文章编号:1000-2367(2020)02-0006-08 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.02.002

随机缴费流下 DC 型企业年金基金的动态投资策略

翟永会[a],王易玮[a],高清慧[b]

(河南师范大学 a.商学院;b.数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:在连续时间金融市场中建立了具有最低保障约束的缴费确定型(DC)企业年金资产配置模型,选择 Vasicek 模型刻画利率,建立新的随机缴费流模型,选择 CARA 效用函数,在满足企业年金终期财富超过最低保障的约束条件下得到了使终期财富期望效用最大的配置策略,最后对基金的最优策略进行数值模拟分析,分析结果表明最优策略具有生命周期投资风格的特征.

关键词:企业年金;最低保障;随机控制;鞅方法

中图分类号:F830 **文献标志码**:A

企业年金是企业及职工在参加基本养老保险的基础上,自愿建立的补充养老保险制度,主要有缴费确定型(DC)和收益确定型(DB)两种模式,我国主要为完全积累的 DC 型模式.DC 型模式具有便于管理、投资工具选择多样性、发生代际转移少等优点,但存在一个不可忽视的缺陷,即其投资风险主要由参加人自己承担.企业年金的目的是为参加人退休后提供生活保障,对没有约束的 DC 型年金计划,有可能因资本市场下滑或其他因素使年金基金在退休时刻处于极低水平;同时企业年金的投资运营主要由受托人管理,在制度运行之初,参加人(委托人)难以真正自由选择受托人,也难以对受托人构成制约,存在委托代理风险.因此,在 DC 型企业年金的投资管理中可考虑建立最低保障约束,避免因管理不善造成收益过低的风险.

关于最低保障约束下年金基金的投资决策问题,目前国内仅有文献[1]对基金最低收益保障下的资产配置问题进行探索,但只分析了两类资产下的配置策略.国外对此问题的研究亦不深入,仅有文献[2-4]分别研究了最低保障约束下 DC 型年金的最优设计和资产配置问题,但其缴费流模型构建上存在不足,在文献[2]的研究中缴费流是一个确定的过程,与现实不符,在文献[3-4]的研究中,缴费流模型虽用随机过程刻画,但没建立和工资模型之间的联系.针对上述问题,本文建立与工资模型关联的随机缴费流模型,对具有最低保障约束的年金基金资产配置问题进行探讨,是现有研究的进一步拓展.

企业年金基金投资策略选择问题的研究方法主要有两种:一种是随机控制方法,该方法首次由文献[5]采用,该类研究还有文献[6-9].另一种方法由文献[10]提出,该方法为鞅方法,适用于完全金融市场,运用此类方法的研究有文献[2-3,11]等.本文在连续时间金融市场中用鞅方法研究带有最低保障约束的 DC 型企业年金资产配置问题.创新之处在于构建了一个基于随机工资模型的缴费流模型,在利率和缴费流都是随机的情况下,得到了投资在各资产上的最优配置策略.

1 模型建立

假设金融市场中有 3 种资产:无风险资产、股票和债券,基金管理者的决策目标是在退休时刻财富不低于最低保障约束下选择使终期财富期望效用最大的资产配置策略.

收稿日期:2018-12-27;**修回日期**:2019-07-12.

基金项目:国家社科基金(18BJY247);教育部人文社会科学研究规划基金(16YJA790063);河南省高等学校重点科研项目(15A110031).

作者简介:翟永会(1982-),女,河南新乡人,河南师范大学副教授,博士,研究方向为金融风险管理,资产配置管理,E-mail:zhaiyonghui2006@163.com.

通信作者:高清慧,E-mail:qinghyugaocb@163.com.

1.1 金融市场模型

考虑一个无套利、无摩擦、连续时间的金融市场，金融市场的不确定性主要由定义在概率空间 (Ω, F, P) 上两个独立的布朗运动 $W_r(t)$，$W(t)$ 来刻画.这里，$\{F(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是布朗运动生成的滤子流，P 代表历史概率测度.滤子 $F(t)$ 代表时刻 t 可以获得的信息集.年金管理者在 3 种资产上进行投资：无风险资产（银行存款）、债券和股票，以下给出利率、债券和股票价格模型.

