文章编号:1000－2367(2019)03－0047－08　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2019.03.008

霍奇星算子与外微分算符的组合规律

彭俊金

(贵州师范大学 物理与电子科学学院;贵州省射电天文数据处理重点实验室,贵阳 550001)

摘　要:系统探讨了霍奇星算子与外微分算符作用于任意微分形式场时二者的一般组合规律.首先,找到了保持微分形式场的次不变的 2 个组合算符,并通过二者的线性组合得到了一个新算符.其次,当由任意数目的霍奇星算子与外微分算符进行组合时,导出了所有形式上彼此互异的组合算符的统一表达式.这些表达式由单个霍奇星算子与外微分算符以及二者的任选 2 个的非零组合构成.在此基础上,分析了所有算符之间的相互作用关系,并根据这些算符对微分形式的次的改变情况,对它们进行了具体分类.最后,作为一个应用,详细讨论了如何由次相同的微分形式的线性组合来构造电磁场的麦克斯韦方程.

关键词:霍奇星算子;外微分算符;麦克斯韦方程;广义相对论;微分几何

中图分类号:O412.1　　**文献标志码**:A

由著名数学家嘉当(Cartan)率先倡导的微分形式[1](differential form)的现代观念,在几何与拓扑等数学领域以及物理学的诸多领域有着非常广泛的应用,尤其在数学物理与理论物理等物理学分支.微分形式已成为研究广义相对论、规范场论(如电磁理论与 Yang-Mills 理论等)、超引力以及弦理论等极其有效的工具.

对微分形式的操作过程中,离不开楔形积(wedge product)、霍奇星算子(Hodge star operator,用 $\star$ 表示)与外微分算符(exterior differentiation operator,由 d 表示)3 种基本操作.楔形积易于理解,因此本文只关注最后 2 种算符.在此对二者的具体定义与主要性质进行简单介绍,部分详细过程可参考文献[1－5]等.

由著名数学家霍奇(Hodge)首次引入的 Hodge 星算子是一个定义在有限维定向向量空间的外代数[3]上的线性映射,在单个 Hodge 星算子的作用下,维度为 n 的微分流形上的 p-形式(p-form)可转换成一个($n-p$)-形式,但是,偶数个霍奇星算子的连续作用不改变微分形式场的次,也不改变其分量的大小,仅有可能整体上带来一个负号.另一方面,外微分算符是作用于函数的普通微分算符在微分形式场上的延展,也常称为外导数(exterior derivative).当它作用于 p 次微分形式时相当于把各个分量分别看成一个函数并对其进行偏微分,生成($p+1$)次形式,连续 2 次作用于微分形式的结果恒等于零.

归因于霍奇星算子与外微分算符自身属性的限制,二者中的任意一个连续 2 次及以上作用于任意微分形式场时,前者在偶数次作用的前提下几乎对这些场不带来影响,后者直接为零.因此,孤立地考虑二者中的某一个,终究对场的改变有限.为了拓展这 2 类算符对微分形式的作用效果,一条有效的途径就是考虑二者的所有可能的非零组合,如大家熟知的余微分算子[3]以及 Hodge-Laplace 算子等.那么,为了找到这些独立且非零的组合算符并探讨它们的重要性质,需要回答一系列关键性问题,具体包括:“任意数目的霍奇星算子与外微分算符彼此之间究竟有怎样的一般组合规律?”“所有这些组合操作的可能的统一表达式到底是什么?”“所有算符之间有什么样的相互作用关系?以及它们作用于任意微分形式场时有何结果?”等等.本文拟将逐一解决这些问题.

1　保持微分形式场的次不变的组合算符

本节将详细探讨如何把 Hodge 对偶星算子与外微分算符作用于微分形式来构造分量大小有变化但微分形式的次仍然不变的新的量.在此基础上,给出 2 个以及 3 个 Hodge 星算子与外微分算符组合的一般规律.

考虑让 Hodge 星算子 $\star$ 与外微分算符 d 分别作用于 n 维时空流形上的任意 p 次微分形式场 A 来给出它们的定义,微分形式 A 记为

收稿日期:2018-12-07;修回日期:2019-03-15.

基金项目:国家自然科学基金(11865006;11505036)

作者简介(通信作者):彭俊金(1981－),男,湖南邵阳人,贵州师范大学副教授,博士,研究方向为引力物理与相对论天体物理,E-mail: jjpeng@gznu.edu.cn.

$$A = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \cdots \mu_p} \mathrm{d}x^{\mu_1 \cdots \mu_p}. \tag{1}$$

采用通常做法,上式以及下文中,把对偶坐标基底的楔形积 $\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}$ 简写为 $\mathrm{d}x^{\mu_1 \cdots \mu_p}$,$A_{\mu_1 \cdots \mu_p}$ 就是一个 p-阶完全反对称量.为了方便于讨论,在后文把霍奇星算子与外微分算符分别记为 $* = P_1$ 与 $\mathrm{d} = P_2$.二者简称为基本算符,并约定 P 的下脚指标"1"与"2"依次对应于算符"$*$"与"d".P_1 与 P_2 作用于 p-形式场 A 分别得到其对偶微分形式 $*A = P_1 A$ 以及 $\mathrm{d}A = P_2 A$,由分量形式表示为

$$(P_1 A)_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_q} = \frac{1}{p!} A^{\nu_1 \cdots \nu_p} \tilde{\varepsilon}_{\nu_1 \cdots \nu_p \mu_1 \cdots \mu_q}, (P_2 A)_{\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_p} = (p+1) \partial_{[\mu_0} A_{\mu_1 \cdots \mu_p]}. \tag{2}$$

这里以及下文中,设定整数 $q = n - p$,n- 阶完全反对称的协变 Levi-Civita 张量定义为 $\tilde{\varepsilon}_{1 \cdots n} = | g |^{(1/2)}$,$g = \det(g_{\nu\mu})$ 为时空度规张量的行列式.上式第 2 个方程中的偏微分 ∂ 可替换成通常的协变导数算符 ∇,并满足 $\mathrm{d}^2 A = 0$,即,任意微分形式经过外微分算符的连续 2 次作用后始终等于零.很显然,$P_1 P_2 \neq P_2 P_1$.

首先,考虑如何把 Hodge 对偶星算子与外微分算符或二者的组合作用于 p-形式 A 来构造分量大小有变化的新的 p 次形式场.有 4 种的作用于 A 的基本组合模式,相应可得 4 种操作:

$$P_{12} = * \mathrm{d}, P_{21} = \mathrm{d} *, P_{11} = **, P_{22} = \mathrm{dd}. \tag{3}$$

P_{12} 与 P_{21} 作用于 p 次微分形式场分别得到 $(q-1)$ 与 $(q+1)$ 次形式,二者的次相差为 2.不难验证,P_{12} 与 P_{21} 互易且相继作用于 A 等于零,这样,

$$P_{12} P_{21} = P_{21} P_{12} = 0. \tag{4}$$

由 P_{11} 作用于 A,借助 2 个 Levi-Civita 张量的乘积关系式以及推广的 Kronecker delta 符号部分或全部指标缩并的关系式

$$\tilde{\varepsilon}^{\nu_1 \cdots \nu_n} \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \cdots \mu_n} = \mathrm{sgn}(g) \delta^{\nu_1 \cdots \nu_n}_{\mu_1 \cdots \mu_n}, \delta^{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-m} \nu_1 \cdots \nu_m}_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-m} \mu_1 \cdots \mu_m} = (n-m)! \delta^{\nu_1 \cdots \nu_m}_{\mu_1 \cdots \mu_m}, \tag{5}$$

