文章编号:1000－2367(2017)05－0014－05 **DOI**:10.16366/j.cnki.1000－2367.2017.05.003

有界平衡域上一类螺旋映射的增长定理

丁仲荐

(河南大学 数学与统计学院,河南 开封 475001)

摘　要:给出有界平衡域上一类螺旋映射的参数表示,作为应用建立了其增长定理,进一步给出了这类映射即星形映射的一个刻画.所讨论的域是非常广泛的,包括了复椭球和四类典型域,这些结果涵盖了先前已知的结果.

关键词:平衡域;螺旋映射;增长定理

中图分类号:O174 **文献标志码**:A

单复变数的几何函数论有着悠久的历史,有着极其优美的结果和丰富的内容.在二十世纪,许多重要的数学家都为此做出了重要的贡献.目前可以见到大量优秀的著作叙述这方面的工作,见文献[1].

将单复变数几何函数论中的丰硕成果如何推广到多复变数,这是一个十分自然的课题.单复变几何函数论中哪些结果在多复变数时依然成立,哪些结果在多复变数中已不再成立,研究这些问题对于揭示单复变数与多复变数本质上的区别有着重要的意义.因此这是一项很有意义的工作.但遗憾的是,在多复变数的情形,在许多相应的问题上,都可以举出反例说明其并不成立.

历史上,首先考虑将单复变数的几何函数论推广到多复变数中去的数学家也许是 H. Cartan. 1933 年,他在为 P. Montel 的著作 *Lecons sur les Fonctions Univalents ou Mutivalents* 所写的后序中指出:即使像"在单位圆上单叶函数的展开式的系数的模是有界的"这样很基本的结果在多复变数中也是不成立的.同时他还指出,增长定理(growth theorem)和掩盖定理(covering theorem)在多复变数中也是不成立的.因此他建议考虑正规化双全纯映射族的子族,比如:凸映射,星形映射以及其他映射类.在其之后,不少数学家致力于这个领域的研究,但是总的来说进展不大.直到 1988 年龚升,FitzGerald 等一批国内外数学家的工作问世以后,多复变数的几何函数论才有了长足的发展.对一些较为基本的问题给予了回答或解决.他们与其合作者做了很多有影响的工作,详细的内容可参见文献[2].这些文献已成为这个领域内的基本文献.

在单复变几何函数论中,若 f 为单位圆盘 Δ 上的正规化单叶解析函数,则有如下经典的增长定理:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{|z|}{(1-|z|)^2},z\in\Delta.$$

早在 1933 年 H. Cartan 就指出:在多复变数中,即使是在单位球或多圆柱上,上述结论对一般的双全纯映射也不再成立.因此他建议在一些特殊的映射类上考虑,例如凸映射,星形映射以及螺旋映射等.

对于 $\mathbf{C}^n$ 中单位球上的星形映射,首先给出相应增长定理的是文献[3].随后,文献[2,4－6]分别在 B^p,四类典型域,Banach 单位球以及有界星形圆型域上给出了星形映射的相应结果.对于 $\mathbf{C}^n$ 中单位球上的螺旋映射,最早给出一些相应结果的是文献[7].最近,文献[8]利用从属链的方法对文献[7]中的结果重新加以证明.本文目的是在有界平衡域上讨论一类螺旋映射,给出这一类螺旋映射的增长定理.

1 定义与引理

定义 1 设 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的域,称 Ω 为圆型的,若对 $\forall z\in\Omega,\theta\in\mathbf{R}$,有 $e^{i\theta}z\in\Omega$.称 Ω 为星形的(相对于原

收稿日期:2016-12-07;**修回日期**:2017-06-07.

基金项目:国家自然科学基金(11471098)

作者简介(通信作者):丁仲荐(1965－),男,河南确山人,河南大学副教授,主要从事数学的教学与科研工作,E-mail:610911168@qq.com.

点),若对 $\forall z\in\Omega, t\in[0,1]$,有 $tz\in\Omega$. 称 Ω 是平衡域,若 Ω 既是星形的,又是圆型的.

