frac{R_{43}R_{46}}{10R_{41}R_{45}}yz - \frac{R_{43}R_{46}}{R_{42}R_{45}}w. \end{cases} \quad (3)$$

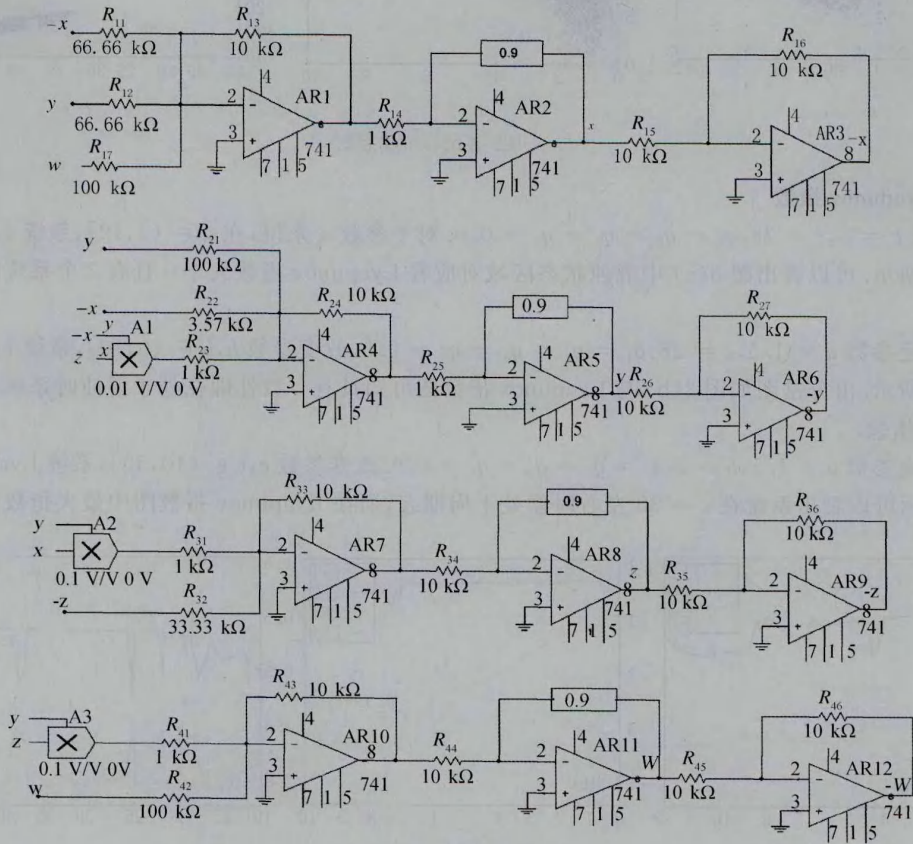


图4 系统(1)的电路原理图

4 结论

本文分析了同量分数阶 Lorenz 超混沌系统的混沌特性, 计算并绘制了该分数阶超混沌系统的 Lyapunov 指数图、分岔图、相图等, 验证了该分数阶超混沌吸引子的存在性. 最后, 并构造硬件模拟电路, 用 Multisim 软件对硬件电路进行仿真从物理意义上进一步验证了分数阶 Lorenz 超混沌系统的混沌特性. 上述研究结果表明, 在更低维的 Lorenz 系统中也存在着混沌特性. 本文的研究工作或可以为混沌应用提供更为丰富的分数阶模型, 为分数阶超混沌系统的应用提供技术上的准备.