(推广的 Kronecker delta 符号定义为 $\delta^{\nu_1 \cdots \nu_m}_{\mu_1 \cdots \mu_m} = m! \delta^{[\nu_1}_{\mu_1} \cdots \delta^{\nu_m]}_{\mu_n}$,而逆变 Levi-Civita 张量约定为 $\tilde{\varepsilon}^{1 \cdots n} = \mathrm{sgn}(g) | g |^{(-1/2)}$,这里 $x > 0$ 时符号函数 $\mathrm{sgn}(x) = 1$,$x < 0$ 时 $\mathrm{sgn}(x) = -1$,欲了解 2 式的更多详情,参见文献[6].)得到

$$P_{11}^{2k} A = A, P_{11}^{2k+1} A = \mathrm{sgn}(g)(-1)^{pq} A. \tag{6}$$

除非特别说明,上式以及下文中 k 默认为非负整数.(6) 式表明 P_{11} 不改变微分形式的次,并且,当时空流形的维度 n 为奇数且 $\mathrm{sgn}(g) = 1$ 时,无论 p 如何取值,P_{11} 始终为单位算符.尽管如此,当符号系数 $\mathrm{sgn}(g)(-1)^{pq} = -1$ 时,它在整体上给微分形式场带来一个负号但不会导致其分量大小产生变化.此外,$P_{22} A = 0$(可令 $P_{22} = 0$),因此,为了构造有实质变化的不同的 p-形式场,完全可以排除 P_{11} 与 P_{22} 这 2 个平庸操作.

P_2,P_{12},P_{21} 三者与 P_{11} 分别交换作用顺序的关系依次为

$$P_{11} P_2 = (-1)^{n-1} P_2 P_{11}, P_{11} P_{12} = (-1)^{n-1} P_{12} P_{11}, P_{11} P_{21} = (-1)^{n-1} P_{21} P_{11}. \tag{7}$$

如果 2 个算符交换顺序前后生成次不同的微分形式场,本文认为二者没有可比性,如 $P_1 P_2$ 与 $P_2 P_1$,$P_2 P_{12}$ 与 $P_{12} P_2$,以及 $P_2 P_{21}$ 与 $P_{21} P_2$ 等.很显然,P_{11} 与 P_1 对易,即 $[P_{11}, P_1] = 0$,但是,只有当时空流形的维度 n 为奇数时,$[P_{11}, P_2] = 0$,$[P_{11}, P_{12}] = 0$ 以及 $[P_{11}, P_{21}] = 0$;当 n 为偶数时,$[P_{11}, P_2]_+ = 0$,$[P_{11}, P_{12}]_+ = 0$ 以及 $[P_{11}, P_{21}]_+ = 0$,即,P_{11} 与 P_2,P_{12} 以及 P_{21} 三者中的任意一个反对易.(7) 式的一个显著优点就是可以实现算符 P_{11} 的任意置换,从而尽可能简化算符之间的相互作用,例如,$P_{21} P_1 2 = (-1)^{n-1} P_{11} P_{22} = 0$.

在(4)式与(7)式的基础上,可以证明,从 P_1,P_2,P_{11},P_{12} 与 P_{21} 等 5 个算符中选取的任意操作组合,能够生成新的有实质不同的 p-形式场的最少操作组合只能是

$$O_1 = P_{12}^2, O_2 = P_{21}^2 \tag{8}$$

这 2 种.显然,$O_i O_r = \delta_{ir} O_i O_r$,这里 i,$r = 1, 2$.在(7) 式的协助下,进一步得到二者分别与 P_1、P_2 的相互作用关系 $P_1 O_1 = O_2 P_1$,$P_1 O_2 = O_1 P_1$,$P_2 O_1 = O_2 P_2$ 与 $P_2 O_2 = O_1 P_2 = 0$,以及它们与 P_{11} 的彼此对易关系 $[P_{11}, O_i] = 0$.二者更具体的表达式可由它们对 p-形式 A 的作用来给出.

为了得到 $O_1 A$ 与 $O_2 A$ 的具体结果,先由推广的 Kronecker delta 符号的性质来求解 p-形式 A 依次由外微分算符与霍奇对偶的作用 $*\mathrm{d}A = P_{12} A$,以及它的对偶微分形式经由外微分算子的作用 $\mathrm{d}*A = P_{21} A$.利用(2)式,前者的分量形式可表示为

$$(P_{12} A)_{\mu_1 \cdots \mu_{q-1}} = \frac{1}{p!} \tilde{\varepsilon}_{\alpha_0 \cdots \alpha_p \mu_1 \cdots \mu_{q-1}} \nabla^{\alpha_0} A^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}. \tag{9}$$

而在(5)式的帮助下,后者的分量形式为

$$(P_{21} A)_{\mu_1 \cdots \mu_{q+1}} = \frac{1}{(p-1)!} \tilde{\varepsilon}_{\alpha_1 \cdots \alpha_{p-1} \mu_1 \cdots \mu_{q+1}} \nabla_\rho A^{\alpha_1 \cdots \alpha_{p-1} \rho}. \tag{10}$$

再用 P_{12} 操作一次(9)式,并应用(5)式,有

$$(O_1A)_{\mu_1\cdots\mu_p}=c_3(p+1)\nabla^\sigma\nabla_{\sigma}A_{\mu_1\cdots\mu_p}=c_3\Box A_{\mu_1\cdots\mu_p}-c_3p\nabla^\sigma\nabla_{[\mu_1}A_{|\sigma|\mu_2\cdots\mu_p]},\tag{11}$$

得到一个新的含 2 阶导数的 p-形式场,这里算符 $\Box=g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma$ 为大家所熟知的达朗贝尔算子(d'Alembert operator),并且,全文约定符号系数 $c_3=\mathrm{sgn}(g)(-1)^{p(q-1)}$ 或等价为 $c_3=\mathrm{sgn}(g)(-1)^{np}$.(11) 式中第 2 个等式的导出可以借助文献[6] 中推广的 Kronecker delta 符号的解除反对称方括号的性质(e) 及其展开式(42) 来实现.特别地,当 $p=0$ 时,对于标量场 $\phi(x)$,有 $O_1\phi=\mathrm{sgn}(g)\Box\phi$,由此可把标量场的波方程 $\Box\phi=0$ 表述为 $O_1\phi=0$.事实上,下文中即将看到,组合算符 O_1、O_2 二者与达朗贝尔算子之间存在一个更为一般的联系.同样,再让 P_{21} 作用于(10) 式,又可得一个含 A 的 2 阶导数的 p 次形式

$$(O_2A)_{\mu_1\cdots\mu_p}=(-1)^nc_3p\nabla_{[\mu_1}\nabla^{\rho}A_{|\rho|\mu_2\cdots\mu_p]}.\tag{12}$$

如果再次以(11)式与(12)式中的 p 次微分形式 O_1A 与 O_2A 为出发点,重复上述过程,又可导出 2 个新的 p-形式场.如此反复,以 A 出发,最终能够得到一系列形式上彼此独立的 p 次微分形式场 $P_{12}^{2j}A=O_1^j(A)$ 以及 $P_{21}^{2j}A=O_2^jA$(j 为非负整数).与此不同的是,$P_{12}O_1^jA$ 与 $P_{21}O_2^jA$ 分别为$(q-1)$ 与$(q+1)$ 次形式场,而(4) 式直接排除了 P_{12} 与 P_{21} 的混合对 A 的作用.值得强调的是,由于算符 O_1 与 O_2 具有保持微分形式的次不变的优点,如果考虑 4 个及以上基本算符 P_1 与 P_2 的组合操作时,可以尝试尽量让 O_1 与 O_2 来表示它们.

