文章编号:1000-2367(2020)06-0025-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.06.004

一类非瞬时脉冲积分-微分方程 mild 解的存在性

汪婷婷,范虹霞

(兰州交通大学 数理学院,兰州 730070)

摘 要:在无穷区间上研究一类具有非瞬时脉冲和非局部条件的抽象积分-微分方程 mild 解的存在性,利用算子半群理论、非紧性测度和 Darbo's 不动点定理建立了该方程解的存在性结论,在一定程度上推广和发展了此类方程已有的结果.

关键词:非瞬时脉冲;mild 解;发展算子;非紧性测度;不动点

中图分类号:O175.15 **文献标志码**:A

脉冲微分方程描述的是系统在某一时刻状态突发改变的动力学过程,在很多自然科学模型中扮演着十分重要的角色.近几十年来,大多数学者热衷于瞬时脉冲微分方程的基础理论研究,并在其解的存在性方面取得了很多成果[1-5].

1988 年,文献[6]在 Banach 空间 X 中讨论了下列泛函积分-微分方程

$$\begin{cases} u'(t)+A(t)u(t)=f(t,u(t))+\int_{t_0}^{t} q(t-s)g(s,u(s))\mathrm{d}s, t>t_0\geq 0, \\ u(t_0)=u_0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,其中线性算子 $-A(t)$ 是 X 中解析半群的无穷小生成元,非线性算子 $f:[0,+\infty)\times X\to X$ 和非线性映射 g 分别满足 Hölder 条件和 Lipschitz 条件.

2014 年,文献[7]在方程(1)的基础上,利用不动点定理和紧半群的性质证明了具有时滞的分数阶瞬时脉冲微分方程 mild 解的存在性和唯一性.随后,文献[8]在没有要求半群紧性的条件下,利用非紧性测度的方法给出了 Banach 空间中具有有限个瞬时脉冲的分数阶积分-微分方程初值问题局部 mild 解和全局 mild 解的存在性.

事实上,经典的瞬时脉冲微分方程并不能很好地刻画某些科学规律的动力学行为,例如药物在人体内的吸收、扩散和代谢过程.文献[9]基于药物的动力学背景,提出了一类新的非瞬时脉冲发展方程模型

$$\begin{cases} u'(t)=Au(t)+f(t,u(t)), t\in(s_i,t_{i+1}], i=0,1,\cdots,N, \\ u(t)=g_i(t,u(t)), t\in(t_i,s_i], i=1,2,\cdots,N, \\ u(0)=x_0, \end{cases} \tag{2}$$

并讨论了该模型 mild 解和古典解的存在性.

之后,非瞬时脉冲微分方程受到国内外学者的广泛关注[10-13].2015 年,文献[11]研究了具有记忆型的非瞬时脉冲发展方程周期边值问题,并利用 Banach 压缩映像原理和 Schaefer's 不动点定理证明了方程 mild 解的存在性和唯一性.2016 年,文献[12]利用发展算子的紧性和不动点定理研究了无界区间上具有非瞬时脉冲的时滞泛函微分方程有界 mild 解和强解的存在性.

受上述文献的启发,本文主要在 Banach 空间 X 中,研究下列具有无限多个非瞬时脉冲的积分-微分方程

收稿日期:2019-08-18;**修回日期**:2020-06-06.

基金项目:国家自然科学基金(11561040)

作者简介:汪婷婷(1992—),女,甘肃镇原人,兰州交通大学硕士研究生,研究方向为非线性发展方程,E-mail:wtt0217440@163.com.

通信作者:范虹霞(1978—),女,甘肃榆中人,兰州交通大学教授,研究方向为非线性发展方程,E-mail:ffls0217@126.com.

