第 44 卷 第 3 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol. 44 No. 3
2016 年 5 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) May 2016

文章编号:1000－2367(2016)03－0019－05 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.03.004

仿 Laguerre 特征值及 Laguerre 等参超曲面研究

胡传峰, 姬 秀

(长江大学 文理学院, 湖北 荆州 434000)

摘 要:设 $x:M \to \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐点超曲面,若 x 满足 Laguerre 形式 C 等于 0,且所有 Laguerre 主曲率都是常数,则称 x 是 Laguerre 等参超曲面. 证明了当 Laguerre 形式 C 等于 0 时,若 Laguerre 主曲率是常数,则仿 Laguerre 特征值为常数;若仿 Laguerre 特征值为常数且 λ 非零, 则 Laguerre 主曲率是常数.

关键词:Laguerre 度量;Laguerre 形式;仿 Laguerre 张量;Laguerre 第二基本形式;Laguerre 等参超曲面

中图分类号:O174.2 **文献标志码**:A

1 主要结果

设 $U\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的切向量丛,则 $\mathbf{R}^n$ 中的中心在 p 半径为 r 的定向球可以被看作是 $U\mathbf{R}^n$ 中的定向球 $\{(x,\xi) \mid x-p=r\xi\}$,这里 x 和 ξ 分别是定向球的位置向量及单位法向量; $\mathbf{R}^n$ 中具有常单位法向量 ξ 及常实数 d 的定向超平面可以被看作是 $U\mathbf{R}^n$ 中的定向超平面 $\{(x,\xi) \mid x \cdot \xi = d\}$. 微分同胚 $\phi:U\mathbf{R}^n \to U\mathbf{R}^n$ 被称为是一个 Laguerre 变换, 如果它能将定向超平面变为定向超平面,定向球变为定向球并保持两球之间的切距离. $U\mathbf{R}^n$ 中的所有 Laguerre 变换构成一个群, 称为 Laguerre 变换群.

文献[1] 研究了 $\mathbf{R}^3$ 上曲面的 Laguerre 几何,接着文献[2] 建立了 $\mathbf{R}^n$ 上超曲面的 Laguerre 微分几何框架,定义了 Laguerre 度量 g,Laguerre 张量 L, Laguerre 第二基本形式 B, Laguerre 形式 C 等 Laguerre 不变量,并且在 Laguerre 度量 g 下建立结构方程及可积条件,近年来,对 Laguerre 几何的研究已取得了较大进展,尤其,Laguerre 等参超曲面的分类的研究取得了更大的发展. 文献[3] 分类了 $\mathbf{R}^4$ 中的 Laguerre 等参超曲面;本文作者也对 Laguerre 等参超曲面进行了深入研究(见文献[4－8]).

称 $D^\lambda = L + \lambda B$ 是仿 Laguerre 张量, 这里 λ 是常数. 易知仿 Laguerre 张量也是 Laguerre 不变量, 称其特征值为仿 Laguerre 特征值. 本文研究 Laguerre 等参超曲面与仿 Laguerre 特征值之间的关系, 得到了如下定理.

定理 1 设 $x:M \to \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐点超曲面, 且 Laguerre 形式等于零, 则

1) 当 x 是 Laguerre 等参超曲面时,仿 Laguerre 张量 D^λ 的特征值为常数;

2) 当仿 Laguerre 张量 D^λ 的特征值为常数时, x 是 Laguerre 等参超曲面($\lambda \neq 0$).

注记 当 $\lambda = 0$ 时, $D^\lambda = L$. 由文献[9] 知 Laguerre 特征值为常数的超曲面不一定是 Laguerre 等参超曲面.

2 $\mathbf{R}^n$ 上的超曲面的 Laguerre 几何

本节,给出 $\mathbf{R}^n$ 上的超曲面的 Laguerre 不变量及结构方程,更详细的内容参考文献[2]. 设 $\mathbf{R}_2^{n+3}$ 是按以下方式定义内积的 Lorentz 空间:

收稿日期:2015-07-17;**修回日期**:2016-04-10.

