文章编号:1000-2367(2015)04-0021-05 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.04.004

非交换子群的交较大的有限 p 群

李璞金,曹陈辰

(山西师范大学 数学与计算机科学学院,山西 临汾 041004)

摘 要:在有限 p 群中引进另一个新的子群概念 $-\mathrm{I}_{\mathscr{A}_k}(G)$,即 G 的所有 $\mathscr{A}_k$ 子群的交. $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_k}(G)$ 是 G 的特征子群,并且 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$ 就是群 G 的所有非交换子群的交.对于 p^n 阶群 G 而言,本文完全分类了 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|$ 分别为 p^{n-2} 和 p^{n-3} 的 p^n 阶群 G.

关键词:$\mathscr{A}_k$ 群;有限 p 群;子群的交

中图分类号:O152.1 **文献标志码**:A

利用群的某些子群性质研究群的性质及结构是群论研究的一个常用方法.而正规子群和特征子群在群论研究中起着极其重要的作用.对于有限 p 群 G 而言,两个重要的不同于一般有限群的正规子群就是 $\Omega_k(G)$ 和 $\mho_k(G)$.这里 $\Omega_k(G)=\langle a\in G \mid a^{p^k}=1\rangle$,$\mho_k(G)=\langle a^{p^k} \mid a\in G\rangle$.它们在有限 p 群研究中起着极其重要的作用.1973 年,M. I. Golovanov[1] 在有限 p 群中引进了一个新的子群概念 $-\mathrm{I}_k(G)$,即有限 p 群 G 的所有 p^k 阶子群的交.容易看出,$\mathrm{I}_k(G)$ 是 G 的一个特征子群. M. I. Golovanov[1] 给出了 $|\mathrm{I}_2(G)|=2$ 的有限 2 群及 $G/\mathrm{I}_k(G)$ 的分类.安立坚等[2] 完全分类了 $|\mathrm{I}_3(G)|=4$ 的有限 2 群,张勤海等[3] 完全分类了 $\mathrm{I}_k(G)\cong C_{p^{k-1}}$ 和 $\mathrm{I}_k(G)\cong C_{p^{k-2}}$ 的有限 p 群($p>2$).

设 G 是有限 p 群.受以上结果的启发,本文引入另一个新的子群概念 $-\mathrm{I}_{\mathscr{A}_k}(G)$,即 G 的所有 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_k}$ 子群的交.所谓 $\mathscr{A}_k$ 群是指群 G 的每个指数为 p^k 的子群都交换,但 G 至少有一个指数为 p^{k-1} 的子群非交换.显然 $\mathscr{A}_1$ 群即为内交换 p- 群.对于 $k\leq 3$,$\mathscr{A}_k$ 已被完全分类,$\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 群分类可见文献[4-5].容易证明,$\mathrm{I}_{\mathscr{A}_k}(G)$ 是 G 的特征子群,并且 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$ 就是群 G 的所有非交换子群的交.

本文目标就是利用 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$ 来研究群 G 的结构.研究了 $|\mathscr{A}_1(G)|$ 与 $\mathscr{A}_k$ 群之间的联系.最后利用 $\mathscr{A}_2$ 和 $\mathscr{A}_3$ 群的分类得到 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|$ 分别为 p^{n-2} 和 p^{n-3} 的群 G,见本文定理 1,定理 2 和定理 3.为方便起见,本文所讨论的群均为非交换的有限 p 群.

1 预备知识

下面介绍本文所要用到的一些概念和结果.基本的概念和符号见文献[6].另外,$G\in\mathscr{A}_k$ 表示 G 是一个 $\mathscr{A}_k$ 群,$\mathscr{B}_p=\{G\mid G$ 的非交换真子群的生成元个数都为 $2\}$,$\mathscr{B}_p'=\{\mathscr{G}\in\mathscr{B}_p\mid G'\neq 1$ 且 $G\notin\mathscr{A}_1\}$,$\mathscr{D}_p=\{G\in\mathscr{B}_p'\mid G$ 有交换极大子群$\}$,$\mathscr{M}_p=\{G\in\mathscr{B}_p'\mid G$ 无交换极大子群$\}$,$\mathscr{D}_p(2)=\{G\in\mathscr{D}_p\mid d(G)=2\}$,$\mathscr{D}_p(3)=\{G\in\mathscr{D}_p\mid d(G)=3\}$,$\mathscr{M}_p=\{G\in\mathscr{M}_p\mid G$ 既非亚循环群又非极大类 3 群$\}$.