既然 O_1 与 O_2 都保持微分形式的次不变,因此,完全能够由二者之间的线性叠加构造一个更一般的保持次不变的算符.不妨考虑由 O_1^j 与 O_2^k 二者的线性组合定义一个新的算符 $\Psi_{jk}=\Psi_{jk}(\gamma_1,\gamma_2)$($\gamma_1$ 与 γ_2 为组合系数),具体有

$$\Psi_{jk}=\gamma_1O_1^j+\gamma_2O_2^k,\Psi_{jk}^m=\Psi_{mj,mk}(\gamma_1^m,\gamma_2^m)=\gamma_1^mO_1^{mj}+\gamma_2^mO_2^{mk}.\tag{13}$$

上式第 2 个方程的导出用到了性质 $O_1O_2=O_2O_1=0$,要求该方程中的 j,k 必须为正整数.不难验证,在组合系数 γ_1、γ_2 与算符作用的微分形式的 p 次无关的条件下,组合操作 Ψ_{jk} 还具有如此的一些重要性质:一般情形下,算符之间存在对易关系 $[P_{11},\Psi_{jk}]=0$,$[P_{12},\Psi_{jk}]=0$,$[P_{21},\Psi_{jk}]=0$,$[\Psi_{j_1k_1},\Psi_{j_2k_2}]=0$ 等;当组合系数满足 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$,并且 $j=k$ 时,还存在对易关系 $[P_1,\Psi_{kk}(\gamma,\gamma)]=0$,$[P_2,\Psi_{kk}(\gamma,\gamma)]=0$ 以及 $[P_{12}p_1,\Psi_{kk}(\gamma,\gamma)]=0$;当 $\gamma_{1,2}=1$ 时,有恒等式 $\Psi_{j_1k_1}\Psi_{j_2k_2}=\Psi_{j_1+j_2,k_1+k_2}$.值得强调的是,当 $j,k=1$,且系数 $\gamma_{1,2}=\pm1$ 时,$\Psi_{11}(1,1)$ 或 $\Psi_{11}(-1,-1)$ 回到通常的 Laplace-de Rham 算子,文献中也时常称为 Hodge-Laplace 算子.

比较(11)式与(12)式,不难发现,组合操作 O_1 与 O_2 二者并不是彼此完全孤立的,因此,为了理解 Ψ_{jk} 的意义,需要确定它们作用于任意微分形式时彼此的具体联系.基于推广的 Kronecker delta 符号的解除反对称方括号的性质[6]与黎曼曲率张量(Riemann curvature tensor)的定义[4]$(\nabla_\sigma\nabla_\rho-\nabla_\sigma\nabla_\rho)\nu_\mu=R_{\rho\sigma\mu\nu}\nu^\nu$(这里 ν_μ 为任意协变矢量),经过冗长的计算,进一步导出 O_1A 与 O_2A 二者的如下关系

$$(O_1A)_{\mu_1\cdots\mu_p}=(-1)^{n+1}(O_2A)_{\mu_1\cdots\mu_p}+c_3\Box A_{\mu_1\cdots\mu_p}+c_3\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\tag{14}$$

或 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)A=\Box A+\Omega$,这里约定 $\Box A=(p!)^{-1}\Box A_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}x^{\mu_1\cdots\mu_p}$.不难证明,更一般地,$[P_1,\Psi_{kk}(c_3,(-1)^nc_3)]=0$ 以及$[P_2,\Psi_{kk}(c_3,(-1)^nc_3)]=0$.上式中,$p$-阶反对称张量 $\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 是一个与黎曼曲率张量 $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ 有关的量,定义为

$$\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p}=-\frac{p}{2}(2R^\sigma_{[\mu_1}A_{|\sigma|\mu_2\cdots\mu_p]}-(p-1)R^{\rho\sigma}_{[\mu_1\mu_2}A_{|\rho\sigma|\mu_3\cdots\mu_p]}).\tag{15}$$

由此可知,如果时空平直,即 $R_{\rho\sigma\mu\nu}=0$,相应地,$\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p}=0$,在该条件下,获得组合算符 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)=\Box$,正好是达朗贝尔算子;反之,若 $R_{\rho\sigma\mu\nu}\neq0$,可以证明,对于任意 p(取尽 0 到 n 的所有整数) 次形式 A,并不能保证 $\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p}=0$ 恒成立.综合可得结论:当且仅当时空平直时,Ψ_{jk} 才能表示成适用于任意微分形式的达朗贝尔算子.尽管如此,如果对微分形式场进行特殊选择,比如,对于所有 1 次形式 A,仅要求时空流形是里奇平直的(Ricci-flat),即里奇曲率张量 $R_{\mu\nu}=0$,或更一般地,只需要求某一 p-形式 A 满足 $\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p}=0$ 的约束,也能确保 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)=\Box$ 有条件成立.例如,当 A 选取为任意标量 $\phi(x)$ 与 Levi-Civita 张量的乘积 $\phi(x)\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$(即任意 n- 阶完全反对称张量)时,显然,始终有 $\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p}=0$;此外,当 $A_\mu=\xi_\mu$ 为时空几何的 Killing 矢量场时,借助其满足的恒等式 $\nabla_\rho\nabla_\mu\xi_\nu=-R_{\mu\nu\rho\sigma}\xi^\sigma$,得到 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)\xi=2\Box\xi$(式中 $c_3=\mathrm{sgn}(g)(-1)^n$),由此可见,尽管没有要求一定满足 $\Omega_\mu=0$,对于任意 Killing 矢量,仍然可以把 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)$ 表示成达朗贝尔算子.

事实上,在(14)式与(15)式的基础上,完全可以通过算符 Ψ_{jk} 对 p 次微分形式场的作用来构造曲率张量的高阶导数项.比如,考虑让 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)$ 连续 2 次作用于 Killing 矢量场 ξ_μ,得到

$$[\Psi_{22}(1,1)\xi]_\mu=-2\xi^\nu(\Box R_{\mu\nu}-2R^\sigma_\mu R_{\nu\sigma}),\tag{16}$$

上式中,已经用到关系式 $\Psi_{11}^2(c_3,(-1)^nc_3)=\Psi_{22}(1,1)$.当要求 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)\xi=0$ 对任意 Killing 矢量场 ξ_μ 恒成立时,得到方程 $R_{\mu\nu}=0$,与此不同,倘若仅要求 $\Psi_{22}(1,1)\xi=0$ 始终成立,由(16)式导出一个与里奇曲率张量相关的有趣方程

$$\Box R_{\mu\nu}=2R^\sigma_\mu R_{\nu\sigma}.\tag{17}$$

显然,里奇平直时空的度规张量是上述方程的一个解.

其次,基于上述对 P_1, P_2, P_{11}, P_{12} 与 P_{21} 等 5 个算符的分析,可以总结其中任意二者的组合作用于 p-形式场 A 的一般规律,具体见表 1.表 1 中,除第 1 行与第 1 列以外,所有元素均是其所在行第 1 个元素与其所在列第 1 个元素的依次组合的结果(列中算符先作用于 A),如第 3 行与第 5 列所在元素为 $P_2P_{12}=P_{212}$.表 1 中所有组合算符作用于任意微分形式时,只有经由对角元素的操作才能保持它们的次不变,由此进一步验证了(8) 式中的结论."1"理解为单位算符,2 个符号系数 c_1 与 c_2 分别定义为

表 1 5 个算符之间相互作用关系

Tab.1 Interactions between the 5 operators

算符	P_1	P_2	P_{11}	P_{12}	P_{21}
P_1	$c_1 1$	P_{12}	c_1P_1	c_2P_2	P_{121}
P_2	P_{21}	0	c_1P_2	P_{212}	0
P_{11}	c_1P_1	c_2P_2	1	c_2P_{12}	c_2P_{21}
P_{12}	P_{121}	0	c_1P_{12}	O_1	0
P_{21}	c_1P_2	P_{212}	c_1P_{21}	0	O_2

$$c_1=\operatorname{sgn}(g)(-1)^{pq}=\operatorname{sgn}(g)(-1)^{np+p},c_2=(-1)^{n-1}c_1=\operatorname{sgn}(g)(-1)^{np+p+n+1},\tag{18}$$