非局部问题

$$\begin{cases} u'(t)+A(t)u(t)=f(t,u(t))+\int_0^t q(t-s)g(s,u(s))\mathrm{d}s, t\in\bigcup_{i=0}^{\infty}(s_i,t_{i+1}], \\ u(t)=h_i+E(t,t_i)\int_{t_i}^t k_i(s,u(s))\mathrm{d}s, t\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(t_i,s_i], \\ u(0)+\varphi(u)=u_0 \end{cases} \tag{3}$$

mild 解的存在性,其中 $A:[0,+\infty)\to L(X,X)$, $-A(t)$ 生成 X 中一致有界发展算子 $E(t,s)$, $\{A(t):0\le t<\infty\}$ 的定义域 $D(A)$ 在 X 中稠密,且与 t 无关.$s_0:=0<t_1<s_1<t_2<\cdots<t_i<s_i<\cdots$, $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$. 令 $J=[0,T)$, $0<T\le\infty$. $f,g:[0,+\infty)\times X\to X$ 为连续函数,$q:J\to X$ 连续且 $q\in L^1(J,R^+)$. φ, $k_i(i=1,2,\cdots)$ 是给定的函数,满足一定的条件,$h_i,u_0\in X$.

本文所研究的具有记忆型非瞬时脉冲和非局部条件的抽象积分-微分方程,时间区间的无界性和脉冲个数的无限性推广和完善了已有文献的结果.有关 $A(t)$生成的双参数发展算子的相关性质及该类方程解的存在性结果可参考文献[14-16].

1 预备知识

设 X 是按范数 $\|\cdot\|$ 构成的Banach空间,θ 表示 X 中的零元素.$C(J,X)$ 是由 $J\to X$ 的全体连续函数构成的 Banach 空间,赋有范数 $\|u\|_C=\sup\limits_{t\in J}\|u(t)\|$.

令 $PC(J,X)=\{u:J\to X:u$ 在 $t\ne t_k$ 处连续,$u(t_k^-)=u(t_k)$ 且 $u(t_k^+)$ 存在,$k=1,2,\cdots\}$,则 $PC(J,X)$ 是按范数 $\|u\|_{PC}=\sup\limits_{t\in J}\|u(t)\|$ 构成的Banach空间.用 $BPC(J,X)$ 表示 $PC(J,X)$ 中有界函数构成的子空间,赋有范数 $\|u\|_\infty=\sup\limits_{t\in J}\|u(t)\|$.

设 $-A(t)$ 生成的一致有界发展算子$\{E(t,s)\}_{0\le s\le t}$ 满足下列性质:

(a)当 $t\ge 0$ 时,$E(t,t)=I$;(b)当 $0\le s\le\tau\le t$ 时,$E(t,\tau)E(\tau,s)=E(t,s)$;(c)当 $0\le s\le t$ 时,映射$(t,s)\to E(t,s)$ 是强连续的;(d)当 $t>s$ 时,$\dfrac{\partial E(t,s)}{\partial t}=-A(t)E(t,s)$;(e)当 $s<t$ 时,$\dfrac{\partial E(t,s)}{\partial s}=E(t,s)A(s)$;(f)对任意的 $0\le s\le t<+\infty$,存在常数 $M\ge 1$,使得 $\|E(t,s)\|\le M$.

命题 1[14] 对任意的 $s>0$,算子族$\{E(t,s):t>s\}$ 关于 t 按一致算子拓扑连续.

类似于文献[10]中 mild 解的定义,给出下列定义.

定义 1 函数 $u\in BPC(J,X)$ 称为问题(3)的一个 mild 解,若 $u(0)=u_0-\varphi(u)$,且满足积分方程

$$u(t)=\begin{cases} E(t,0)(u_0-\varphi(u))+\int_0^t E(t,s)[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}s, t\in[0,t_1], \\ h_i+E(t,t_i)\int_{t_i}^t k_i(s,u(s))\mathrm{d}s, t\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(t_i,s_i], \\ E(t,s_i)h_i+E(t,t_i)\int_{t_i}^{s_i}k_i(s,u(s))\mathrm{d}s+\int_{s_i}^t E(t,s)[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}s, t\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(s_i,t_{i+1}]. \end{cases}$$

设$\alpha(\cdot)$表示 Banach 空间 X 中有界集的 Kuratowski 非紧性测度,有关 Kuratowski 非紧性测度的定义和性质,可参考文献[15].

引理 1[13] 设 X 是 Banach 空间,U 是 X 中的有界子集 $D=\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U$,则存在可数集 $D=\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U$,使得 $\alpha(U)\le 2\alpha(D)$.