引理 1[7] 设 G 为 p 群.若 $G\in\mathscr{D}_p(3)$,则 $G\in\mathscr{A}_2$.

引理 2[7] 设 G 为 p 群.若 $G\in\mathscr{M}_p$ 且 $|G|=p^5$.则 $G\in\mathscr{A}_2$.

引理 3[7] 设 $G\in\mathscr{D}_p(2)$,$c(G)=c$.若 $p=2$,则 G 亚循环.

引理 4[7] 设 $G\in\mathscr{M}'_2$.则 $G\in\mathscr{A}_2$.

收稿日期:2014-09-17;**修回日期**:2015-03-23.

基金项目:国家自然科学基金(11101252)

作者简介(通信作者):李璞金(1983-),男,山西运城人,山西师范大学讲师,博士,主要从事有限 p 群的研究,E-mail:98500767@qq.com.

引理 5[8] 设 G 为有限 p 群，$p>2$. 若 G 的每个极大子群 H 都 $d(H)\le 2$ 且 $d(G)>2$，则 $|G|\le p^5$.

引理 6[6] 设 G 是内交换 p 群. 则 G 为下列互不同构群之一：

(1) Q_8；

(2) $M_p(n,m)=\langle a,b\mid a^{p^n}=b^{p^m}=1,a^b=a^{1+p^{n-1}}\rangle,n\ge 2$.（亚循环）；

(3) $M_p(n,m,1)=\langle ga,b,c\mid a^{p^n}=b^{p^m}=c^p=1,[a,b]=c,[c,a]=[c,b]=1\rangle,n\ge m$.

当 $p=2$ 时，$m+n\ge 3$.（非亚循环）.

引理 7[6] 设 G 是二元生成有限非交换 p 群，则 G 亚循环当且仅当 $\overline{G}=G/\Phi(G')G_3$ 是定理 2.8 中的(1)型群或(2)型群. 又，G 非亚循环当且仅当 $\overline{G}$ 非亚循环，即 $\overline{G}$ 是定理 2.8 的(3)型群，但是要除去 $M_2(1,1,1)\cong D_8$.

引理 8[6] 设 G 是亚循环 p- 群，p 为奇素数. 则

$$G=\langle a,b\mid a^{p^{r+s+u}}=1,b^{p^{r+s+t}}=a^{p^{r+s}},a^b=a^{1+p^r}\rangle,$$

其中 r,s,t,u 是非负整数且满足 $r\ge 1,u\le r$，对于参数 r,s,t,u 的不同取值，对应的亚循环群互不同构. 用 $\langle r,s,t,u\rangle_p$ 来记这个群.

引理 9[6] 设 G 是亚循环 2- 群，它没有循环极大子群. 则 G 有下列类型：

I 型群（通常的亚循环群）：$G=\langle a,b\mid a^{2^{r+s+u}}=1,b^{2^{r+s+t}}=a^{2^{r+s}},a^b=a^{1+2^r}\rangle$. 其中 r,s,t,u 是非负整数且满足 $r\ge 2,u\le r$.

Ⅱ 型群（例外的亚循环群）：$G=\langle a,b\mid a^{2^{r+s+v+t'+u}}=1,b^{2^{r+s+t}}=a^{2^{r+s+v+t'}},a^b=a^{-1+2^{r+v}}\rangle$ 中 r,s,t,t',v,u 是非负整数满足 $r\ge 2,t'\le r,u\le 1,tt'=sv=tv=0$，且若 $t'\ge r-1$ 则 $u=0$.