1.1.1 利率模型

采用 Vasicek 模型来刻画利率，利率是一个 Orstein-Uhlenbeck 过程，记 $r(t)$ 表示瞬时无风险利率，则 $r(t)$ 满足如下随机微分方程：$\mathrm{d}r(t)=a(b-r(t))\mathrm{d}t+\sigma_r\mathrm{d}W_r(t)$，$r(0)=r_0$，其中 a，b，σ_r 为常数，利率表现出均值回复的特征，参数 b 代表吸引利率回复的均值水平，a 表示均值回复的速度，$W_r(t)$ 用来刻画利率的不确定性，σ_r 代表利率的波动率.

无风险资产（银行存款）价格过程 S_0 满足如下方程：

$$S_0(t)=\exp\{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\},S_0(0)=1. \tag{1}$$

1.1.2 债券模型

记期限为 T 的零息票债券在 t 时刻的价格为 $B(t,T)$，则对任意 $t\in[0,s]$，$B(t,T)$ 满足如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}B(t,s)}{B(t,s)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_B(s-t)(W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t),B(s,s)=1,$$

其中参数 λ_r 为常数，表示债券的溢价水平，σ_B 表示债券的波动率.由 Vasicek 短期利率模型可知，期限为 τ 的零息票债券的波动率应为 $\sigma_B(\tau)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-a\tau}}{a}\sigma_r$.

事实上，要找出市场上所有的零息票债券是不现实的，由于利率模型是一个单因素模型，故只需要找出一种零息票债券就可以复制出其他的任意一种.考虑到滚动债券的期限 K 是一个常数，故本文选择滚动债券(Rolling bond)作为债券市场的代表，期限为 K 的滚动债券在 t 时刻的价格 $B_K(t)$满足如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}B_K(t)}{B_K(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_K(s-t)(W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t), \tag{2}$$

其中 σ_K 表示滚动债券的波动率，且 $\sigma_K=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-aK}}{a}\sigma_r$.

1.1.3 股票模型

假设市场上股票在 t 时刻价格 $S(t)$服从几何 Brown 运动：

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_1(W(t)+\lambda\mathrm{d}t)+\sigma_2(W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t), \tag{3}$$

其中 $W(t)$ 用来刻画股票市场的不确定性，σ_1 表示股票市场的不确定性引起股票价格的波动率，σ_2 表示债券市场的不确定性引起股票市场的波动率.$W_r(t)$，$W(t)$ 相互独立，λ 表示股票的风险溢价水平，若 $\sigma_2>0$，则表示股票市场和债券市场相关并且对利率敏感.

1.2 企业年金的管理

1.2.1 企业年金的缴费流模型

不同于经典资产组合管理模型，企业年金基金投资过程中一直有缴费不断注入，研究企业年金的投资问题需要建立缴费流模型.记缴费流 $C(t)$表示缴费者在时刻 t 投入到企业年金基金中的现金流，考虑到现实中缴费往往是工资的一个固定比例，本文首先建立一个随机工资模型.

假设 t 时刻缴费者的工资水平 $L(t)$满足如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{L(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_3(W(t)+\lambda\mathrm{d}t)+\sigma_4(W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t), \tag{4}$$

其中，σ_3，σ_4 表示波动率水平因子，分别表示股票市场和利率的波动对工资波动的影响.

设定 t 时刻缴款人支付的缴费 $C(t)$为其工资的一个固定比例 m，即

$$C(t)=mL(t). \tag{5}$$

1.2.2 企业年金的最低保障

假设 0 时刻表示参与者参加企业年金的时间,T 时刻代表参与者的退休时间,T' 是死亡时间,年金的最低保障 $G(T)$定义如下:

$$G(T)=\int_T^{T'} f(s)B(T,s)\mathrm{d}s,$$

其中 $f(t)$ 是退休后 t 时刻最小瞬时年金函数.假设 g 表示通货膨胀率,则 $f(t)=f(T)\mathrm{e}^{g(t-T)}$,$\forall t\in[T,T']$.