引理 2[13] 设 X 和 E 是 Banach 空间,$Q:D(Q)\subset E\to X$ 是 Lipschitz 连续的且 Lipschitz 常数为 L,则对任意有界集 $V\subset D(Q)$,有 $\alpha(Q(V))\le L\alpha(V)$.

引理 3[15] 设 X 是 Banach 空间,$U\subset C(J,X)$ 是有界且等度连续集,则 $\alpha(U(t))$ 在 J 上连续,并且 $\alpha(U)=\max\limits_{t\in J}\alpha(U(t))$.

引理 4[15] 设 X 是 Banach 空间,$D=\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(J,X)$ 是有界可数集,则 $\alpha(D(t))$ 在 X 上 Lebesgue

可积，并且 $\alpha\left(\left\{\int_J u_n(t)\mathrm{d}t \mid n \in N\right\}\right) \leq 2\int_J \alpha(D(t))\mathrm{d}t$.

本文主要结果的证明要用到下面的定义和定理.

定义 2[17]　设 E_1 和 E_2 是实 Banach 空间，$D \subset E_1$，设 $A: D \to E_2$ 连续有界，如果存在常数 $k \geq 0$，使得对任何有界集 $S \subset D$，都满足 $\alpha(A(S)) \leq k\alpha(S)$，则称 A 是 D 上的 k- 集压缩映像；特别地，$k < 1$ 时的 k- 集压缩映像称为严格集压缩映像.

定理 A[17]　令 D 是 E 中有界凸闭集(D 不一定有内点)，$A: D \to D$ 是严格集压缩映像，则 A 在 D 中必有不动点.

2　主要结果

下面将列出本文要用到的假设条件.

(H1) $f: J \times X \to X$ 连续，并且存在连续非减函数 $\psi: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 及函数 $\phi \in L^1(J, R^+)$，使得 $\| f(t,x) \| \leq \phi(t)\psi(\| x \|), \forall t \in J, x \in X$.

(H2) $g: J \times X \to X$ 连续，并且存在非负有界函数 $g_1(t), g_2(t)$，使得

$$\| g(t,s) \| \leq g_1(t)\| x \| + g_2(t), \forall t \in J, x \in X.$$

令 $g_1 := \sup\limits_{t\in J} g_1(t), g_2 := \sup\limits_{t\in J} g_2(t)$.

(H3) $\varphi: PC(J,X) \to X$ 连续，并且存在常数 $L_\varphi > 0$，使得

$$\| \varphi(x) - \varphi(y) \| \leq L_\varphi \| x - y \|, \forall x, y \in PC(J,X).$$

(H4) $k_i: [t_i, s_i] \times X \to X$ 连续，并且存在常数 $L_{k_i} > 0 (i = 1,2,\cdots)$ 及有界函数 $\omega_i(t) (i = 1,2,\cdots)$，使得 $\| k_i(t,x) - k_i(t,y) \| \leq L_{k_i} \| x - y \|$ 和 $\| k_i(t,x) \| \leq \omega_i(t), \forall t \in [t_i, s_i], x, y \in X$.

令 $M^i := \sup\limits_{t\in[t_i,s_i], i=1,2,\cdots} \omega_i(t) < \infty$.

(H5)对任意 $R > 0$，存在正常数 N_1 和 N_2，使得对任意有界的可数集 $D \subset B_R = \{u \in BPC: \| u \|_\infty \leq R\}$，有 $\alpha(f(t,D)) \leq N_1\alpha(D), \alpha(g(t,D)) \leq N_2\alpha(D), \forall t \in (s_i, t_{i+1}], i = 0,1,2,\cdots$.

定理 1　设条件(H1)—(H5)成立，如果

$$\eta := M\max\{L_\varphi + q^* g_1(t_{i+1} - s_i), K^* + 4L\} < i, i = 0,1,2,\cdots,$$

那么问题(3)在 $BPC(J,X)$ 中至少有一个 mild 解.