引理 10[6] 设 $|G|=p^n$，G 有 p^{n-1} 阶循环极大子群 $\langle a\rangle$，则 G 有下述 7 种类型：

(1) p^n 阶循环群：$G=\langle a\rangle,a^{p^{n-1}}=1,n\ge 1$；

(2) (p^{n-1},p) 型的交换群：$G=\langle a,b\mid a^{p^{n-1}}=b^p=1,[a,b]=1\rangle$. $n\ge 2$；

(3) $p\ne 2,n\ge 3,G=\langle a,b\mid a^{p^{n-1}}=b^p=1,[a,b]=a^{p^{n-2}}\rangle$；

(4) 广义四元数群 Q_{2^n}：$n\ge 3,G=\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=1,b^2=a^{2^{n-2}},a^b=a^{-1}\rangle$；

(5) 二面体群 D_{2^n}：$n\ge 3,G=\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=1,b^2=1,a^b=a^{-1}\rangle$；

(6) $n\ge 4,G=\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=1,b^2=1,a^b=a^{1+2^{n-2}}\rangle$；

(7) 半二面体群 SD_{2^n}：$n\ge 4,G=\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=1,b^2=1,a^b=a^{-1}+2^{n-2}\rangle$.

引理 11[9] 设 G 为有限群，$n\trianglelefteq G$. 则 $\Phi(G)N/N\le\Phi(G/N)$.

引理 12[10] 对于亚循环群 G，则 G 为 A_n 群当且仅当 $|G'|=p^n$.

引理 13[11] 设 $G=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$ 是非交换 p 群，$d(G)=n$. 则 G 的极大子群分别是：

$M=\langle\Phi(G),x_2,\cdots,x_n\rangle$，(1 个)

$M_{i_1}=\langle\Phi(G),x_1x_2^{i_1},x_3,\cdots,x_n\rangle$，($p$ 个)

$M_{i_1i_2}=\langle\Phi(G),x_1x_3^{i_1},x_2x_3^{i_2},x_4,\cdots,x_n\rangle$，($p^2$ 个)

$M_{i_1i_2\cdots i_{n-1}}=\langle\Phi(G),x_1x_n^{i_1},x_2x_n^{i_2},x_3x_n^{i_3},\cdots,x_{n-1}x_n^{i_{n-1}}\rangle$，($p^{n-1}$ 个)

其中 $i_j=0,1,\cdots,p-1,j=1,2,\cdots,n-1$.

2 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$ 的一些性质

首先介绍一个有限 p 群的重要结论，见引理 14. 由这个引理得到一些 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$ 的性质，见引理 15.

引理 14 设 G 为非交换的有限 p 群. 则 G 的交换极大子群的个数只能是 0,1 或 $1+p$.

证明 若 G 至少有两个交换极大子群，下证 G 有 $1+p$ 个交换极大子群. 设 M_1,M_2 是 G 的两个交换极大子群. 则可证 $Z(G)=M_1\cap M_2$. 事实上，由于 $G=M_1M_2$，又$[M_1\cap M_2,M_1]=[M_1\cap M_2,M_2]=1$，从而 $M_1\cap M_2\le Z(G)$，又 G 非交换，故 $|Z(G)|\le p^{n-2}$. 又 $|M_1\cap M_2|=|M_1||M_2|/|G|=p^{n-2}$. 于是 $Z(G)=M_1\cap M_2$. 进一步地，由 G 非交换可知 $G/Z(G)\cong C_p\times C_p$. 设 M 是 G 的交换极大子群. 断言 $M\ge Z(G)$. 若否，

则 $G = Z(G)M$，从而 G 交换，矛盾. 显然包含 $Z(G)$ 的极大子群都是交换的. 从而 G 恰有 $1+p$ 个交换极大子群.

引理 15 设 G 是非交换的 p^n 阶群且 $G \notin \mathscr{A}_1$，则

(1) $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$ 交换；

(2) $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| \leq p^{n-2}$；

(3) 若 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-k}(2 \leq k \leq n-2)$，则 $G \in \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \cdots$，或 $\mathscr{A}_k$；

(4) 若 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-k}(2 \leq k)$，则 $d(G) \leq k$.

证明 (1) 若否，由于 $G \notin \mathscr{A}_1$ 知，$\mathrm{I}_{A_1}(G) < G$. 取 G 的非交换子群 M 使 $|M : \mathrm{I}_{A_1}A_1(G)| = p$. 设 $d(M) = d$，则 $d \geq 2$. 设 $H <\cdot M$ 且 $H \neq \mathrm{I}_{A_1}(G)$. 则可证 $H' = 1$. 若否，则 $H \geq \mathrm{I}_{A_1}(G)$. 又 $|M : H| = |M : \mathrm{I}_{A_1}(G)| = p$，比较阶可得 $H = \mathrm{I}_{A_1}(G)$，与 H 的取法相矛盾. 这说明除 $\mathrm{I}_{A_1}(G)$ 外，M 的其余极大子群都交换. 又由引理 13 可知 M 的极大子群的个数为 $1+p+p^2+p^3+\cdots+p^{d-1}$，进而 M 的交换极大子群的个数为 $(1+p+p^2+p^3+\cdots+p^{d-1}-1)$ 个，与引理 14 矛盾.