1.2.3 企业年金基金的财富过程

记 $X(t)(\forall t\in[0,T]$ 为企业年金基金的财富过程,$\alpha_0(t)$,$\alpha_S(t)$,$\alpha_K(t)$ 分别表示 t 时刻投资在银行存款、股票和债券上的资金,可知

$$\alpha_0(t)+\alpha_S(t)+\alpha_K(t)=X(t),\forall t\in[0,T],\text{a.s.} \tag{6}$$

同时可得 $X(t)$满足如下方程:

$$\mathrm{d}X(t)=\alpha_0(t)\frac{\mathrm{d}S^0(t)}{S^0(t)}+\alpha_S(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+\alpha_K(t)\frac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)}+m\mathrm{d}L(t).$$

把(1)～(5)式代入到上式,再结合(6)式可得:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t)=&r(t)(mL(t)+X(t))\mathrm{d}t+\alpha_S(t)[\sigma_1(\mathrm{d}W(t)+\lambda\mathrm{d}t)+\sigma_2(\mathrm{d}W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t)]+\\&\alpha_K(t)\sigma_K(\mathrm{d}W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t)+mL(t)[\sigma_3W(t)+\lambda\mathrm{d}t)+\sigma_4(W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t)].\end{aligned} \tag{7}$$

财富过程 $X(t)$ 必须满足两个约束条件:首先,因为在0时刻企业年金基金初始财富为0,所以 $X(0)=0$;另外,在退休时刻,基金财富必须不少于最低保障,故有 $X(T)\geq G(T)$.

1.2.4 基金管理者投资的优化准则

选择终期财富的期望效用最大化为企业年金投资决策的优化准则,其中效用函数 u 为 CRRA 函数,年金基金管理者的决策目标是在终期财富大于最低保障的约束下选择使终期财富效用最大化的配置策略.

CRRA 效用函数为

$$u(x)=\frac{x^\gamma}{\gamma},\forall x\geq 0,\gamma<1\text{ 且 }\gamma\neq 0,$$

其中 γ 为一常数,代表风险厌恶指数.

则本文所需要解决的最优资产配置问题即为如下优化问题:

$$\begin{aligned}&\max_{\alpha_S,\alpha_K}E[u(X(T)-G(T))],\\&\qquad\mathrm{d}X(t)=r(t)(mL(t)+X(t))\mathrm{d}t+\alpha_S(t)[\sigma_1(\mathrm{d}W(t)+\lambda\mathrm{d}t)+\sigma_2(\mathrm{d}W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t)]+\\&\qquad\alpha_K(t)\sigma_K(\mathrm{d}W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t)+mL(t)[\sigma_3(W(t)+\lambda\mathrm{d}t)+\sigma_4(W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t)],\\&\text{s.t.}\qquad X(0)=0,X(T)\geq G(T).\end{aligned} \tag{8}$$

2 最优资产配置策略的求解

对于优化问题(8)的求解分 4 步来解决.因为企业年金基金在运行过程中不断有缴费流注入,其投资过程不是一个自融资的过程,所以第 1 步是引入贷款 $D(t)$把基金投资由一个非自融资过程转化为一个自融资过程,并求出 $D(t)$的复制策略;又因为在优化模型中有一个终期财富不小于最低保障的约束,所以第 2 步是求出复制 $G(T)$的策略把有约束的优化问题转化为一个无约束的优化问题;第 3 步是求解无约束的优化问题;第 4 步是总结前 3 步得到总的最优配置策略.

2.1 贷款的复制策略

为了把投资变成一个自融资的过程,首先在基金中加入一个对应未来缴纳的缴费额的贷款,这些贷款可以用未来对应的缴费偿还,记为 $D(t)$,

$$D(t)=-\int_t^T C(s)B(t,s)\mathrm{d}s, \tag{9}$$

从实践的观点来看,$D(t)$可以用银行存款(现金)、滚动债券及股票组成的混合策略来复制,求得复制策略

如下：

$$\alpha_S^D=-\int_t^T C(s)B(t,s)\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\mathrm{d}s,\alpha_K^D(t)=-\int_t^T C(s)B(t,s)\frac{\sigma_B(s-t)}{\sigma_K}\mathrm{d}s,\alpha_0^D(t)=D(t)-\alpha_S^D(t)-\alpha_K^D(t),\tag{10}$$

其中 $\alpha_S^D(t),\alpha_K^D(t),\alpha_0^D(t)$ 表示复制 $D(t)$ 的策略分别投资在股票、债券和银行存款上的资金.