定义 2　Ω 到 $\mathbf{C}^n$ 的全纯映射的全体记为 $H(\Omega)$. 设 $f\in H(\Omega)$.

(1) 若 f 的 Jacobi 方阵 $J_f(z)=(\frac{\partial f_j}{\partial z_k bbf}(z))_{1<j,k<n}$ 对 $\forall z\in\Omega$ 非奇异,称 f 为 Ω 上的局部双全纯映射. 若 f^{-1} 存在且在 $f(\Omega)$ 上全纯,则称 f 为 Ω 上的双全纯映射.

(2) 称 f 为正规化的,若 $f(0)=0, J_f(0)=I$(单位方阵).

(3) 映射 $f\in H(\Omega)$ 称为星形的,若 $f(0)=0, f(\Omega)$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中的星形域.

(4) 映射 $v\in H(\Omega)$ 称为 Schwarz 映射,如果对任意的 $z\in\Omega$,有 $\rho(v(z))\leq\rho(z)$.

设 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界平衡域,其上的 Minkowski 泛函 ρ 定义如下:

$$\rho(z)=\inf\{t>0: t^{-1}z\in\Omega\}.$$

于是 $\Omega=\{z\in\mathbf{C}^n:\rho(z)<1\}$. 对 $0<r<1$,记 $\Omega_r=\{z\in\mathbf{C}^n:\rho(z)<r\}$.

由文献[5]中的引理 3.1(ii),容易得到 $\rho(z)$ 的下列性质.

$$2\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)z=\rho(z),\ \forall z\in\mathbf{C}^n, \tag{1}$$

$$2\frac{\partial\rho}{\partial z}(z_0)z_0=1,\ \forall z_0\in\partial\Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}(\lambda z)=\frac{\partial\rho}{\partial z}(z),\ \forall\lambda\in[0,\infty), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}(e^{i\theta}z)=e^{-i\theta}\frac{\partial\rho}{\partial z}(z),\ \forall\theta\in\mathbf{R}. \tag{4}$$

上述等式除去一个低维集外在 $\mathbf{C}^n$ 中成立.

记 $\mathcal{N}=\{g\in H(\Omega): g(0)=0, \mathrm{Re}\langle g(z),\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle 0, z\in\Omega\backslash\{0\}\}$. 和 $\mathcal{M}=\{g\in\mathcal{M}: J_g(0)=I\}$. 对 $h\in\mathcal{N}$,记 $k=\inf\{\mathrm{Re}\langle J_h(0)z,\frac{\partial\rho^2}{\partial\bar{z}}(z)\rangle:\rho(z)=1\}$ 和 $m=\sup\{\mathrm{Re}\langle J_h(0)z,\frac{\partial\rho^2}{\partial\bar{z}}(z)\rangle:\rho(z)=1\}$.

引理 1　设 $h\in\mathcal{N}$,则对 $\forall z\in\Omega\backslash\{0\}$,有 $\mathrm{Re}\langle J_h(0)z,\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle>0$, 且

$$\frac{1-\rho(z)}{1+\rho(z)}\mathrm{Re}\langle J_h(0)z,\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle\leq\mathrm{Re}\langle h(z),\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle\leq\frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}\mathrm{Re}\langle J_h(0)z,\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle. \tag{5}$$

证明　固定 $z\in\Omega\backslash\{0\}$,对 $\xi\in\Delta$,定义 $g(\xi)=\langle h(\frac{z}{\rho(z)}\xi),\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle$.

易见 $p(\xi)=\frac{g(\xi)}{\xi}$ 在 Δ 上解析,且 $p(0)=\langle J_h(0)\frac{z}{\rho(z)},\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle$. 固定 $\xi\neq 0$,由于 $\langle\frac{z}{\rho(z)}\xi, 2\frac{|\xi|}{\xi}(z)\rangle=|\xi|$,因此 $\mathrm{Re}\langle h(\frac{z}{\rho(z)}\xi),\frac{|\xi|}{\xi}\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle>0$.