证明　令 $B_r = \{u \in BPC(J,X): \| u \|_\infty \leq r\}$，其中 $r > 0$ 为常数.定义算子 $F: PC(J,X) \to PC(J,X)$ 如下：

$$(Fu)(t) = (F_1u)(t) + (F_2u)(t), \tag{4}$$

其中

$$(F_1u)(t) = \begin{cases} E(t,0)(u_0 - \varphi(u)), t \in [0, t_1], \\ h_i + E(t,t_i)\int_{t_i}^t k_i(s,u(s))\mathrm{d}s, t \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(t_i, s_i], \\ E(t,s_i)h_i + E(t,t_i)\int_{t_i}^{s_i} k_i(s,u(s))\mathrm{d}s, t \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(s_i, t_{i+1}]. \end{cases} \tag{5}$$

$$(F_2u)\begin{cases} \int_{s_i}^t E(t,s)[f(s,u(s)) + \int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}s, t \in \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(s_i, t_{i+1}], \\ 0, \text{其他}. \end{cases} \tag{6}$$

易见问题(3)的 mild 解等价于算子 F 的不动点.

设 $u \in B_r$，令 $q^* = \sup\limits_{t\in J}\int_0^t \| q(t-s) \| \mathrm{d}s$.

由(H1)可得 $\int_0^t \| f(s,u(s)) \| \mathrm{d}s \leq \psi(r)\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s = \psi(r)\| \phi \|_1 := \overline{M}$.

由(H2)可得：$\int_0^t\left[\int_0^s\|q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))\|\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s\le\int_0^t\left[\int_0^s\|q(s-\tau)\|\cdot(g_1\|u\|+g_2)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s\le$

$$\int_0^t(g_1r+g_2)\left[\int_0^s\|q(s-\tau)\|\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s\le q^*(g_1r+g_2)t.$$

下面利用预备知识中的定理 A 来证明算子 F 至少有一个不动点.

第 1 步,证明存在常数 $r>0$,使得 $F(B_r)\subset B_r$.

如若不然,对任意的 $r>0$,存在 $u_r\in B_r,t_r\in J$,使得 $\|Fu_r\|_\infty>r$.

情形 1 $t_r\in[0,t_1]$,由(4)式及条件(H1),(H2)和(H3)有

$$\|(Fu_r)(t_r)\|\le\|E(t_r,0)\|\cdot\|u_0-\varphi(u_r)\|+\int_0^{t_r}\|E(t_r,s)\|\cdot\|f(s,u_r(s))+$$
$$\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u_r(\tau))\mathrm{d}\tau\|\mathrm{d}s\le M(\|u_0\|+\|\varphi(\theta)\|+L_\varphi\|u_r-\theta\|)+M\overline{M}+$$
$$Mq^*(g_1r+g_2)t_r\le M[\|u_0\|+\|\varphi(\theta)\|+L_\varphi r+\overline{M}+q^*(g_1r+g_2)t_1].$$

情形 2 $t_r\in(t_i,s_i],i=1,2,\cdots$,由(4)式及条件(H4)有

$$\|(Fu_r)(t_r)\|\le\|h_i\|+\|E(t_r,t_i)\|\int_{t_i}^{t_r}\|k_i(s,u_r(s))\|\mathrm{d}s\le$$
$$\|h_i\|+MM_i(s_i-t_i)\le M\|h_i\|+MM_i(s_i-t_i).$$

情形 3 $t_r\in(s_i,t_{i+1}],i=1,2,\cdots$,由(4)式及条件(H1),(H2)和(H4)有

$$\|(Fu_r)(t_r)\|\le\|E(t_r,s_i)\|\cdot\|h_i\|+\|E(t_r,t_i)\|\cdot\int_{t_i}^{s_i}\|k_i(s,u_r(s))\|\mathrm{d}s+$$
$$\int_{s_i}^{t_r}\|E(t_r,s)\|\cdot\|f(s,u_r(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u_r(\tau))\mathrm{d}\tau\|\mathrm{d}s\le$$
$$M\|h_i\|+MM_i(s_i-t_i)+M\overline{M}+Mq^*(g_1r+g_2)(t_{i+1}-s_i).$$

于是,$r<\|Fu_r\|_\infty\le M(\|u_0\|+\|\varphi(\theta)\|+\|h_i\|+L_\varphi r+\overline{M})+M[M_i(s_i-t_i)+q^*(g_1r+g_2)(t_{i+1}-s_i)]$,$i=0,1,\cdots$.上式两边同时除以 r,并令 $r\to+\infty$,可得 $1<M[L_\varphi+q^*g_1(t_{i+1}-s_i)]$,$i=0,1,2,\cdots$,矛盾.