因为缴费流的价值恰好可以偿还 $D(t)$，那么剩下的另一部分投资是一个自融资过程，其财富过程记为：

$$Y(t)=X(t)-D(t),1\leq t\leq s\leq T.\tag{11}$$

由 $D(t)$ 定义可得：$Y(0)=Y_0=\int_0^T C(t)B(0,t)\mathrm{d}t,Y(T)=X(T)$.

由(1)～(5)式及(11)式可得：

$$\mathrm{d}Y(t)=r(t)Y(t)\mathrm{d}t+\alpha_s^Y(t)[\sigma_1(\mathrm{d}W(t)+\lambda\mathrm{d}t)]+[\sigma_2(\mathrm{d}W_r(r)+\lambda_r\mathrm{d}t)]+\alpha_K^Y(t)\sigma_K(\mathrm{d}W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t),$$

其中 $\alpha_S^Y(t),\alpha_K^Y,\alpha_0^Y(t)$ 表示 $Y(t)$ 分别投资在股票、债券和银行存款上的资金，由(10)式和 $D(t)$ 的复制策略可知：$\alpha_S^Y=\alpha_S(t)-\alpha_S^D(t),\alpha_K^Y(t)=\alpha_K(t)-\alpha_K^D(t),\alpha_0^Y(t)=\alpha_0(t)-\alpha_0^D(t)$.

$Y(t)$的最优配置策略可以通过求解下面的优化模型得到

$$\begin{aligned}&\max_{\alpha_S^Y,\alpha_S^Y}E[u(Y(T)-G(T))],\\&\text{s.t.}\quad Y(0)=Y_0,\\&\qquad Y(t)\geq G(T).\end{aligned}\tag{12}$$

2.2　最低保障的复制策略

为了把有约束的优化问题(12)转化为一个无约束的优化问题，首先从 $Y(t)$ 中拿出一部分资金来复制 $G(T)$，因为 $G(t)=\int_T^{T'}f(s)B(t,s)\mathrm{d}s$，可求得复制策略为：

$$\alpha_K^G=\int_T^{T'}f(s)B(t,s)\frac{\sigma_B(s-t)}{\sigma_K}\mathrm{d}s,\alpha_0^G(t)=G(t)-\alpha_K^G(t),$$

其中，$\alpha_K^G(t),\alpha_0^G(t)$ 为复制 $G(T)$ 的策略分别投资在债券和现金存款上的资金.

$Y(t)$中去除复制 $G(t)$之后的部分记为基金 $Z(t)$，可知 $Z(t)$的投资是一个无约束自融资的投资过程，且有如下关系：

$$Z(t)=Y(t)-G(t)=X(t)-D(t)-G(t).\tag{13}$$

由(1)～(5)式及(13)式可得：

$$\mathrm{d}Z(t)=r(t)Z(t)\mathrm{d}t+\alpha_S^Z(t)[\sigma_1(\mathrm{d}W(t)+\lambda\mathrm{d}t)+\sigma_2(\mathrm{d}W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t)]+\alpha_K^Z(t)\sigma_K(\mathrm{d}W_r(t)+\lambda_r\mathrm{d}t),$$

其中，$\alpha_S^Z(t),\alpha_K^Z(t),\alpha_0^Z(t)$ 分别表示 $Z(t)$ 投资在股票、债券和银行存款上的资金，由(12) 式及 $D(t),G(t)$ 的复制策略可知有如下关系：

$$\begin{aligned}\alpha_S^Z(t)&=\alpha_S^Y(t)=\alpha_S(t)-\alpha_S^D(t),\\\alpha_K^Z(t)&=\alpha_K^Y(t)-\alpha_K^G=\alpha_K(t)-\alpha_K^G(t)-\alpha_K^D(t),\\\alpha_0^Z(t)&=\alpha_0^Y(t)-\alpha_0^G=\alpha_0(t)-\alpha_0^G(t)-\alpha_0^D(t).\end{aligned}\tag{14}$$

2.3　基金的最优配置策略

基金 $Z(t)$最优配置问题即为无约束优化问题：

$$\begin{aligned}&\max_{h_S(t),h_K(t)}E(u(Z(X)))],\\&\text{s.t}\quad Z(0)=Z_0,\\&\qquad Z(T)\geq 0.\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $h_S(t),h_K(t)$为基金 $Z(t)$分别投资在股票和债券上的财富比例.由(13)式及 $D(t),G(t)$的定义可知：

$$Z_0=\int_0^T C(t)B(0,t)\mathrm{d}t-\int_T^{T'}f(t)B(0,t)\mathrm{d}t.$$

优化问题(14)的求解分两步，定理 1 的证明是求解(15)的第一步，它给出了相关优化问题的最优解.