由调和函数的极小值原理得到 $\mathrm{Re}p(\xi)>0, \xi\in\Delta$. 对 $p(\xi)$ 应用经典的不等式,并令 $\xi=\rho(z)$, 得

$$\frac{1-\rho(z)}{1+\rho(z)}\mathrm{Re}\langle J_h(0)z,\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle\leq\mathrm{Re}\langle h(z),\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle\leq\frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}\mathrm{Re}\langle J_h(0)z,\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle.$$

证毕.

由引理 1 知 $0\leq k\leq m<\infty$.

引理 2　设 $h\in\mathcal{N}, z\in\Omega\backslash\{0\}$. 若 $v(t)=v(z,t)$ 是下面初值问题的解,

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-h(v), v(0)=z,$$

其中 $t\geq 0$. 则

$$\frac{\rho(v(z,t))}{(1-\rho(v(z,t)))^2}\leq e^{-kt}\frac{\rho(z)}{(1-\rho(z))^2} \tag{6}$$

以及

$$e^{-mt}\frac{\rho(z)}{(1+\rho(z))^2}\leq\frac{\rho(v(z,t))}{(1+\rho(v(z,t)))^2}\tag{7}$$

对任意 $t\geq 0$ 成立.

证明 由(5)式得

$$k\frac{1-\rho(z)}{1+\rho(z)}\rho^2(z)\leq\operatorname{Re}\langle h(z),\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(z)\rangle\leq m\frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}\rho^2(z),\tag{8}$$

其中 $z\in\Omega\backslash\{0\}$. 对任意 $0\leq t<t'$,

$$|\rho(v(t))-\rho(v(t'))|\leq\rho(v(t)-v(t'))=\rho\left(\int_t^{t'}\frac{\mathrm{d}v(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right)\leq$$

$$\int_t^{t'}\rho\left(\frac{\mathrm{d}v(s)}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=\int_t^{t'}\rho(-h(v(s)))\mathrm{d}s.$$

由于 $\rho(v(t))$ 是连续的,上式表明 $\rho(v(t))$ 是绝对连续的. 故 $\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}$ a. e. 存在于 $[0,\infty)$,因而在 $[0,\infty)$ 上可积,且

$$\rho(v(z,t))=\rho(z)+\int_0^t\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

由(1)式,直接计算知

$$\frac{\partial\rho^2}{\partial z\partial\bar z}(z)z=\frac{\partial\rho^2}{\partial\bar z}(z),\operatorname{Re}\frac{\partial\rho^2}{\partial z\partial z}(z)z=0,$$

于是

$$\frac{\partial\rho^2(v(t))}{\partial t}=\left(\frac{\partial\rho^2}{\partial z\partial\bar z}(v(t))\frac{\partial v(t)}{\partial t}v(t)+\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(v(t))\frac{\partial v(t)}{\partial t}\right)=\left(\langle\frac{\partial\rho^2}{\partial z\partial\bar z}(v(t))\frac{\partial v(t)}{\partial t},\overline{v(t)}\rangle+\right.$$

$$\left.\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(v(t))\frac{\partial v(t)}{\partial t}\right)=\left(\langle\frac{\partial v(t)}{\partial t},\frac{\partial\rho^2}{\partial z\partial\bar z}(v(t))\overline{v(t)}\rangle+\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(v(t))\frac{\partial v(t)}{\partial t}\right)=$$

$$\left(\langle\frac{\partial v(t)}{\partial t},\frac{\partial\rho^2}{\partial\bar z}(v(t))\rangle+\frac{\partial\rho^2}{\partial z}(v(t))\frac{\partial v(t)}{\partial t}\right)=2\operatorname{Re}\langle\frac{\partial v(t)}{\partial t},\frac{\partial\rho^2}{\partial\bar z}(v(t))\rangle.$$

因此

$$\rho(v(t))\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}=\operatorname{Re}\langle\frac{\partial v(t)}{\partial t},\frac{\partial\rho^2}{\partial\bar z}(v(t))\rangle,\ \text{a. e. }t\in[0,\infty),$$

此即

$$\rho(v(t))\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}=-\operatorname{Re}\langle h(v(t)),\frac{\partial\rho^2}{\partial\bar z}(v(t))\rangle,\ \text{a. e. }t\in[0,\infty).$$