即,c_1 与 c_2 二者只能够选取 ±1,具体可分为 3 种情形.当时空流形的维度 n 为奇数时,不论微分形式的次 p 如何取值,始终保证 $c_{1,2}=\operatorname{sgn}(g)$;当 n 与 p 均为偶数时,$c_1=\operatorname{sgn}(g)$,$c_2=-\operatorname{sgn}(g)$;当 n 为偶数但 p 为奇数时,$c_1=-\operatorname{sgn}(g)$,$c_2=\operatorname{sgn}(g)$. c_1 与 c_3 的关系为 $c_3=(-1)^pc_1$.算符 P_{12}、P_{21}、O_1 与 O_2 对 A 的作用由(9) ~ (12) 式依次给出,而操作 P_{121} 与 P_{212} 定义为

$$P_{121}=*\mathrm{d}*=P_{12}P_1,P_{212}=\mathrm{d}*\mathrm{d}=c_1P_1O_1.\tag{19}$$

显然,二者具有 $P_{212}^2=P_{121}^2=0$,$P_{121}P_{212}=P_{12}^3$,$P_{212}P_{121}=P_{21}^3$,$O_2P_{212}=P_{212}O_1$,$P_{212}P_1=P_2P_{121}$,$[P_{11},P_{212}]=0$ 以及 $[P_{11}P_{121}]=(-1)^{n-1}P_{121}P_{11}$ 等一系列相互作用关系,它们作用于任意 p-形式场 A 的具体结果分别为

$$(P_{121}A)_{\mu_2\cdots\mu_p}=(-1)^nc_3\nabla^{\mu_1}A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p},(P_{212}A)_{\mu_1\cdots\mu_q}=\frac{p+1}{p\,!}\tilde{\varepsilon}_{\alpha_1\cdots\alpha_p\mu_1\cdots\mu_q}\nabla_\sigma\nabla^{[\alpha_1}A^{\alpha_2\cdots\alpha_p\sigma]},\tag{20}$$

上式中,$\nabla^{\mu_1}A_{\mu_1\cdots\mu_p}=|g|^{(-1/2)}\partial^{\mu_1}(|g|^{(1/2)}A_{\mu_1\cdots\mu_p})$,由此可见,操作 P_{121} 与微分形式相作用实质上就是对其作用对象进行物理学上的散度运算.若引入新的 $(p-1)$ 次形式 $\operatorname{div}(A)=[(p-1)\,!]^{-1}\nabla^\nu A_{\mu_2\cdots\mu_p\nu}\mathrm{d}x^{\mu_2\cdots\mu_p}$,则 $P_{121}A=c_2\operatorname{div}(A)$.

算符 P_{121} 与余微分[3](co-differential)δ 有这样的关系

$$\delta=\operatorname{sgn}(g)(-1)^{np+n}P_{121}.\tag{21}$$

易得 $\delta^2=-P_{12}P_{21}P_{11}=0$,作用于 p 次形式 A 得到 $(p-1)$-形式 $(\delta A)=(-1)^{p+1}\operatorname{div}(A)$(分量形式为 $(\delta A)_{\mu_2\cdots\mu_p}=\nabla^\rho A_{\rho\mu_2\cdots\mu_p}$),以及 δ 与算子 $\Psi_{jk}(\gamma_1,\gamma_2)$ 之间的对易关系 $[\delta,\Psi_{kk}(\gamma,\gamma)]=0$.并且,在余微分 δ 的协助下,可以把(14) 式中的算子表述为 $\Psi_{11}(c_3,(-1)^nc_3)=\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta$,这样,算符 $(\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta)$ 分别与 P_1、P_2 以及 δ 三者对易,它的 k 次连续作用 $(\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta)^k=(\delta\mathrm{d})^k+(\mathrm{d}\delta)^k$;还可把守恒流 J_μ 与 2 形式守恒势 $Q_{\mu\nu}$ 之间的关系 $J=\operatorname{div}(Q)$ $(J^\mu=\nabla_\nu Q^{\mu\nu})$ 改写为 $J=-\delta Q$,或 $*J=\mathrm{d}*Q(*\operatorname{div}(Q)=\mathrm{d}*Q)$.

最后,把基本算符 P_1 与 P_2 作用于任意 2 个 Hodge 对偶与外微分算符的 3 个非零组合 P_{11},P_{12} 与 P_{21},可以得到由 3 个基本算符构成的 5 个非零的独立组合操作.除了(19) 式中的 2 个操作 $P_{121}=P_1P_{21}$ 与 $P_{212}=P_2P_{12}$ 外,还有

$$P_{111}=P_1P_{11},P_{211}=P_2P_{11},P_{112}=P_1P_{12}=(-1)^{n-1}P_2P_{11}.\tag{22}$$

根据表 1,它们作用于 p-形式场 A 有这样一些结果:

$$P_{211}A=\operatorname{sgn}(g)(-1)^{pq}\mathrm{d}A,P_{111}A=\operatorname{sgn}(g)(-1)^{pq}*A,P_{112}A=\operatorname{sgn}(g)(-1)^{pq+n-1}\mathrm{d}A.\tag{23}$$

到此为止,(20)式与(23)式给出了 3 个基本算符的非零组合操作作用于微分形式的所有结果,但与 P_1、P_2 作用的结果有本质区别的只有 P_{121} 与 P_{212} 这 2 个操作.

2 任意霍奇星算子与外微分算符的一般组合规律

在上一节的基础上,本节将进一步全面系统地探讨任意数目的 Hodge 星算子与外微分算符共同作用于微分形式场的一般组合规律,给出所有可能的非零且形式上独立的组合操作的一般表达式,在此基础上,再来分析它们的相互作用关系,并依据这些操作生成的微分形式的次来对它们进行分类.

2.1 所有非零独立组合算符的统一表达式

考虑把上一节中 2 个以及 3 个基本算符 P_1 与 P_2 的组合模式推广到任意 N 个的情形.一方面,由于 $P_2^2=0$ 以及 P_{11} 仅有可能改变微分形式场的符号,因此,不能连续出现 2 个外微分算符,并且,相邻 2 个外微分算符 P_2 之间仅能有奇数个 Hodge 对偶的组合 $P_1P_{11}^k$,形成 $P_2P_1P_{11}^kP_2$ 的结构(利用(7) 式中 P_{11} 与 P_2 的交换关系,等价为 $(-1)^{k(n-1)}P_2P_1P_2P_{11}^k$),即,2 个相邻 P_{12} 或 P_{21} 之间只可能出现算符 P_{11}^k,一起构成形如 $P_{12}P_{11}^kP_{12}$ 或 $P_{21}P_{11}^kP_{21}$ 的组合.另一方面,(7) 式表明 P_{11} 与 P_{12}、P_{21} 二者中的任意一个交换先后作用顺序时乘上一个符号系数 $(-1)^{n-1}$,仅有可能带来符号的变化.这样,总可以通过置换排列顺序,把相邻 $P_{12}(P_{21})$ 之间的所有 P_{11} 算符置换到最左端或最右端,而(4) 式直接排除了混合 P_{12} 与 P_{21} 的操作组合 $P_{12}P_{11}^kP_{21}$ 与

$P_{21}P_{11}^kP_{12}$ 的出现.基于此,对于 N 个 Hodge 星算子与外微分算符的任意非零值组合,总可以表示成如下

$$U_1 = (-1)^{m(n-1)}P_1^\tau P_{12}^jP_{11}^k, U_2 = (-1)^{m(n-1)}P_1^\tau P_{21}^jP_{11}^k, U_3 = (-1)^{m(n-1)}P_2P_{12}^jP_{11}^k \tag{24}$$

3 种形式之一.上式以及下文中,约定 $\tau = 0,1$;m 与 j 默认为非负整数(除非特别指出),m 指代把所有 P_{11} 置换到最右端时 P_{11} 与 P_2、P_{12}、P_{21} 三者置换的总次数,很显然,j 与 k 满足约束条件

$$\tau + 2(j+k) = N, 1 + 2(j+k) = N. \tag{25}$$

值得注意的是,(24)式中的 3 个表达式并不是彼此完全独立的,当 $\tau = 1$ 时,U_1 被 U_2 与 U_3 共同覆盖.