定理 1　对于优化问题

$$\max_{h_1(t),h_2(t)} E[u(Z(T))],$$
$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = r(t)dt + h_1(t)(dW(t)+\lambda dt) + h_2(t)(dW_r(t)+\lambda_r dt),$$
$$\text{s.t.}\quad Z(0)=Z_0, Z(T)\geq 0.$$

其最优解为

$$h_1(t)=\frac{\lambda}{1-\gamma}, h_2(t)=\frac{\lambda_r}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}\sigma_B(T-t). \tag{16}$$

证明 假设 $d\tilde{Z}(t) \xlongequal{def} dZ(t)/Z(t)$，其中 $\tilde{Z}$ 是一个半鞅，因为

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = r(t)dt + h_1(t)(dW(t)+\lambda dt) + h_2(t)(dW_r(t)+\lambda_r dt),$$

所以目标函数等价于

$$E[Z(T)^\gamma] = Z_0^\gamma E[\exp(\gamma\tilde{Z}(T)-\frac{1}{2}\gamma)\langle\tilde{Z}\rangle_T], \tag{17}$$

同时可得：

$$d\tilde{Z}(t) = r(t)dt + h_1(t)(dW(t)+\lambda dt) + h_2(t)(dW_r(t)+\lambda_r dt).$$

由上式可得：

$$\tilde{Z}(T)=\int_0^T r(t)dt + \int_0^T h_1(t)(dW(t)+\lambda dt) + \int_0^T h_2(t)(dW_r(t)+\lambda_r dt),$$

因此有下式成立：

$$\gamma\tilde{Z}(T)-\frac{\gamma}{2}\langle\tilde{Z}\rangle_T = \gamma\int_0^T h_1(t)dW(t) + \gamma\int_0^T h_2(t)dW_r(t) +$$
$$\int_0^T [-\frac{\gamma}{2}(h_1^2(t)+h_2^2(t)+\gamma(r(t)+h_1(t)\lambda+h_2(t)\lambda_r)]dt.$$

又因为

$$dr(t)=a(b-r(t))dt-\sigma_r dW_r(t),$$

设 $H(t)=-at, dN(t)=ab\,dt-\sigma_r dW_r(t)$，则有

$$dr(t)=r(t)dH(t)+dN(t),$$

解之可得：

$$r(t)=e^{H(t)}(r_0+\int_0^t e^{-H(s)}dN(s))=(r_0-b)e^{-at}+b-\sigma_r\int_0^t e^{a(s-t)}dW_r(s).$$

把 $H(t), dN(t)$ 代入可得：

$$\int_0^T r(t)dt = C_1 - \int_0^T g_1(t)dW_r(t),$$

其中

$$C_1(r_0-b)\frac{1-\exp(-aT)}{a}+bT=(r_0-b)\frac{\sigma_B(T)}{\sigma_r}+bT,$$
$$g_1(t)=\sigma_r\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}=\sigma_B(T-t).$$

由拟鞅可选定理知

$$\gamma\tilde{Z}(T)-\frac{1}{2}\gamma\langle\tilde{Z}\rangle_T \xlongequal{def} M_T-\frac{1}{2}\langle M\rangle_T + A_T, \tag{18}$$

其中 M 是一个鞅，而 A 是一个如下递增过程

$$A_T=\gamma C_1+\gamma\int_0^T(\lambda h_1(t)-\frac{1-\gamma}{2}h_1^2(t))dt+\gamma\int_0^T(\lambda_r h_2(t)-\frac{1}{2}h_2^2(t)+\frac{\gamma}{2}(h_2(t)-g_2(t))^2)dt,$$
$$M_T=\gamma\int_0^T h_1(t)dW(t)+\gamma\int_0^T(h_2(t)-g_1(t)dW_r(t)),$$