第 2 步,证明 $F_1:B_r\to B_r$ Lipschitz 连续.

情形 1 $t\in[0,t_1]$,$u,\nu\in B_r$,由(5)式及条件(H3)有

$$\|(F_1u)(t)-(F_1\nu)(t)\|\le\|E(t,0)\|\cdot\|\varphi(u)-\varphi(\nu)\|\le ML_\varphi\|u-\nu\|_\infty.$$

情形 2 $t\in(t_i,s_i],i=1,2,\cdots,u,\nu\in B_r$,由(5)式及条件(H4)有

$$\|(F_1u)(t)-(F_1\nu)(t)\|\le\|E(t,t_i)\|\cdot\int_{t_i}^{t}\|k_i(s,u(s))-k_i(s,\nu(s))\|\mathrm{d}s\le$$
$$ML_{k_i}(s_i-t_i)\|u-\nu\|_\infty.$$

情形 3 $t\in(s_i,t_{i+1}],i=1,2,\cdots,u,\nu\in B_r$,由(5)式及条件(H4)有

$$\|(F_1u)(t)-(F_1\nu)(t)\|\le\|E(t,t_i)\|\cdot\int_{t_i}^{s_i}\|k_i(s,u(s))-k_i(s,\nu(s))\|\mathrm{d}s\le$$
$$ML_{k_i}(s_i-t_i)\|u-\nu\|_\infty.$$

所以 $\|F_1u-F_1\nu\|_\infty\le MK^*\|u-\nu\|_\infty$,其中 $K^*=\max\{L_\varphi,\max\limits_{i=1,2,\cdots}[L_{k_i}(s_i-t_i)]\}$.

第 3 步,证明 F_2 在 B_r 上连续.

设 $\{u_n\}$ 是 $BPC(J,X)$ 中的一个序列,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$.由函数 f 和 g 的连续性可知,对 $\forall s\in J$,有

$$\lim_{n\to\infty}f(s,u_n(s))=f(s,u(s)),\lim_{n\to\infty}g(s,u_n(s))=g(s,u(s)).$$

所以,当 $n\to\infty$ 时,有 $\sup\limits_{s\in J}\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\|\to0,\sup\limits_{s\in J}\|g(s,u_n(s))-g(s,u(s))\|\to0$.

对任意固定的 $t\in(s_i,t_{i+1}],s\in[s_i,t],i\in N,u_n,u\in B_r$,由(6)式可得

$$\|(F_1u_n)(t)-(F_2u)(t)\|\le\int_{s_i}^{t}\|E(t,s)\|\cdot\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\|\mathrm{d}s+$$

$$\int_{s_i}^{t}\|E(t,s)\|\cdot[\int_0^s\|q(s-\tau)\|\cdot\|g(\tau,u_n(\tau))-g(\tau,u(\tau))\|d\tau]ds\le M(t_{i+1}-s_i)\sup_{s\in J}\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\|+Mq^*(t_{i+1}-s_i)\sup_{s\in J}\|g(\tau,u_n(\tau))-g(\tau,u(\tau))\|.$$

则当 $n\to\infty$ 时,有 $\|F_2u_n-F_2u\|_\infty\to 0$,所以 F_2 在 B_r 上连续.

第 4 步,证明 $F_2:B_r\to B_r$ 等度连续.