更具体地,当 N 为偶数时,所有$(2N-1)$个非零且独立的操作只能表示成(24)式中 $\tau = 0$ 时的更为简洁的 U_{10} 与 U_{20},即

$$U_{10} = \sigma P_{12}^jP_{11}^k, U_{20} = \sigma P_{21}^jP_{11}^k, \tag{26}$$

不可能出现 U_3 形式,而 $2(j+k) = N$;当 N 为奇数时,要求(24)式中 $\tau = 1$,所有形式上独立的非零组合操作可表示为

$$U_{21} = P_1U_{20} = \sigma P_1P_{21}^jP_{11}^k, U_{31} = P_2U_{10} = \sigma P_2P_{12}^jP_{11}^k, \tag{27}$$

要求 $2(j+k) = N-1$.当奇数 $N \geq 3$ 时,非零操作总数也为$(2N-1)$,因此,尽管含 $N(\geq 2)$ 个基本算符 P_1 与 P_2 的组合模式有 2^N 种,但非零的独立组合操作只有$(2N-1)$个,如果 P_{11} 与 P_2,P_{12} 以及 P_{21} 等置换最终不带来符号差异,它们的数目会更少,比如,当时空流形的维度 n 为奇数时,P_{11} 与 P_2,P_{12} 以及 P_{21} 分别对易,因此,始终有 $(-1)^{m(n-1)} = 1$,这时,所有由 N 个基本算符 P_1 与 P_2 组合的非零独立操作的个数仅为$(N+1)$.在(26)式与(27)式中,因为 m 要么为偶数次置换,要么为奇数次置换,因此,不需要关心 m 的具体取值,完全可以由 $\sigma = (-1)^{\tau(n-1)}$ 替代符号系数 $(-1)^{m(n-1)}$.当 $j = 0$(排除 U_{31} 的 $j = 0$ 且 $k \neq 0$ 情形)或 $k = 0$ 时,即,组合操作中不出现 P_{11} 或仅存在 P_{11}^k($P_1P_{11}^k$)时,$\tau = 0$,使得符号系数 $\sigma = 1$;其余情形(包含 U_{31} 的 $j = 0$ 且 $k \neq 0$ 情形),即 P_{11} 混合 P_2,P_{12} 与 P_{21} 三者中任意一个时,$\tau = 0$ 与 $\tau = 1$ 操作同时存在.对于 U_{10}、U_{20}、U_{12} 与 U_{21} 彼此之间的相互作用关系,下文即将给予探讨.

(24)式表明,完全可由 P_1,P_2,P_{11},P_{12} 与 P_{21} 等 5 个算符表示由 Hodge 对偶与外微分算符构造的任意非零值操作.这样,借助表 1 给出的算符之间的相互作用关系以及它们作用于 p-形式场 A 的各具体表达式,可以逐步计算这些操作对微分形式场的作用结果.接下来,讨论 3 个有关(26)式与(27)式的具体应用例子.

1) $N = 4$ 时,把 P_1 与 P_2 分别作用于(22)式中由 3 个基本算符构成的所有 5 个非零操作,进一步得到由 4 个 P_1 与 P_2 组合的 7 个彼此互异的非零操作,也就是(26)式中(j,k)取值为(0,2)、(1,1)与(2,0)时的结果

$$(-1)^{\tau(n-1)}P_{12}P_{11}, O_1, P_{11}P_{11}, (-1)^{\tau(n-1)}P_{21}P_{11}, O_2. \tag{28}$$

若时空维度 n 为奇数,$(-1)^{n-1} = 1$,因此,(28)式中真正独立的量只有 5 个.

2) $N = 5$ 时,再次把 P_1 与 P_2 分别作用于(28)式中各量,又可得到 9 个由 5 个 P_1 与 P_2 组合的独立非零操作,它们对应于(27)式中(j,k)依然取值为(0,2)、(1,1)与(2,0)时的值:

$$(-1)^{\tau(n-1)}P_2P_{11}P_{11}, P_1P_{11}P_{11}, (-1)^{\tau(n-1)}P_1P_{21}P_{11}, P_1O_2, (-1)^{\tau(n-1)}P_2P_{12}P_{11}, P_2O_1. \tag{29}$$

同样,如果时空维度 n 为奇数,(29)式中仅包含 6 个独立组合算符.

3)当(26)式中(j,k)分别等于(0,3)、(1,2)、(2,1)与(3,0)时,能够得到由 6 个基本算符组合的 11 个独立的非零操作

$$P_{12}O_1, \sigma P_{12}, \sigma O_1P_{11}, P_{11}, P_{21}O_2, \sigma P_{21}, \sigma O_2P_{11}, \tag{30}$$

上式中,已利用单位算符 $P_{11}P_{11}=1$ 对部分量进行了化简.

2.2　算符之间的相互作用关系

基于上一小节的分析,尽管 N 个基本算符的组合总共可以得到$(2N-1)$个形式上完全独立的操作,事实上,从依赖 Hodge 对偶与外微分算符的作用构造有实质不同的微分形式场的角度来看,由于 P_{11} 仅有可能改变微分形式的符号,如果不是关注于此,真正有实质性区别的组合算符只可能是形如

$$X_1 = P_{12}^j, X_2 = P_{21}^j, Y_1 = P_2P_{12}^j = P_{21}^jP_2, Y_2 = P_1P_{21}^j = P_{12}^jP_1, \tag{31}$$

等 4 类.上式中,X_1 与 X_2 适用于 N 为偶数时,j 可取尽区间$[0,N/2]$内的所有整数,特别地,$X_1(0) = X_2(0) = 1$ 是单位算符;Y_1 与 Y_2 适用于 N 为奇数时,j 可取尽区间$[0,(N-1)/2]$内的所有整数.这样,N 个基本算符共只能得到$(N+1)$个有实质区别的组合操作,并且,它们覆盖了所有小于 N 情形的结果.