由(17)、(18)式可知，目标函数可表示为

$$E[Z(T)^{\gamma}]=Z_0^{\gamma}E[\exp(M_T-\frac{1}{2}\langle M\rangle_T+A_T)].$$

又因为

$$E[\exp(M_T-\frac{1}{2}\langle M\rangle_T)]=1,$$

所以只需要找出使得 A_T 最大的 $h_1(t)$，$h_2(t)$ 即是定理 1 中优化问题的最优解，则由一阶必要条件可得

$$h_1(t)=\frac{\lambda}{1-\gamma},h_2(t)=\frac{\lambda_r}{1-\gamma}-\frac{\gamma}{1-\gamma}\sigma_B(T-t).$$

在定理 1 的基础上可以得到推论 1，推论 1 给出了问题(13)的最优解.

推论 1　最优策略 $Z(t)$ 为

$$h_S(t)=\frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma_1},h_K(t)=\frac{\lambda_r\sigma_1-\lambda\sigma_2}{(1-\gamma)\sigma_1\sigma_K}-\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\sigma_B(T-t)}{\sigma_K},h_0(t)=1-h_s(t)-h_K(t),$$

其中，$h_0(t)$，$h_S(t)$，$h_K(t)$ 是最优策略分别投资在股票和债券上的财富比例.

证明　因为 $h_S(t)$，$h_K(t)$ 是 $Z(t)$ 分别投资在股票和债券上的财富比例，所以

$$h_S(t)\sigma_1=h_1(t),h_S(t)\sigma_2+h_K(t)\sigma_K=h_2(t). \tag{19}$$

把(15)式代入到(19)式中可得：

$$h_S(t)=\frac{\lambda}{(1-\gamma)\sigma_1},h_K(t)=\frac{\lambda_r\sigma_1-\lambda\sigma_2}{(1-\gamma)\sigma_1\sigma_k}-\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\sigma_B(T-t)}{\sigma_K}.$$

2.4　企业年金基金 $X(t)$ 的最优配置策略

假设用 $Z(t)$ 的最优配置策略进行投资得到的财富过程记为 $Z^*(t)$，可知

$$Z^*(t)=X(t)-G(t)-D(t). \tag{20}$$

所以，由(13)式可得，企业年金基金 $X(t)$ 投资在 3 种资产上的资金等于 $D(t)$ 及 $G(t)$ 的复制策略和基金 $Z(t)$ 的最优配置策略分别投资在 3 种资产上的资金之和，其中

$$\alpha_S(t)=h_SZ^*(t)+\alpha_S^D(t),$$
$$\alpha_K(t)=h_K(t)Z^*(t)+\alpha_K^D(t)+\alpha_K^G(t),$$
$$\alpha_0(t)=h_0(t)Z^*(t)+\alpha_0^D(t)+\alpha_0^G(t).$$

此即为优化问题(8)的最优解，也是年金基金 $X(t)$ 在 3 种资产上的最优配置策略.

3　数值模拟分析

以下对理论模型所得到的最优资产配置策略进行数值模拟分析，市场模型及缴费率模型中所涉及参数如表 1 所示.

文中设定个体参加工作的年龄为 20 岁，退休年龄为 60 岁，工作期(年金基金积累期)$T=40$ 年；根据第六次全国人口普查详细汇总资料，2010 年我国人口平均预期寿命为 74.83 岁，而国家统计局资料显示，2010 年高收入国家及地区为 79.8 岁，考虑到随着生活水平和医疗条件的提高，人的预期寿命会增加，因此设定退休后的平均余寿 $T'-T=20$ 年；世界银行认为，公共养老金(在我国为基本养老金)和企业年金的目标替代率水平分别为 40%左右、30%较为适宜，故文中设定企业年金对应最低保障的目标替代率为 25%；文中风险厌恶指数 $\gamma=-1$(对应的风险厌恶系数为 2).

以下对最优资产配置策略进行数值模拟分析，考察积累期配置策略的在各资产上逐年的配置数量(相对于退休最后一年工资水平的份额)均值、配置权重的均值及其动态调整趋势.在设定的情形下进行 1 000 次蒙特卡洛模拟，模拟程序由 MATLAB7.0 编制，图形由 Excel 2007 实现.