基金项目:国家自然科学基金(11171207);湖北省教育厅科学技术研究基金(B2014281).

第 1 作者简介(通信作者):胡传峰(1978 —), 男, 河南信阳人, 长江大学讲师, 研究方向为微分几何,E-mail: cfhu0802@163.com.

$$<X,Y>=-X_1Y_1+X_2Y_2+\cdots+X_{n+2}Y_{n+2}-X_{n+3}Y_{n+3},$$

定义光锥 C^{n+2} 和 Laguerre 变换群 LG 为

$$C^{n+2}=\{X\in\mathbf{R}_2^{n+3}\mid <X,X>=0\},$$

$$LG=\{T\in O(n+1,2)\mid \varkappa T=\varkappa\},$$

这里 $\varkappa=(1,-1,0,0)$ 是类光向量，$0\in\mathbf{R}^n$.

设$\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$是 TM 在 $dx\cdot dx$ 下的标准正交基,则 x 的结构方程为

$$e_j(e_i(x))=\sum_k\Gamma_{ij}^k e_k(x)+k_i\delta_{ij}\xi,\ e_i(\xi)=-k_ie_i(x),\ 1\leq i,j,k\cdots\leq n-1,$$

这里 $k_i\neq 0$ 是相应于 e_i 的主曲率.设 $r_i=\dfrac{1}{k_i}$ 和 $r=\dfrac{r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}}{n-1}$ 分别是 x 的曲率半径和平均曲率半径,定义

$$Y=\rho(x\cdot\xi,-x\cdot\xi,\xi,1):M\rightarrow C^{n+2}\subset\mathbf{R}_2^{n+3},$$

其中 $\rho=\sqrt{\sum_i(r_i-r)^2}>0.$

定理 2[2] 两个超曲面 $x,\tilde{x}:M\rightarrow\mathbf{R}^n$ 是 Laguerre 等价当且仅当存在 $T\in LG$ 使得 $\tilde{Y}=YT$.

由定理 2 知

$$g=<dY,dY>=\rho^2 d\xi\cdot d\xi=\rho^2\mathrm{III}$$

是一个 Laguerre 不变量,称为 Laguerre 度量,这里 III 是 x 的第三基本形式.

设 $\varkappa$ 是 g 的 laplace 算子,定义

$$N=\frac{1}{n-1}\Delta Y+\frac{1}{2(n-1)^2}<\Delta Y,\Delta Y>Y,\tag{1}$$

$$\eta=(\frac{1}{2}(1+|x|^2),\frac{1}{2}(1-|x|^2),x,0)+r(x\cdot\xi,-x\cdot\xi,\xi,1).$$

由(1)得

$$<Y,Y>=<N,N>=0,\ <Y,N>=-1,\ <\eta,\eta>=0,\ <\eta,\varkappa>=-1.$$

取关于 g 的标准正交基$\{E_1,\cdots,E_{n-1}\}$,其对偶为$\{w_1,\cdots,w_{n-1}\}$,则有如下正交分解

$$\mathbf{R}_2^{n+3}=\mathrm{span}\{Y,N\}\oplus\mathrm{span}\{E_1(Y),E_2(Y),\cdots,E_{n-1}(Y)\}\oplus\{\eta,\varkappa\}.$$

因为$\{Y,N,E_1(Y),E_2(Y),\cdots,E_{n-1}(Y),\eta,\varkappa\}$是 $\mathbf{R}_2^{n+3}$ 中沿着 M 的 Laguerre 活动标架,所以结构方程可写为

$$E_i(N)=\sum_{i,j}L_{ij}E_j(Y)+C_i\varkappa,\ E_i(\eta)=-C_iY+\sum_jB_{ij}E_j(Y),\tag{2}$$

$$E_j(E_i(Y))=L_{ij}Y+\delta_{ij}N+\Gamma_{ij}^kE_k(Y)+B_{ij}\varkappa,$$

由上述方程可得如下基本 Laguerre 不变量:Laguerre 度量 $g=<dY,dY>$; Laguerre 第二基本形式 $B=\sum_{i,j}B_{ij}w_i\otimes w_j$; Laguerre 张量 $L=\sum_{i,j}L_{ij}w_i\otimes w_j$; Laguerre 形式 $C=\sum_iC_iw_i$.