(2) 若否，由 $G \notin \mathscr{A}_1$ 可得 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}G \neq G$，从而 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-1}$. 又由 $G \notin \mathscr{A}_1$ 可知 G 至少存在一个非交换的极大子群，设为 M. 则 $M \geq \mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$. 比较阶可知 $M = \mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$. 又由(1) 知 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$ 交换. 矛盾.

(3) 对于任意取定的 $k(2 \leq k \leq n-2)$，因为 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-k}$，所有我们断言 G 的所有阶为 p^{n-k} 的子群都交换，于是 $G \in \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \cdots$，或 $\mathscr{A}_k$. 若否，G 存在阶为 p^{n-k} 的非交换子群 H. 显然 $H \geq \mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$. 比较阶可知 $H = \mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$，这与(1) 矛盾.

(4) 不妨设 $d(G) = s > k$. 由引理 13 得，G 的极大子群的个数为 $1+p+p^2+\cdots+p^{s-1}$ 个. 令 $t = 2+p+p^2+\cdots+p^{s-2}$. 由引理 14 知，$G$ 至少有 t 个非交换的极大子群. 设 $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_t$ 为 G 的 t 个非交换的极大子群，N 为这些非交换极大子群的交. 断言 $|N| \leq p^{n-k-1}$. 若否，不妨设 $|N| \geq p^{n-k}$. 由于 $M_i \lhd G$，从而 $N \lhd G$. 考虑 G/N. 由 $|G/N| \geq p^k$ 知，G/N 的极大子群个数不超过 $1+p+\cdots+p^{k-1}$ 个，又 M_i/N 是 G/N 的 t 个极大子群，显然 $t > 1+p+\cdots+p^{k-1}$，得到矛盾. 又 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G) \leq N$，从而 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| \leq |N| \leq p^{n-k-1}$，这与 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-k}$ 矛盾.

3 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|$ 为 p^{n-2} 或者 p^{n-3} 时的有限 p 群的分类

文献[5] 中给出了 $\mathscr{A}_2$ 群的分类，文献[7] 中给出了所有非交换真子群都二元生成的有限 p 群的分类，因此定理 1 即是 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-2}$ 的群 G 的分类，由引理 15(3) 知，当 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1(G)}| = p^{n-3}$ 时，$G \in \mathscr{A}_3$. 因此定理 2 和定理 3 即是 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3}$ 的群 G 的分类.

定理 1 设 G 是 p^n 阶群，则 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-2} \Leftrightarrow G$ 是二元生成的 $\mathscr{A}_2$ 群.

证明 ($\Rightarrow$) 由引理 15(3) 可知 $G \in \mathscr{A}_2$. 由引理 15(4) 可知 $d(G) = 2$.

($\Leftarrow$) 由 $G \in \mathscr{A}_2$ 知 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G) \geq \Phi(G)$. 又由 $d(G) = 2$ 知 $|\Phi(G)| = p^{n-2}$，从而 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| \geq p^{n-2}$. 由引理 15(2) 可得 $|\mathscr{A}_1(G)| = p^{n-2}$.

定理 2 设 G 是 p^n 阶 $\mathscr{A}_2$ 群. 则 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3} \Leftrightarrow d(G) = 3$.

证 ($\Rightarrow$) 若否，则 $d(G) = 2$，由定理 1 可得矛盾. ($\Leftarrow$) 由 $G \in \mathscr{A}_2$ 知 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G) \geq \Phi(G)$，又由 $d(G) = 3$ 知 $|\Phi(G)| = p^{n-3}$，从而 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| \geq p^{n-3}$. 由于 $G \notin \mathscr{A}_1$，根据引理 15(2) 知 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| \leq p^{n-2}$. 由于 $d(G) = 3$，根据定理 1 知 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| \neq p^{n-2}$，从而 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3}$.