由图 1、图 2 可得如下结论：

(1)基金在投资的中前期总是通过短期贷款融资，并将所融通的资金投资于债券，直至投资期结束的前 10 年减少短期贷款，临近退休期的前 7 年开始卖出债券、持有短期存款；债券的持有数量先持续增加直至投

资后期,临近退休前减持债券、数量急速递减;股票的持有数量在整个投资期呈光滑递增趋势.

(2)股票的配置权重逐年递减,这和生命周期投资风格一致;债券的配置权重和持有数量在三类资产中最高,但随着投资年限的增加其配置权重也呈递减趋势;越临近退休,持有的现金数量越多,其配置权重呈逐年递增趋势,但观察投资后期几年可知,即使临近退休,基金仍然采取分散化投资策略,并没有将资金完全配置于某一类资产.

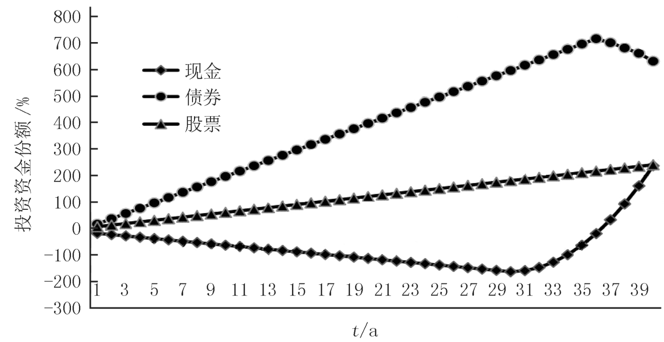

图1　最优资产配置策略逐年配置在各类资产上的资金份额均值趋势图

Fig.1　Strategies of optimal asset configuration strategies for annual parts of funds on different types of assets

表1　模型参数设定

Tab.1　Model parameter setting

利率模型参数		债券模型参数	
均值回复速度 a	20.0%	债券期限 K	20.00
利率均值水平 b	3.5%	短期风险溢价 $\sigma_K\lambda_r$	1.50%
利率波动率 σ_r	2.0%	债券波动率 σ_K	9.82%
初始利率 r_0	5.0%	债券风险溢价水平 λ_r	15.28%
缴费流模型参数		**股票模型参数**	
短期风险溢价 $\sigma_w\lambda_r$	1%	与利率的相关系数 σ_2/σ_S	30.00%
基于债券市场波动的波动率 $\sigma_4\lambda_r$	3%	股票市场的波动率 σ_S	20.00%
基于股票市场的波动率 $\sigma_3\lambda_r$	2%	股票风险溢价水平 $\lambda_S\sigma_S$	30.00%
初始工资水平 w_0	100	基于债券市场波动的波动率 σ_2	6.00%
缴费比例 m	8%	股票风险溢价水平 λ_S	30.00%
——		基于股票市场的波动率 σ_1	19.08%
——		基于股票市场波动的风险溢价 λ	26.64%

注:(1)表中 $\sigma_K=(1-\mathrm{e}^{-ak})/a\sigma_r$, $\sigma_2=\sigma_S\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_S}\right)$, $\sigma_1=(\sigma_S^2-\sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}$, $\lambda=\frac{\lambda_S\sigma_S-\lambda_r\sigma_2}{\sigma_1}$.(2)表中参数设定部分借鉴文献[2]设定.

4　结束语

本文研究了最低保障约束下,企业年金财富终值期望效用最大化的资产配置问题.贡献主要有两方面:一是构建了三类资产上(现金、债券和股票)的资产配置优化模型,较易被实际决策所采用;二是在随机缴费流和随机利率的基础上构建资产配置模型,可望得到更科学的优化配置策略.但本文的不足在于得到的策略是一个现金空头策略,这在基金的实际运营中往往受限,虽可利用远期合约帮助实现,但若实际市场不存在相应的金融产品时则优化模型需加上一个非负约束.