由(8)式得

$$-k\frac{1-\rho(v(t))}{1+\rho(v(t))}\rho(v(t))\geq\operatorname{Re}\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}\geq-m\frac{1+\rho(v(t))}{1-\rho(v(t))}\rho(v(t)),$$

因此

$$\int_0^t\frac{1+\rho(v(t))}{\rho(v(t))(1-\rho(v(t)))}\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}\mathrm{d}t\leq\int_0^t-k\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^t\frac{1-\rho(v(t))}{\rho(v(t))(1+\rho(v(t)))}\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}\mathrm{d}t\geq\int_0^t-m\mathrm{d}t.$$

由于

$$\int_0^t\frac{1+\rho(v(t))}{\rho(v(t))(1-\rho(v(t)))}\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}\mathrm{d}t=\int_{\rho(z)}^{\rho(v(t))}\frac{1+x}{x(1-x)}\mathrm{d}x=$$

$$\lg\rho(v(t))-2\lg(1-\rho(v(t)))-(\lg\rho(z)-2\lg(1-\rho(z))),$$

以及

$$\int_0^t\frac{1-\rho(v(t))}{\rho(v(t))(1+\rho(v(t)))}\frac{\partial\rho(v(t))}{\partial t}\mathrm{d}t=\int_{\rho(z)}^{\rho(v(t))}\frac{1-x}{x(1+x)}\mathrm{d}x=$$

$$\lg\rho(v(t))-2\lg(1+\rho(v(t)))-(\lg\rho(z)-2\lg(1+\rho(z))),$$

由上式立即得到(6)式和(7)式.

下面的定义是由文献[9]首先给出的.

定义 3　设 $f \in H(\Omega)$ 是正规化双全纯映射. A 为 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^n$ 的有界线性算子,满足

$$\inf\{\mathrm{Re}\langle Az, \frac{\partial \rho^2}{\partial z}(z)\rangle : \rho(z) = 1\} > 0. \tag{9}$$

若对任意 $t \geq 0$,有

$$e^{-At} f(\Omega) \subset f(\Omega),$$

其中 $e^{-At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k$,称 f 为相对于 A 的螺旋映射.

引理 3　设 A 满足(9)式,f 为相对于 A 的螺旋映射. 记 $v(z,t) = f^{-1}(e^{-At} f(z))$. 则对任意 $z \in \Omega \backslash \{0\}$ 和任意 $\delta > 0$,存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\rho(f(v(z,t)) - v(z,t)) \leq e^{-kt}\delta$$

对任意 $t \geq t_0$ 成立.

证明　固定 $z \in \Omega \backslash \{0\}$,$\delta > 0$. 由于 f 是正规化全纯映射,故存在 0 的一个小邻域 $U = U(\delta)$ 使得对任意 $y \in U$, 有

$$\rho(f(y) - y) \leq \delta \rho(y) \frac{(1-\rho(z))^2}{\rho(z)}.$$

记 $h(z) = J_f^{-1}(z) A f(z)$. 则由文献[9] 中的定理 11 知 $h \in \mathcal{N}$,使得 $J_h(0) = A$,且

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v), v(z,0) = z.$$

由(9)式知 $k > 0$. 故由(6) 式知存在 $t_0 > 0$ 使当 $t > t_0$ 时,$v(z,t) \in U$. 因此

$$\rho(f(v(z,t)) - v(z,t)) \leq \delta \rho(v(z,t)) \frac{(1-\rho(z))^2}{\rho(z)} \leq e^{-kt}\delta.$$

证毕.

2　增长定理

由螺旋映射的定义可知, $f:\Omega \to \mathbf{C}^n$ 是星形映射当且仅当 f 是相对于 I 的螺旋映射. 人们自然要问:是否星形映射一定是螺旋映射?

例 1　设 $n = 2$,$\Omega = B^2$,$f(x) = (z_1 + a z_2{}^2, z_2)'$,则

(1)$f(z)$ 是 B^2 上的星形映射当且仅当 $|a| \leq 3\sqrt{3}/2$;

(2)$f(z)$ 是 B^2 上的螺旋映射当且仅当 $|a| < +\infty$.