为了理解(31)式中所有算符的内在联系,来分析它们的相互作用关系.任意 X_1 与 X_2 的自身或彼此之间的相继作用得到

$$X_i(j)X_r(k) = \delta_{ir}X_i(j+k), \tag{32}$$

上式中,指标 $i,r = 1,2$;对于 Y_1 与 Y_2 的自身或相互之间的作用,有

$$Y_i(j)Y_r(k) = (1-\delta_{ir})X_r(j+k+1). \tag{33}$$

由此可见,不同于 X_i,Y_1 与 Y_2 二者的相互作用并不是封闭的;所有 X_i 与 Y_r 之间的彼此作用关系为

$$[Y_r(j), X_i(k)]_+ = Y_r(j+k), [Y_r(j), X_i(k)] = (2\delta_{ri}-1)Y_r(j+k), \tag{34}$$

上式第一个方程为 X_i 与 Y_r 二者的反对易关系.由(34)式可知,它们的相继作用结果完全由 Y_r 来确定.需要注意的是,在上述(32)～(34)式中,已设定整数 $j,k > 0$,因此,它们并没有包括 $j = 0$ 时 $Y_1(0) = P_2$ 与 $Y_2(0) = P_1$ 二者分别与 $X_i(k)$、

$Y_r(k)$(这里同样要求 $k>0$) 的相互作用关系.为此,通过计算,给出 P_i 与 $X_r(k)$ 彼此之间的如下相互作用关系

$$P_iX_1(k)=c_4Y_1(k-\delta_{1i}),X_2(k)P_i=c_5Y_1(k-\delta_{1i}),P_iX_2(k)=X_1(k)P_i=\delta_{1i}Y_2(k),\tag{35}$$

以及 P_i 与 $Y_r(k)$ 之间的作用关系

$$Y_1(k)P_i=\delta_{1i}X_2(k+1),P_iY_1(k)=\delta_{1i}X_1(k+1),P_iY_2(k)=c_4X_2(k+\delta_{2i}),Y_2(k)P_i=c_5X_1(k+\delta_{2i}).\tag{36}$$

在(35)式与(36)式中,因 P_{11} 的出现而引入的符号系数 c_4 与 c_5 只可能取 ±1,具体来说,当 $i=1$ 时,$c_4=(-1)^{k(n-1)}c_1$,$c_5=c_1$;当 $i=2$ 时,$c_{4,5}=1$.综合(32) ~ (36) 式,并考虑到 $P_1P_2=X_1(1)$,$P_2P_1=X_2(1)$ 以及单位算符 $X_1(0)$ 或 $X_2(0)$ 与任意算符作用还是该算符本身,不难发现,在(7) 式中给出的 P_{11} 与 P_2,P_{12}、P_{21} 三者交换作用顺序的关系的帮助下,只要把上述算符之间的相继作用关系拓展到(26) 式与(27) 式中的所有 U_{10}、U_{20}、U_{21} 与 U_{31},就能够进一步导出这些算符的所有相互作用规律.比如,借助(32) 式,能够导出 $U_{i0}(x)=\sigma(\tau)X_i(j)P_{11}^k$ 的如下作用关系

$$U_{i0}(x_1)U_{r0}(x_2)=(-1)^{k_1j_2(n-1)}\delta_{ir}U_{i0}(x_1+x_2),\tag{37}$$

这里约定 $(x)=(\tau,j,k)$,x_i 指 x 的每个量标注下指标 i,(x_1+x_2) 表示对应的 2 个量分别相加.此外,文献[7-10]中,在设定 $P_{11}=1$ 为单位算符的前提下(此时,(35) 式与(36) 式中的 $c_{4,5}$ 始终等于 1),已验证单位算符 1,P_1,P_2,$X_i(k)$ 与 $Y_r(k)$(要求 $k>0$) 一起构成一个算符代数.

方便起见,借助 O_1 与 O_2,进一步把(31)式中所有独立操作表示为如下

$$P_2^\tau O_1^k,P_{12}O_1^k,P_{212}O_1^k,P_1^\tau O_2^k,P_{21}O_2^k,P_{121}O_2^k,\tag{38}$$

等 8 类.例如,在 $N=4$ 的情形,(28) 式中的有实质区别的组合操作只有 $j=0,1,2$ 时的单位算符 1,P_{12},P_{21},O_1 与 O_2 5 个,前 3 个正好是 $N=2$ 时的所有操作(已令 $P_{11}=1$);而当 $N=5$ 时,(29) 式中仅包含 $j=0,1,2$ 时的 P_1,P_2,P_{212},P_{121},P_2O_1 与 P_1O_2 6 个实质性独立操作,覆盖了 $N=1,3$ 情形的所有可能的结果,没有单位算符,这是因为,奇数个基本算符的组合一定不会存在单位算符.

2.3 根据生成的次不同的微分形式对操作分类

由上述操作的组合规则可进一步得到结论,当 Hodge 对偶与外微分算符作用于 p-形式场 A 时,不管操作多少次,最终的结果要么为零,要么为 6 种 tt 次形式场之一,这里 t 只能从集合$\{p,q,p\pm1,q\pm1\}$ 中取值.除此以外,尽管霍奇星算子与外微分算符的所有组合不能再生成更多类型的微分形式,但是,相较于单个基本算符的组合 P_1^j 与 P_2^j 仅能分别生成 q(或 p) 与 $(p+1)$ 次的微分形式来说,二者的混合组合已很具有影响性了.

具体来说,当组合操作含基本算符的总个数为偶数时,由(26)式可知,只可能生成$(q+1)$、$(q-1)$与 p 次的微分形式场,对应的操作集合依次为

$$S_{q+1}=\{\sigma P_{21}O_2^jP_{11}^k\},S_{q-1}=\{\sigma P_{12}O_1^jP_{11}^k\},S_p=\{\sigma O_1^jP_{11}^k,\sigma O_2^jP_{11}^k\}.\tag{39}$$

因此,如果要求经由组合算符作用后仍然保持微分形式的次不变,如此的算符只能包含偶数个基本算符 P_1 与 P_2,或者更一般来说,是由 O_1^j 与 O_2^k 二者的线性组合得到的算符 Ψ_{jk}.当 N 为奇数时,由(27) 式可知,作用于 p-形式场时,也只可能生成 $(p+1)$、$(p-1)$ 与 q 次的微分形式,相应的操作集合分别为

$$S_{p+1}=\{\sigma P_2O_1^jP_{11}^k\},S_{p-1}=\{\sigma P_{121}O_2^jP_{11}^k\},S_q=\{\sigma P_{212}O_1^jP_{11}^k,\sigma P_1O_2^jP_{11}^k\}.\tag{40}$$

(40)式表明,任意奇数个基本算符 P_1 与 P_2 的组合不可能得到单位算符,并且,生成 q-形式的 2 个组合操作并不是彼此互易的,这点不同于生成 p 次形式的 2 个组合算符.在(39) 式与(40) 式中,已要求所有的组合操作含基本算符的总数必须为 N;如前所述,组合操作中不出现 P_{11} 或仅存在 $P_{11}^k(P_1P_{11}^k)$ 时 $\sigma=1$,其余情形 $\sigma=1$ 与 $\sigma=(-1)^{n-1}$ 同时存在;S_{q+1}、S_{q-1} 与 S_q 集合中的操作分别与集合 S_{p-1}、S_{p+1} 以及 S_p 中的操作互为霍奇对偶.即,霍奇星算子与外微分算符的所有非零组合作用于 p 次微分形式时,仅能生成 3 种有实质区别的微分形式.由于 P_{11} 仅有可能改变微分形式场的符号,为了构造有本质差别的各种微分形式,如(38) 式所示,完全可以去掉以上集合中的所有 P_{11}^k 操作与符号系数 σ.