L_{ij}, B_{ij} 及 C_i 的共变导数定义为

$$\sum_kL_{ij},kw_k=dL_{ij}+\sum_k(L_{ik}w_{kj}+L_{kj}w_ki).\tag{3}$$

$$\sum_kB_{ij},kw_k=dB_{ij}+\sum_k(B_{ik}w_{kj}+B_{kj}w_{ki}).\tag{4}$$

$$\sum_jC_{i,j}w_j=dC_i+\sum_jC_jw_{ji}.\tag{5}$$

B_{ij} 及 C_i 的第二共变导数定义为

$$\sum_lB_{ij},klw_l=dB_{ij,k}+\sum_l(B_{lj},kw_{li}+B_{il},kw_{lj}+B_{ij,l}w_{lk}).\tag{6}$$

$$\sum_kC_{i,jk}=dC_{i,j}+\sum_kC_{k,j}w_{ki}+\sum_kC_{i,k}w_{kj}.\tag{7}$$

外微分(4)及(5)得 Ricci 恒等式

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = \sum_m (B_{mj}R_{mikl} + B_{im}R_{mjkl}). \tag{8}$$

$$C_{i,jk} - C_{i,kj} = \sum_l C_l R_{lijk}. \tag{9}$$

通过对(2)及(3)取导数得

$$L_{ij,k} = L_{ik,j}, \tag{10}$$

$$C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k (B_{ik}L_{kj} - L_{ik}B_{kj}), \tag{11}$$

$$B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j\delta_{ik} - C_k\delta_{ij}, \tag{12}$$

$$R_{ijkl} = L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} - L_{ik}\delta_{jl} - L_{jl}\delta_{ik}, \tag{13}$$

$$\sum_{i,j} B_{ij}^2 = 1,\ \sum_i B_{ii} = 0, \sum_i B_{ij,i} = (n-2)C_j, \sum_i L_{ii} = -\frac{1}{2(n-1)} < \Delta Y, \Delta Y >, \tag{14}$$

$$R_{i,k} = -(n-3)L_{ik} - (\sum_i L_{ii})\delta_{ik}, R = -2(n-2)\sum_i L_{ii} = \frac{n-2}{n-1} < \Delta Y, \Delta Y >. \tag{15}$$

当 $n > 3$ 时,由(14)及(15)知 C_i 和 L_{ij} 可由 $\{g, B\}$ 确定,因此有

定理 3[2]　两个超曲面 $x, \tilde{x}: M \to \mathbf{R}^n$ Laguerre 等价的充要条件是它们有相同的 Laguerre 度量 g 和 Laguerre 第二基本形式 B.

3　定理 1 的证明

命题 1　设 $x: M \to \mathbf{R}^n$ 是 Laguerre 等参超曲面,则 x 的仿 Laguerre 张量的特征值为常数.

证明　由 $C = 0$ 及(11)知,可取标准正交基 $\{e_i\}$ 使得 (L_{ij}) 和 (B_{ij}) 同时对角化. 设

$$B_{ij} = b_i\delta_{ij}, L_{ij} = \mu_i\delta_{ij}. \tag{16}$$

由(16)及(4)可得

$$(b_i - b_j)w_{ij} = \sum_k B_{ij,k}w_k.$$

对某一固定的 i,令 $[i] = \{m \mid b_m = b_i\}$. 则当 $[i] = [j]$ 或 $[j] = [k]$ 或 $[k] = [i]$ 时有

$$B_{ij,k} = 0. \tag{17}$$

当 $[i] \neq [j]$ 时,有

$$w_{ij} = \sum_k \frac{B_{ij,k}}{b_i - b_j}w_k = \sum_{k \notin [i],[j]} \frac{B_{ij,k}}{b_i - b_j}w_k. \tag{18}$$