由此可见,对一般的螺旋映射来说,增长定理并不成立. 然而利用引理 2 和引理 3,得到下面的定理.

定理 1　设 $A = aI$,其中 $\mathrm{Re}a > 0$. 若 f 是 Ω 上相对于 A 的螺旋映射则

$$\frac{\rho(z)}{(1+\rho(z))^2} \leq \rho(f(z)) \leq \frac{\rho(z)}{(1-\rho(z))^2}.$$

证明　任给 $z \in \Omega \backslash \{0\}$,$\delta > 0$. 记 $v(z,t) = f^{-1}(e^{-At} f(z))$. 由引理 3 可知存在 $t_0 > 0$,使得当 $t \geq t_0$ 时,

$$\rho(f(v(z,t)) - v(z,t)) \leq e^{-\mathrm{Re}(at)}\delta.$$

于是

$$\rho(e^{At}(f(v(z,t)) - v(z,t))) = e^{\mathrm{Re}(at)} \rho(f(v(z,t)) - v(z,t)) \leq \delta.$$

这表明 $\lim_{t \to \infty} e^{tA} v(z,t) = f(z)$. 利用(6)式得到

$$\lim_{t \to \infty} \rho(e^{tA} v(z,t)) = \lim_{t \to \infty} e^{\mathrm{Re}(at)} \rho(v(z,t)) \leq \lim_{t \to \infty} \frac{(1-\rho(v(z,t)))^2 \rho(z)}{(1-\rho(z))^2} = \frac{\rho(z)}{(1-\rho(z))^2}.$$

此即表明

$$\rho(f(z)) \leq \frac{\rho(z)}{(1-\rho(z))^2}.$$

同理可证 $\frac{\rho(z)}{(1+\rho(z))^2} \leq \rho(f(z))$. 证毕.

注记 1 在定理 1 中令 $a=1$,可以得到 Ω 上正规化双全纯星形映射的增长定理[5].

参 考 文 献

[1] Gong S. TheBieberbachconjecture[M]. Providence: International Press Company, 1999.

[2] Gong S. Convex mappings and starlike mappings in several complex variables[M]. Beijing: science press, 1999.

[3] Barnard R W, FitzGerald C H, Gong S. The growth and 1/4 theorems for starlike mappings in $\mathbf{C}^n$ [J]. Pacif J Math, 1991, 150(1): 13-22.

[4] Liu T S. The growth theorems covering theorems and distortion theorems for biholomorphic mappings on classical domains[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 1989.

[5] Liu T S, Ren G B. The growth theorem for starlike mappings on bounded starlike circular domains[J]. Chin Ann of Math, 1998, 19B(4): 401-408.

[6] Dong D Z, Zhang W J. The growth and 1/4 theorems for starlike mappings in a Banach space[J]. Chin Ann of Math, 1992, 13A(4): 417-423.

[7] Liu H. The growth and 1/4 theorems for spirallike mappings in l^p, B_p and inner product spaces[J]. Chin Quar Jo Math, 1992, 7(3): 48-52.

[8] Hamada H, Kohr G. Subordination chains and the growth theorems of spirallike mappings[J]. Mathematica, 2000, 2: 153-161.

[9] Suffridge T J. Starliknessconvexity and other geometric properties of holomorphic mappings in higher dimensions[J]. Lecture Notes in Math, 1977, 599: 146-159.

The Growth Theorem of a Kind of Spirallike Mappings on Bounded Balanced Pseudoconvex Domain

Ding Zhongjian

(College of Mathematics and statistics, Henan University, Kaifeng 475001, China)

Abstract: In this paper, the parametric representation of a kind of spirallike mappings is given on bounded balanced pseudoconvex domain . As a direct application the growth theorem is set up. Moreover, a character of starlike mappings and a kind of spirallike mappings is obtained. In this paper, the domain is very broad, including the ellipsoid and four types of classical domains.

Keywords: balanced pseudoconvex domain; spirallike mapping; growth theorem

[责任编辑 陈留院]