情形 1　$s_i\le\tau_1<\tau_2\le t_{i+1}$,$i=0,1,2,\cdots$,$u\in B_r$,由(6)式有

$$\|(F_2u)(\tau_2)-(F_2u)(\tau_1)\|=\|\int_{s_i}^{\tau_2}E(\tau_2,s)[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds-\int_{s_i}^{\tau_1}E(\tau_1,s)[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|\le\|\int_{s_i}^{\tau_1}(E(\tau_2,s)-E(\tau_1,s))[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|+\|\int_{\tau_1}^{\tau_2}E(\tau_2,s)\cdot[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|=I_1+I_2,$$

其中 $I_1:=\|\int_{s_i}^{\tau_1}(E(\tau_2,s)-E(\tau_1,s))[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|$,

$$I_2:=\|\int_{\tau_1}^{\tau_2}E(\tau_2,s)[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|.$$

下面验证当 $u\in B_r,\tau_2\to\tau_1$ 时,$I_i\to 0,i=1,2$.

设 $\tau_1>s_i$,$\varepsilon>0$ 充分小,则由条件(H1),(H2)可得

$$I_1\le\int_{s_i}^{\tau_1-\varepsilon}\|E(\tau_2,s)-E(\tau_1,s)\|\cdot\|f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau\|ds+\int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1}\|E(\tau_2,s)-E(\tau_1,s)\|\cdot\|f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau\|ds\le\int_{s_i}^{\tau_1-\varepsilon}\|f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau\|ds\cdot\sup_{s\in[s_i,\tau_1-\varepsilon]}\|E(\tau_2,s)-E(\tau_1,s)\|+2M[\int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1}\|f(s,u(s))\|ds+\int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1}q^*(g_1r+g_2)ds]\le[\overline{M}+q^*(g_1r+g_2)(\tau_1-\varepsilon)]\cdot\sup_{s\in[s_i,\tau_1-\varepsilon]}\|E(\tau_2,s)-E(\tau_1,s)\|+2M[\psi(r)\int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1}\phi(s)ds+q^*(g_1r+g_2)\varepsilon].$$

$$I_2=\|\int_{\tau_1}^{\tau_2}E(\tau_2,s)[f(s,u(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|\le M\psi(r)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\phi(s)ds+Mq^*(g_1r+g_2)(\tau_2-\tau_1).$$

注意到 $\phi\in L^1(J,R^+)$,ε 充分小,并结合命题 1 可知,当 $\tau_2\to\tau_1$ 时,$I_i\to 0,i=1,2$.

情形 2　$t_i<\tau_1<\tau_2\le s_i$,$i=1,2,\cdots$,$u\in B_r$,由(6)式有 $\|(F_2u)(\tau_2)-(F_2u)(\tau_1)\|=0$. 所以,对任意的 $u\in B_r,t\in J$,当 $\tau_2\to\tau_1$ 时,$\|(F_2u)(\tau_2)-(F_2u)(\tau_1)\|\to 0$.$F_2$ 是等度连续的.

第 5 步,证明 $F:B_r\to B_r$ 是严格集压缩映像.

对任意的有界集 $D\subset B_r$,由引理 1 可知,存在可数集 $D_0=\{u_n\}\subset D$,使得 $\alpha(F_2(D))\le 2\alpha(F_2(D_0))$. 因为 $F_2(D_0)\subset F_2(B_r)$ 有界且等度连续,所以由引理 3 可知 $\alpha(F_2(D_0))=\max\limits_{t\in[s_i,t_{i+1}],i=0,1,2,\cdots}\alpha(F_2(D_0)(t))$. 对每一个 $t\in[s_i,t_{i+1}]$,$i=0,1,2\cdots$,由引理 4 可得

$$\alpha(F_2(D_0))=\alpha(\{\int_{s_i}^{t}E(t,s)[f(s,u_n(s))+\int_0^s q(s-\tau)g(\tau,u_n(\tau))d\tau]ds\})\le 2M\int_{s_i}^{t}[N_1\alpha(D_0)+q^*N_2\alpha(D_0)]ds\le 2M(N_1+q^*N_2)(t_{i+1}-s_i)\alpha(D_0)\le 2M(N_1+q^*N_2)(t_{i+1}-s_i)\alpha(D).$$

所以，$\alpha(F_2(D)) \leq 2\alpha(F_2(D_0)) \leq 4M(N_1 + q^* N_2)(t_{i+1} - s_i)\alpha(D)$.

记 $L := \max\limits_{i=0,1,2,\cdots} (N_1 + q^* N_2)(t_{i+1} - s_i)$，则 $\alpha(F_2(D)) \leq 4ML\alpha(D)$.