引理 16 设 G 是 p^n 阶群. 若 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3}$，则 G 的所有非交换真子群都二元生成.

证明 由于 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3}$，根据引理 15(3) 可知 $G \in \mathscr{A}_2$ 或 $\mathscr{A}_3$. 若 $G \in \mathscr{A}_2$，则 G 的非交换真子群 $H \in \mathscr{A}_1$. 从而引理的结论成立. 下证若 $G \in \mathscr{A}_3$，则结论也成立. 若否，则存在 $M <\cdot G, M \in A_2$ 且 $d(M) = 3$. 由定理 2 知 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(M)| = p^{n-4}$. 又 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(M) \geq \mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)$，于是 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(M)| \geq |\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|$，矛盾.

引理 17 设 G 是 p^n 阶的非亚循环的 $\mathscr{A}_3$ 群，$p > 2$. 若 G 的任一 $\mathscr{A}_2$ 子群 H 满足 $d(H) = 2$，则 $\Phi(H) = \mho_1(G)\Phi(G')G_3$.

证明 显然 G 的所有非交换真子群都二元生成. 因此 $G \in \mathscr{B}_p$. 显然 $d(G) = 2$ 或 $d(G) = 3$.

下证 $d(G)\neq 3$. 若否,分两种情况讨论. 情况 1:设 G 有交换极大子群. 即 $G\in\mathscr{D}_p(3)$. 由引理 1 知 $G\in\mathscr{A}_2$,与 $G\in\mathscr{A}_3$ 矛盾. 情况 2:设 G 无交换极大子群. 由 $d(G)=3$ 知 G 非极大类群且 G 非亚循环群,于是 $G\in\mathscr{M}_p$. 由 $G\in\mathscr{A}_3$ 知 $|G|\geq p^5$. 又由引理 2 可得 $|G|\neq p^5$,从而 $|G|\geq p^6$. 由于 G 无交换极大子群,从而 G 的所有极大子群都二元生成. 又 $p>2$,根据引理 5 可知 $|G|\leq p^5$. 与 $|G|\geq p^6$ 矛盾.

下设 $d(G)=2$. 令 $\bar{G}=G/\Phi(G')G_3$. 显然 $\bar{G}$ 是内交换群. 由于 G 是二元生成的非亚循环群,因此根据引理 7 可设 $\bar{G}=\langle\bar{a},\bar{b}\mid\bar{a}^{p^{n_1}}=\bar{b}^{p^{m_1}}=\bar{c}p=1,[\bar{a},\bar{b}]=\bar{c},[\bar{a},\bar{c}]=[\bar{b},\bar{c}]=1\rangle$. 则有 $G/\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3\cong\bar{G}/\overline{\upsilon_1(G)}=\bar{G}/\upsilon_1(\bar{G})$. 因为 $p>2$,于是有 $\upsilon_1(\bar{G})=\langle\bar{a}^p,\bar{b}^p\rangle$,从而有 $|\upsilon_1(\bar{G})|=p^{n_1+m_1-2}$,进而有 $|G/\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3|=p^3$,于是 $G/\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3\cong\bar{G}/\overline{\upsilon_1(G)}$ 是方次数为 p 的 p^3 阶内交换群,故而 $H/\Phi_1(G)\backslash\Phi(G')G_3$ 是 p^2 阶的初等交换 p 群. 由引理 11 得 $\Phi(H)\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3/\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3\leq\Phi(H/\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3)=1$. 因此 $\Phi(H)\leq\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3$. 由 $H<\cdot G$ 且 $d(H)=2$ 知 $|\Phi(H)|=p^{n-3}$. 又 $|G/\upsilon_1(G)\backslash\Phi(G')G_3|=p^3$,比较阶知 $\Phi(H)=\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3$.

定理 3　设 G 是 p^n 阶 $\mathscr{A}_3$ 群. 则

(1) 若 G 非亚循环,则 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|=p^{n-3}\Leftrightarrow G$ 是所有非交换真子群都二元生成的群.

(2) 若 G 亚循环,则 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|=p^{n-3}G$ 是下列群之一:D_{32},Q_{32},SD_{32},有交换极大子群的例外亚循环.

证明　(1) $(\Rightarrow)$ 由引理 16 可知.