类似于(13)式中线性算符 Ψ_{jk} 的构造过程,同样,在 2 个组合参数 α_1 与 α_2 的帮助下,由生成 q 次微分形式的 2 个操作 $P_{212}O_1^j$ 与 $P_1O_2^k$ 的线性组合可以得到一个更为普适的算符 $\Phi_{jk}=\Phi_{jk}(\alpha_1,\alpha_2)$,定义为

$$\Phi_{jk}=\alpha_1P_{212}O_1^j+\alpha_2P_1O_2^k=P_1\Psi_{j+1,k}(c_1\alpha_1,\alpha_2).\tag{41}$$

由此可见,算符 Φ_{jk} 与 Ψ_{jk} 二者并不是完全孤立的,前者恰好是后者的霍奇对偶,这样,经过算符 P_1 的作用,Ψ_{jk} 也能够表示为 Φ_{jk} 的霍奇对偶,即 $\Psi_{jk}=P_1\Phi_{j-1,k}(\gamma_1,c_1\gamma_2)$.显然,当 $j_{1,2},k_{1,2}\geq1$ 时,$[\Phi_{j_1k_1},\Phi_{j_2k_2}]=0$;当 j,k 为正整数时,借助(33) 式,不难发现,算符 Φ_{jk} 还有如下性质

$$\Phi_{jk}^{2m}=(\alpha_1\alpha_2)^m(O_1^{ma}+O_2^{ma})=\Psi_{aa}^m(\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\alpha_2),\Phi_{jk}^{2m+1}=(\alpha_1\alpha_2)^m\Phi_{ma+j,ma+k},\tag{42}$$

上式中,$a=j+k+1$;应用(34) 式,又能导出 Φ_{jk} 与 Ψ_{jk} 彼此之间的作用关系.由(42) 式可知,依次经由偶数 Φ_{jk} 个的作用,p 次微分形式的次仍然保持不变,而此时的 Φ_{jk} 可由算符 Ψ_{jk} 囊括;只有奇数个 Φ_{jk} 的连续操作才能生成 q-形式,这样,生成 q 次微分形式的更一般算符应该是 Φ_{jk}.

结束本节之前,为了简单说明(39)式与(40)式的应用,具体来看(28)式中的 4 个基本算符的组合,它们作用于 p 次微分形

式场时,生成 p-形式的操作集合是$\{P_{11}^2,O_1,O_2\}$,生成$(q-1)$与$(q+1)$次形式的操作分别为$(-1)^{\tau(n-1)}$与$(-1)^{\tau(n-1)}P_{21}P_{11}$.而对于(29)式中 5 个基本算符的组合,只可能生成$(p-1)$、$(p+1)$与 q 次 3 种微分形式,生成前 2 种的所有操作集合分别为$\{(-1)^{\tau(n-1)}P_{121}P_{11}\}$与$\{(-1)^{\tau(n-1)}P_2P_{11}^2,P_2O_1\}$,生成 q-形式的所有算符依次为$P_1P_{11}^2$,P_1O_2与$(-1)^{\tau(n-1)}P_{212}P_{11}$.这些操作可由表 1 进一步简化.

3　应用举例

作为上述一般理论的应用,具体考虑 4 个及以下($N\leq4$)基本算符 P_1 与 P_2 的所有组合操作分别作用于 p-形式与$(p-1)$-形式 B 而如何生成次相同的微分形式场.

首先,寻找一般情形下的所有组合操作.当组合操作含基本算符的个数不大于 4 个时,它们作用于 p-形式场A,由(39)式与(40)式可知,能够生成$(q-1)$、p与$(q+1)$-形式的操作只能是基本算符总数$N=2,4$的组合操作,分别形成如下 3 个集合

$$W_{q-1}=\{P_{12},c_1P_{12},c_2P_{12}\},W_p=\{c_11,1,O_1,O_2\},W_{q+1}=\{P_{21},c_1P_{21},c_2P_{21}\};\tag{43}$$

$N=1,3$的组合算符能够生成$(p-1)$、q与$(p+1)$次形式,它们构成的集合依次为

$$W_{p-1}=\{P_{121}\},W_q=\{P_1,c_1P_1,P_{212}\},W_{p+1}=\{P_2,c_1P_2,c_2P_2\}.\tag{44}$$

如果忽略所有的符号差异,由上述(43)式与(44)式不难发现,$N\leq4$的所有操作中真正独立的量只有单位算符 $1,P_{12},P_{21}$,O_1,O_2,P_1,P_1,P_{121}与P_{212}等 9 个,而不是上述更一般情形下的 17 个.

其次,在(43)式与(44)式的帮助下,讨论经由各类算符作用于 p-形式 A 与$(p-1)$-形式 B 后得到的所有次相同的微分形式场,只能有如下 4 种情况:1)同为$(p-1)$-形式场.作用于 A 与 B 的操作集合分别为 W_{p-1} 与 $W_p(p\to p-1)$;2)同为 p-形式场.作用于 A 与 B 的操作集合分别为 W_p 与 $W_{p+1}(p\to p-1)$;3)同为 q-形式场.作用于 A 与 B 的操作集合分别为 W_q 与 $W_{q-1}(p\to p-1)$;4)同为$(q+1)$-形式场.作用于 A 与 B 的操作集合分别为 W_{q+1} 与 $W_q(p\to p-1)$.以上出现的$(p\to p-1)$表示把集合中含 c_1 与 c_2 操作的这 2 个参数中的 p 替换成$(p-1)$,相应地,q 需要替换成$(q+1)$.

再次,分析如何由 2 个微分形式的线性组合来构造电磁理论的麦克斯韦方程组.当 $p=2$ 时,对于 2-形式$A_{(2)}$以及 1-形式 $B_{(1)}$ 与 $J_{(1)}$,经上述算符作用后得到的全部有实质性差异的$(n-1)$次形式只可能为(已经忽略符号差异)$P_{21}A_{(2)}$,$P_1B_{(1)}$,$P_{212}B_{(1)}$,$P_1J_{(1)}$与$P_{212}J_{(1)}$5 个.具体考虑取这 5 个$(n-1)$次形式中的任意 2 个的线性组合来构造含$A_{(2)}$,$B_{(1)}$与$J_{(1)}$中的任意 2个的方程.一种可行的处理方式是,先从5个$(n-1)$次形式中任意选取含$A_{(2)}$,$B_{(1)}$与$J_{(1)}$的3个量归为一组,总共有4组:(a)$P_{21}A_{(2)}$,$P_{212}B_{(1)}$与$P_1J_{(1)}$;(b)$P_{21}A_{(2)}$,$P_1B_{(1)}$与$P_{212}J_{(1)}$;(c)$P_{21}A_{(2)}$,$P_1B_{(1)}$与$P_1J_{(1)}$;(d)$P_{21}A_{(2)}$,$P_{212}B_{(1)}$与$P_{212}J_{(1)}$.然后,由每组的 3 个量中任选 2 个进行线性组合来构造方程.显然,(a)组与(b)组完全等价,因为 $B_{(1)}$ 与 $J_{(1)}$ 互换有不变性;在(c)组与(d)组中,由于 $B_{(1)}$ 与 $J_{(1)}$ 在形式上的等价性,完全可以排除$(P_1B_{(1)},P_1J_{(1)})$与$(P_{212}B_{(1)},P_{212}J_{(1)})$这 2 对 平庸组合,并且,$(P_{21}A_{(2)},P_1B_{(1)})$与$(P_{21}A_{(2)},P_1J_{(1)})$2 对以及$(P_{21}A_{(2)},P_{212}B_{(1)})$与$(P_{21}A_{(2)},P_{212}J_{(1)})$2 对的各自线性组合实质上分别等同,这样,相当于(c)组中仅能从$(P_{21}A_{(2)},P_1B_{(1)})$与$(P_{21}A_{(2)},P_1J_{(1)})$的组合任取其一,同样,(d)组中也只能选取$(P_{21}A_{(2)},P_{212}B_{(1)})$与$(P_{21}A_{(2)},P_{212}J_{(1)})$的组合中的一种,但不管怎样,这些组合均可由(a)或(b)覆盖,故可以不予考虑(c)与(d).通过(a)中 3 个量彼此配对得到$(P_{21}A_{(2)},P_1J_{(1)})$,$(P_{21}A_{(2)},P_{212}B_{(1)})$与$(P_1J_{(1)},P_{212}B_{(1)})$3 对,由各自的线性组合依次构造如下 3 个方程

$$\mathrm{d}*A_{(2)}=\lambda_1*J_{(1)},A_{(2)}=\lambda_2\mathrm{d}B_{(1)},\mathrm{d}*\mathrm{d}B_{(1)}=\lambda_3*J_{(1)},\tag{45}$$

上式中,λ_1,λ_2与λ_3为常量.若 $B_{(1)}$ 与 $J_{(1)}$ 互换,便是(b)给出的结果.需要注意的是,(45)式中 3 个方程是彼此独立的.不妨让 1-形式$B_{(1)}$与$J_{(1)}$分别理解为电磁矢势与流,(45)式中第一个方程正是大家熟知的由微分形式描述的麦克斯韦方程组的2个成员之一;第 2 个方程可用来定义 2 阶反对称电磁张量,用微分算符作用一次便得到另一个麦克斯韦方程;第 3 个方程是电磁场的运动方程.如果需要联立(45)式中的3个方程来自洽地描述电磁场的运动,还需要限制条件$\lambda_2=1$与$\lambda_1=\lambda_3$,这样,确保第 2 个方程给出了电磁张量 $A_{(2)}$,而第一与第 3 个方程完全一致,均为电磁场的运动方程.