由引理 2,并结合第 2 步可知,对任意有界集 $D \subset B_r$,有 $\alpha(F_1(D)) \leq MK^* \alpha(D)$. 所以,

$$\alpha(F(D)) \leq \alpha(F_1(D)) + \alpha(F_2(D)) \leq MK^* \alpha(D) + 4ML\alpha(D) = M(K^* + 4L)\alpha(D).$$

由定义 2 可知,$F: B_r \to B_r$ 是严格集压缩映像,故算子 F 至少有一个不动点 $u \subset B_r$,即问题(3)至少有一个 mild 解.

参 考 文 献

[1] DIALLO M A,EZZINBI K,SÈNE A.Impulsive integro-differential equations with nonlocal conditions in Banach spaces[J].Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute,2017,171:304-315.

[2] LIU Z H,LIANG J T.A class of boundary value problems for first-order impulsive integro-differential equations with deviating arguments[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2013,237:477-486.

[3] ANGURAJ A,KARTHIKEYAN P,RIVERO M,et al.On new existence results for fractional integro-differential equations with impulsive and integral conditions[J].Computers and Mathematics with Applications,2014,66:2587-2594.

[4] CUI J,YAN L T.Existence results for impulsive neutral second-order stochastic evolution equations with nonlocal conditions[J].Mathematical and Computer Modelling,2013,57:2378-2387.

[5] LIAO J W,CHEN F L,HU S Q.Existence of solutions for fractional impulsive neutral functional differential equations with infinite delay[J].Neurocomputing,2013,122:156-162.

[6] HEARD M L,RANKIN S M.A semi-linear parabolic integro-differential equation[J].Journal of Differential Equations,1988,71:201-233.

[7] CHAUHAN A,DABAS J.Local and global existence of mild solution to an impulsive fractional functional integro-differential equation with nonlocal condition[J].Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2014,19:821-829.

[8] GOU H D,LI B L.Local and global existence of mild solution to impulsive fractional semilinear integro-differential equation with noncompact semigroup[J].Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2017,42:204-214.

[9] HERNÁNDEZ E,O'REGAN D.On a new class of abstract impulsive differential equations[J].Proceedings of American Mathematical Society,2013,141(5):1641-1649.

[10] PIERRI M,O'REGAN D,ROLNIK V.Existence of solutions for semi-linear abstract differential equations with not instantaneous impulses[J].Applied Mathematics and Computation,2013,219:6743-6749.

[11] YU X L,WANG J R.Periodic boundary value problems for nonlinear impulsive evolution equations on Banach spaces[J].Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2015,22:980-989.

[12] COLAO V,MUGLIA L,XU H K.An existence result for a new class of impulsive functional differential equations with delay[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2016,441:668-683.

[13] MERAY A,PANDEY D N.Existence of mild solutions for fractional non-instantaneous impulsive integro-differential equations with nonlocal conditions[J/OL].[2019-07-16].https://www.onacademic.com/detail/journal_1000041580736999_4d8a.html.

[14] FU X L,LIU X B.Existence of periodic solutions for abstract neutral non-autonomous equations with infinite delay[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2007,325:249-267.

[15] CHEN P Y,ZHANG X P,LI Y X.Study on fractional non-autonomous evolution equations with delay[J].Computers and Mathematics with Applications,2017,73:794-803.

[16] PAZY A.Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M].New York:Springer-Verlag,1983.

[17] 郭大钧.非线性泛函分析[M].3 版.北京:高等教育出版社,2015:165.

Existence of mild solutions for a class of non-instantaneous impulsive integro-differential equations

Wang Tingting,Fan Hongxia

(School of Mathematics and Physics,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou 730070,China)

Abstract: This paper studies the existence of mild solutions of an abstract integro-differential equation with non-instantaneous impulses and nonlocal conditions on an unbounded interval.The existence of solutions of the equation is established by operator semi-group theory,measure of non-compactness and Darbo's fixed point theorem,which extends and develops the existing results of such equations to some extent.

Keywords: non-instantaneous impulse;mild solution;evolution operator;measure of non-compactness;fixed point

[责任编校 陈留院 赵晓华]