$(\Leftarrow)$ 下证 G 不是 2 群. 若否,设 G 是 2 群. 显然 $G\in\mathscr{D}_2$ 或 $\mathscr{M}_2$. 若 $G\in\mathscr{D}_2$,由于 G 的所有非交换真子群都二元生成,从而 $d(G)=2$ 或 3. 因此 $G\in\mathscr{D}_2(2)$ 或 $\mathscr{D}_2(3)$. 若 $G\in\mathscr{D}_2(3)$,由引理 3 可得矛盾. 若 $G\in\mathscr{D}_2(2)$,由引理 3 可得矛盾. 若 $G\in\mathscr{M}_2$,由于 G 非亚循环,则 $G\in\mathscr{M}_2$. 由引理 4 可得矛盾.

由于 $G\in\mathscr{A}_3$,根据引理 15(2) 可得 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|\leq p^{n-2}$. 又由定理 1 知 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|\leq p^{n-3}$. 设 S 为 G 的所有 $\mathscr{A}_2$ 子群组成的集合. 则 $\mathrm{I}_{\mathscr{A}1}(G)\geq\Phi(G)\cap(\bigcap_{M\in S}\Phi(M))$. 设 H 是 G 的一个 $\mathscr{A}_2$ 子群. 由 G 不是 2 群,根据引理 17 可得 $\bigcap_{M\in S}\Phi(M)=\Phi(H)=\upsilon_1(G)\Phi(G')G_3$. 显然 $|\Phi(H)|=p^{n-3}$. 从而 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|\geq|\Phi(G)\cap\Phi(H)|=|\Phi(H)|=p^{n-3}$,故 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|=p^{n-3}$.

(2)$(\Rightarrow)$ 引理 8,9,10 给出了非循环的亚循环群的分类. 由引理 12 知,G 是下列 4 类群之一.

(i) 奇素数亚循环 $\mathscr{A}_3$ 群:

$G=\langle a,b\mid a^{p^{r+3}}=1,b^{p^{r+s+t}}=a^{p^{r+s}},a^b=a^{1+p^r}\rangle$,其中 r,s,t 为非负整数且 $r\geq 1$.

(ii) 通常亚循环 $\mathscr{A}_3$-2 群:

$G=\langle a,b\mid a^{2^{r+3}}=1,b^{2^{r+s+t}}=a^{2^{r+s}},a^b=a^{1+2^r}\rangle$,其中 r,s,t 为非负整数且 $r\geq 2$.

(iii) 例外亚循环 $\mathscr{A}_3$-2 群:

$G=\langle a,b\mid a^{2^{r+s+v+t'+u}}=1,b^{2^{r+s+t}}=a^{2^{r+s+v+t'}},a^b=a^{-1+2^{r+v}}$. 其中 r,s,t,t',v 是非负整数,$r+s+v+t'+u=4,r\geq 2,t'\leq r,u\leq 1,tt'=sv=tv=0$.

(iv) 有循环极大子群的亚循环群的 $\mathscr{A}_3$-2 群:D_{32},Q_{32},SD_{32}.

对于(i),容易得到$\langle a^{p^2},b\rangle$ 和 $\langle a,b^{p^2}\rangle$ 都是非交换群. 由 $|\langle a^{p^2},b\rangle\cap\langle a,b^{p^2}\rangle|=|\langle a^{p^2},b^{p^2}\rangle|=p^{2r+s+t-1}$ 可知,$|\mathrm{I}_{A_1}|\leq p^{n-4}$.

对于(ii),与(1) 类似有 $|\langle a^4,b\rangle\cap\langle a,b^4\rangle|=|\langle a^4,b^4\rangle|$. 从而 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|\leq 2^{n-4}$.

对于(iii),根据引理 13 可求的 G 的极大子群分别为:$M_1=\langle a,b^2\rangle$,$M_2=\langle a^2,b\rangle$,$M_3=\langle ba,a^2\rangle$. 类似的,易得 M_1 的极大子群分别为:$M_{11}=\langle a,b^4\rangle$;$M_{12}=\langle b^2,a^2\rangle$;$M_{13}=\langle b^2a,a^2\rangle$. M_2 的极大子群分别为:$M_{21}=\langle a^2,b^2\rangle$,$M_{22}=\langle b,a^4\rangle$,$M_{23}=\langle ba^2,a^4\rangle$. M_3 的极大子群分别为:$M_{31}=\langle a^2,b^2\rangle$,$M_{32}=\langle ba,a^4\rangle$,$M_{33}=\langle ba^3,a^4\rangle$.