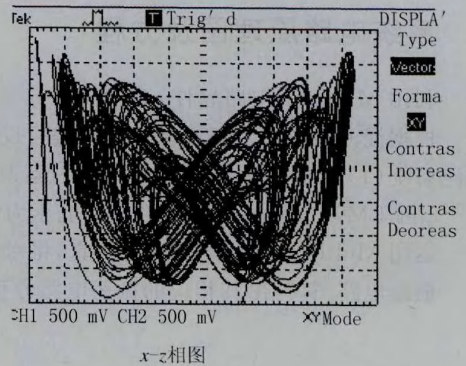


图5 系统(3)的相图

参 考 文 献

- [1] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. J Atmos. Science, 1963, 20: 130-141.
- [2] CHEN G, UETA T. Yet another chaotic attractor[J]. International Journal of Bifurcation and chaos, 1999, 9(7): 1465-1466.
- [3] LU J H, CHEN G R. A new chaotic attractor coined [J]. International Journal of Bifurcation and chaos, 2002, 12(3): 659-661.
- [4] 康宁, 孔祥星, 侯振挺等两个重要混沌系统的等价性证明[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(9): 1113-1118.
- [5] LU J G. Nonlinear observer design to synchronize fractional-order chaotic system via a scalar transmitted signal[J]. Physica A, 2006, 359: 107-118.
- [6] WU X J. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization[J]. Chinese physics, 2007, 16(7): 392-401.
- [7] 崔力, 欧青立, 徐兰霞. 分数阶 Lorenz 超混沌系统及其电路仿真[J]. 电子测量技术, 2011, 23(5): 13-16.
- [8] LIU F, TURMER I, ANH V. An Unstructured Mesh Finite Volume Method for Modeling Saltwater Intrusion in to Coastal Aquifers [J]. Korean J Comput & Appl Math, 2002, 9(2): 391-07.
- [9] 马铁东, 江伟波, 浮洁, 等. 一类分数阶混沌系统的自适应同步[J]. 物理学报, 2012, 61(16): 90-95.
- [10] 王震, 孙卫. 分数阶 Chen 混沌系统同步及 Multisim 电路仿真[J]. 计算机工程与科学, 2012, 34(1): 187-192.
- [11] 闵富红, 余杨, 葛曹君. 超混沌分数阶 LV 系统电路实验与追踪控制[J]. 物理学报, 2009, 58(3): 1456-1460.
- [12] 梁松, 张云雷, 吴然超. 分数阶多时滞混沌系统的同步[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2015, 43(2): 25-29.
- [13] 贾红艳, 陈增强, 薛薇. 分数阶 Lorenz 系统的分析及电路实现[J]. 物理学报, 2013, 62(14): 140503-1-7.
- [14] 雷腾飞, 陈恒, 尹劲松, 等. 分数阶 Lü 混沌系统的分析与电路模拟[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2015, 41(2): 35-41.
- [15] 陈恒, 雷腾飞, 王震, 等. 分数阶 Chen 混沌系统的动力学分析与电路实现[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2015, 39(3): 208-215.
- [16] 王发强, 刘崇新. 分数阶临界混沌系统及电路实验的研究[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 392-3927.
- [17] 王兴元, 王明军. 超混沌 Lorenz 系统[J]. 物理学报, 2007, 56(9): 5136-5141.
- [18] 王明军, 王兴元. 分数阶 Newton-Leipnik 系统的动力学分析[J]. 物理学报, 2010, 59(3): 1583-1591.

Dynamics Analysis and Circuit Implementation for the Fractional-order Lorenz Hyperchaotic System

CHEN Heng, LEI Tengfei, WANG Zhen, LIU Wenqiang

(School of Control Engineering, Xijing University, Xi'an 710123, China)

Abstract: This paper, for a fractional order Lorenz hyperchaotic system, is to analyze and verify the fractional order Lorenz hyperchaotic system dynamics behavior based on such numerical simulations as the bifurcation diagram, the Lyapunov index figure and attractor phase diagram. The analog circuit was designed and the fractional order Lorenz chaotic system is realized on the basis of integer order chaotic circuit design strategy. Finally, the consistence of numerical simulation results and circuit simulation results observed through the oscilloscope reveals the realizability of hyperchaotic system of fractional order, and the validity of the fractional order chaotic circuit.

Keywords: fractional-order hyperchaotic system; Lyapunov exponent; bifurcation diagram; simulation circuit