此外,除了上述包含$A_{(2)}$,$B_{(1)}$与$J_{(1)}$中任意 2 个混合量的组合外,还有仅包含 $B_{(1)}$ 或 $J_{(1)}$ 的线性组合,即形式上等价的$(P_{212}B_{(1)},P_1B_{(1)})$与$(P_{212}J_{(1)},P_1J_{(1)})$2 对,它们的线性组合可构造$\mathrm{d}*\mathrm{d}B_{(1)}=\lambda_4*B_{(1)}$与$\mathrm{d}*\mathrm{d}J_{(1)}=\lambda_5*J_{(1)}$这 2个方程,这里 λ_2 与 λ_3 为常量,应用(15)式中第 2 个方程,有

$$\lambda_4B^{\mu}_{(1)}=2\nabla_\nu\nabla^{[\mu}B^{\nu]}_{(1)},\lambda_5J^{\mu}_{(1)}=2\nabla_\nu\nabla^{[\mu}J^{\nu]}_{(1)}.\tag{46}$$

如果能把 $B_{(1)}$ 与 $J_{(1)}$ 求解出来,也许可以得到一类特殊的矢量场.综合可得,从纯数学的角度来看,如果通过 5 个$(n-1)$次形式 $P_{21}A_{(2)}$,$P_1B_{(1)}$,$P_{212}B_{(1)}$,$P_1J_{(1)}$与$P_{212}J_{(1)}$中任选 2 个进行线性组合来构造方程,考虑到 $B_{(1)}$ 与 $J_{(1)}$ 在形式上的等价性,当要求方程含$A_{(2)}$,$B_{(1)}$与$J_{(1)}$中的任意 2 个时,能得到(45)式中的 3 个方程;当只包含三者之一时,只能得到(46)式给出的 2 个方程.若 $B_{(1)}$ 与 $J_{(1)}$ 互换,(45)式又可给出其余的混合$A_{(2)}$,$B_{(1)}$与$J_{(1)}$任意二者的 3 个方程,但不管怎样,所有这些方程在形式上都可归入(45)式中的 3 个方程,由此可知,这 3 个方程在某种意义上来说是唯一的,而它们的联合能够完整地描述电

磁场的麦克斯韦方程.

4 结 论

全面系统地探讨了 Hodge 星算子 $\star$ 与外微分算符 d(分别记为基本算符 P_1 与 P_2) 作用于任意微分形式场的一般组合规律.首先,找到了 2 个能够保持微分形式场的次不变的最少组合算符 O_1 与 O_2,它们作用于任意微分形式的结果分别由(11) 式与(12) 式给出,二者有(14) 式中的相互关系,基于它们的线性叠加又可构造出(13) 式中的算符 Ψ_{jk},它可覆盖 Laplace-de Rham 算子以及平直时空的达朗贝尔算子.其次,考虑了任意 N 个基本算符 P_1 与 P_2 的组合,当 N 为偶数或奇数时,每种情形下的所有($2N-1$) 个非零且独立的操作始终可分别表示成 (26) 式与(27) 式中由 P_1,P_2,P_{11},P_{12} 与 P_{21} 等 5 个算符(这些算符之间的相互作用关系参见表 1) 给出的统一形式 U_{10},U_{20},U_{21} 与 U_{31};若忽略算子 P_{11} 可能带来的符号差异,全部有实质性区别的独立操作只能是(31) 式中的 X_1,X_2,Y_1 与 Y_2.它们的所有相互作用关系由(32) ~ (36) 式给出.再次,依照全部非零且形式上完全独立的组合算符作用于任意 p-形式场时对微分形式的次的影响,对它们进行了分类,当基本算符的个数 N 为偶数时,组合操作只可能生成 ($q-1$),p 与($q+1$) 次的微分形式场,对应于(39) 式中的操作集合;当 N 为奇数时,也仅能生成分别为 ($p-1$),q 与($p+1$) 次的微分形式,相应的操作集合由(40) 式给出,由生成 q-形式的 2 个操作的线性组合又可得到(41) 式中的更为一般的算符 Φ_{jk}.最后,作为一个例子,详细分析了如何把所有基本算符个数满足 $1 \leq N \leq 4$ 的操作应用到($p-1$) -形式与 p-形式场来生成次相同的微分形式,特别地,当 $p=2$ 时,作用于 1 与 2 次形式时生成的所有独立的($n-1$) 次形式足够用来描述电磁场的麦克斯韦方程组.

参 考 文 献

[1] Wald R M.General Relativity[M].Chicago:Chicago University Press,1984.

[2] Padmanabhan T.Gravitation:Foundations and Frontiers(影印版)[M].北京:北京大学出版社,2013:516-518.

[3] Straumann N.General Relativity Second Edition[M].[S.l.]:Springer,2013:603-622.

[4] 梁灿彬,周彬.微分几何入门与广义相对论(上册)[M].2 版.北京:科学出版社,2006.

[5] 侯伯元,侯伯宇.物理学家用微分几何[M].2 版.北京:科学出版社,2004:31-35.

[6] 彭俊金,雷良建.由反对称化操作探究 Levi-Civita 与 Kronecker 符号的性质[Z].投稿中.

[7] Sharma C S,Egele U.Some properties of the operator algebra generated by Hodge's star and the exterior derivative[J].J Math Phys,1981,22(8):1519-1520.

[8] Sharma C S,Egele U.The center of the operator algebra generated by Hodge's star and the exterior derivative[J].Lett Nuovo Cim,1981,31(12):412-414.

[9] Plebanski J F.The algebra generated by Hodge's star and external differential[J].J Math Phys,1979,20(7):1415-1418.

[10] Chung W S.Theory of q deformed forms:3.q deformed Hodge star,inner product,adjoint operator of exterior derivative and self-dual Yang-Mills equation[J].Int J Theor Phys,1996,35(6):1107-1116.

Combination rules of Hodge star and the exterior derivative

Peng Junjin

(School of Physics and Electronic Science;Guizhou Provincial Key Laboratory of Radio Astronomy and Data Processing,Guizhou Normal University,Guiyang 550001,China)

Abstract:In this paper, we have systematically explored the general rules for all kinds of combination of Hodge star and exterior differentiation operators. We have derived the unified forms of the non－vanishing and independent operators made up of arbitrary numbers of Hodge star and exterior differentiation operators. What's more, we have explicitly investigated the interactions of all the combined operators. All the operators have been classified according to the ranks of the newly generated differential forms. It has been demonstrated that the Maxwell's equations for U(1) gauge field can be constructed from the linear combinations of two ($n-1$)-forms.

Keywords:Hodge star operator;exterior derivative;Maxwell's equations;general relativity;differential geometry

[责任编校 杨浦 王凤产]