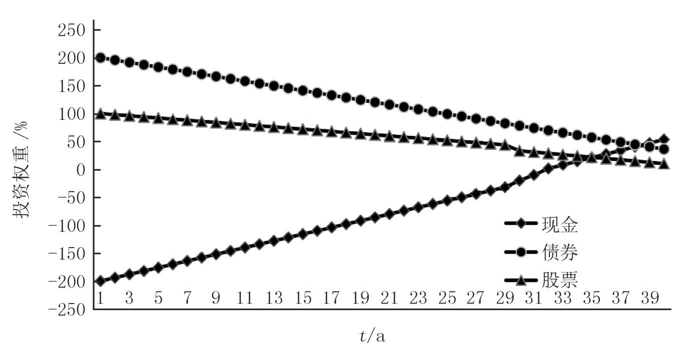

图2　最优资产配置策略逐年配置在各类资产上的权重均值趋势图

Fig.2　Optimal asset configuration strategy for an annual weight value trends in different types of assets

在未来研究中,对于该问题可作如下探索:(一)金融市场模型的拓展,刻画利率、债券和股票价格的模型

很多,目前的研究大多在经典模型假设下进行,下一步研究可在其他利率模型(如仿射模型)和股票价格模型(如随机波动率模型)下展开;(二)在不同的优化准则下探讨 DC 型年金的资产配置问题,不同的优化准则对应着基金管理者不同的决策目标,设计不同的方案,根据年金设计方案的不同调整优化准则也是一个研究方向;(三)随机寿命的引入,目前年金投资决策问题的研究中,往往设定参与人的寿命是确定的,而现实中寿命具有随机特征,未来研究可考虑随机寿命的引入.

参　考　文　献

[1] 刘富兵,刘海龙,周颖.养老基金最低收益保证制度下的最优资产配置-来自中国 1998-2008 年数据的模拟分析[J].财经研究,2008(9):113-121.
LIU F B,LIU H L,ZHOU Y.The optimal asset allocation under the minimum income guarantee system of Pension Fund:Simulation analysis of data from 1998 to 2008 in China[J].Journal of Finance and Economics,2008(9):113-121.

[2] BOULIER J F,HUANG S,TAILLARD G.Optimal management under stochastic interest rates:The case of a protected defined contribution pension fund[J].Insurance:Mathematics and Economics,2001,28:173-189.

[3] DEELSTRA G,GRASSELLI M,KOEHL P F.Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee[J].Insurance:Mathematics and Economics,2003,33:189-207.

[4] DEELSREA G,GRASSELLI M,KOEHL P F.Optimal design of the guarantee for defined contribution funds[J].Journal of Economic Dynamics and Control,2004,28:2239-2260.

[5] MERTON R.Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time Model[J].Journal of Economic Theory,1971,3:373-413.

[6] HABERMAN S,VIGNA E.Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes[J].Insurance:Mathematics and Economics,2002,31:35-69.

[7] GAO J W.Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance(CEV)model[J].Insurance:Mathematics & Economics,2009,45:9-18.

[8] GAO J W.An extended CEV model and the Legendre transform dual asymptotic solutions for annuity contracts[J].Insurance:Mathematics & Economics,2010,46:511-530.

[9] 翟永会,王晓芳,闫海峰.企业年金积累期的最优动态资产配置策略[J].中国管理科学,2010(5):40-48.
ZHAI Y H,WANG X F,YAN H F.Optimal dynamic asset allocation strategy in the accumulation period of enterprise annuity[J].Chinese Journal of Management Science,2010(5):40-48

[10] COX J C,HUANG C F.Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J].Journal of Economic Theory,1989,49:33-83.

[11] LIANG Z X,MA M.Optimal dynamic asset allocation of pension fund in mortality and salary risks framework[J].Insurance:Mathematics and Economics,2015,64:151-161.

Optimal investment strategies for DC occupational pension fund based stochastic contribution flow model:under the constraint of a minimum guarantee

Zhai Yonghui[a],Wang Yiwei[a],Gao Qinghui[b]

(a.Business School;b.College of Mathematics and Information Science,Henan Normal University,Xinxiang 453007,China)

Abstract: In this paper,the asset allocation model for DC occupational pension fund with the minimum guarantee constraint in the continuous time financial market is established.The paper selects Vasicek model to describe interest rates and constructs a new stochastic contribution flow model.We choose CRRA as the utility function and obtains the optimal strategies that maximize the expected utility of the terminal wealth under the constraint of a minimum guarantee.Finally,the analysis of numerical simulation for the optimal strategies have been given,and the results show that the optimal strategies have the same feature as life cycle investment style.

Keywords:occupational pension fund;minimum guarantee;stochastic optimal control;martingale method

[责任编校　陈留院　赵晓华]