由于 $r+s+v+t'+u=4$ 且 $r\geq 2$ 可知,$s+t'+u=0,1$ 或 2. 当 $s+t'+u=0$ 或 1 时,$Z(G)=<a^{2^3}><b^2>$. 当 $s+t'+u=2$ 时,$Z(G)=<a^{2^3}><b^4>$. 若 G 无交换极大子群,则 $b^2\in Z(G)$. G 的所有非交换子群为:M_1,M_2,M_3,M_{12},M_{13},M_{21},M_{22},M_{23},M_{31},M_{32},M_{33}. 因此,$\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)=M_1\cap M_2\cap M_3\cap M_{12}\cap M_{13}\cap M_{21}\cap M_{22}\cap M_{23}\cap M_{31}\cap M_{32}\cap M_{33}=\langle a^4,b^4\rangle$. 此时 $|\mathrm{I}_{\mathscr{A}_1}(G)|=p^{n-4}$.

($\Leftarrow$) 若 G 是有交换极大子群的例外亚循环 2 群，则 G 是(iii) 中的群且 $b^2 \in Z(G)$. G 的所有非交换子群为：$M_2, M_3, M_{22}, M_{23}, M_{32}, M_{33}$. 故，$I_{\mathscr{A}_1}(G) = M_2 \cap M_3 \cap M_{22} \cap M_{23} \cap M_{32} \cap M_{33} = \langle a^4, b^2 \rangle$. 此时 $|I_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3}$.

若 G 是 D_{32}, Q_{32} 或 SD_{32}，容易算出 $|I_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3}$.

参 考 文 献

[1] Golovanov M I. Finite p-groups with the condition $|I_m(P)| = p^{m-1}$(C)[M]. Krasnoyarsk: Otdel Akad Nauk SSR, 1973.

[2] 安立坚，魏军军. 满足 $|I_3(G)| = 4$ 的有限 2 群的完全分类[J]. 数学实践与认识，2010,40(22):237-242.

[3] Zhang Qinhai, Wei Junjun. The intersection of subgroups of finite p-groups[J]. Arch der Math, 2011, 96(1): 9-17.

[4] Rédei L. Das "schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören[J]. Comment Math Helvet, 1947, 20: 225-264.

[5] Zhang Qinhai, Sun Xiujuan, An Lijian, et al. Finite p-groups all of whose subgroups of index p^2 are abelian[J]. Algebra Colloquium, 2008, 15(1): 167-180.

[6] 徐明曜，曲海鹏. 有限 p 群[M]. 北京：北京大学出版社，2010.

[7] Xu Mingyao, An Lijian, Zhang Qinhai. Finite p-groups all of whose non-abelian proper subgroups are generated by two elements[J]. J Algebra, 2008, 319: 3603-3620.

[8] Blackburn N. Generalizations of certain elementary theorems on p-groups[J]. Proc Lon-don Math Soc, 1961, 11(3): 1-22.

[9] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 2 版. 北京：科学出版社，1999.

[10] Berkovich Y, Janko Z. Groups of Prime Power Order II[M]. New York: Walter de Gruyter, 2008.

[11] 曲海鹏，胡瑞芳. 内交换 p 群的中心扩张(III)[J]. 数学学报，2010,53(6):1051-1064.

The Intersection of Non-abelian Subgroups of Finite p-groups

LI Pujin, CAO Chenchen

(School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen 041004, China)

Abstract: In this paper, we introduce a new concept-$I_{\mathscr{A}_k}(G)$, the intersection of all $\mathscr{A}_k$ subgroups of G. $I_{\mathscr{A}_k}(G)$ is a characteristic subgroup of G and $I_{\mathscr{A}_1}(G)$ is the intersection of all non-abelian subgroups of G. Let the order of G be p^n. We give complete classifications of G with $|I_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-2}$ and $|I_{\mathscr{A}_1}(G)| = p^{n-3}$, respectively.

Keywords: $\mathscr{A}_k$ group; finite p-groups; intersection of subgroups