由(6)得当 $[i] \neq [j]$ 时,有

$$B_{ij,ij} = \sum_{k \notin [i],[j]} \frac{2B_{ij,k}^2}{b_k - b_i}, B_{ij,ji} = \sum_{k \notin [i],[j]} \frac{2B_{ij,k}^2}{b_k - b_j}. \tag{19}$$

由 Ricci 恒等式(8)及(19)得

$$R_{ijij} = \sum_{k \notin [i],[j]} \frac{2B_{ij,k}^2}{(b_k - b_i)(b_k - b_j)}, [i] \neq [j]. \tag{20}$$

同理对 Laguerre 张量 L,有 $(\mu_i - \mu_j)w_{ij} = \sum_k L_{ij,k}w_k$. 再利用(18)得

$$(\mu_i - \mu_j)\frac{B_{ij,k}}{b_i - b_j} = L_{ij,k}, [i] \neq [j]. \tag{21}$$

在(21)中令 $k = j$ 并利用 $B_{ij,j} = 0$ 得

$$e_i(\mu_j) = L_{jj,i} = L_{ij,j} = 0, [i] \neq [j]. \tag{22}$$

为了证明 μ_j 是常数,只需证明 $e_i(\mu_j) = 0, [i] = [j]$. 对每一个固定的 j_0,考虑下面两种情况.

情形 1　存在 j, k 使得 $B_{j_0 j,k} \neq 0, [j] \neq [j_0], [k] \neq [j_0], [j] \neq [k]$.

情形 2　对任意的 j, k,有 $B_{j_0 j,k} = 0$.

对情形 1,因为存在 j, k

$$B_{j_0 j,k} \neq 0, [j] \neq [j_0], [k] \neq [j_0], [j] \neq [k].$$

所以由(21)得

$$\frac{\mu_{j_0}-\mu_j}{b_{j_0}-b_j}=\frac{L_{j_0j,k}}{B_{j_0j,k}}=\frac{L_{jk,j_0}}{B_{jk,j_0}}=\frac{\mu_k-\mu_j}{b_k-b_j}.$$

进而有

$$\mu_{j_0}=(\mu_k-\mu_j)\frac{b_{j_0}-b_j}{b_k-b_j}+\mu_j. \tag{23}$$

由(22)可得 $e_i(\mu_j)=e_i(\mu_k)=0$, $i\in[j_0]\neq[k],[j_0]\neq[j]$. 再利用(23)得

$$e_i(\mu_{j_0})=0,[i]=[j_0]. \tag{24}$$

对情形 2,因为对任意的 j,k,有 $B_{j_0j},k=0$. 所以由(20)得

$$R_{j_0jj_0j}=0,j\notin[j_0]. \tag{25}$$

由(13)得

$$0=R_{j_0jj_0j}=-\mu_{j_0}-\mu_j,\ j\notin[j_0],$$

因此

$$\mu_{j_0}=-\mu_j,j\notin[j_0],$$

因为 $e_i(\mu_j)=0,i\in[j_0]\neq[j]$. 由上式可得

$$e_i(\mu_{j_0})=0,[i]=[j_0]. \tag{26}$$

由(22)、(24)及(26)得

$$e_i(\mu_j)=0,1\leq i,\ j\leq n-1.$$

因此 μ_j 是常数,$1\leq j\leq n-1$. 由 $D^\lambda=L+\lambda B$ 知,仿 Laguerre 张量的特征值是常数. 证毕.

命题 2 设 $x:M\to\mathbf{R}^n$ 是无脐超曲面且 Laguerre 形式 $C=0$,若仿 Laguerre 张量 $D^\lambda(\lambda\neq 0)$ 的特征值为常数,则 x 是 Laguerre 等参超曲面.

证明 由(11)及 Laguerre 形式 $C=0$,可得 $\sum_k B_{ik}L_{kj}=\sum_k L_{ik}B_{kj}$,进而可得

$$\sum_k D^\lambda_{ik}B_{kj}=\sum_k D^\lambda_{jk}B_{ki}.$$

因此可取标准正交基 $\{e_i\}$ 使得 (D^λ_{ij}) 和 (B_{ij}) 同时对角化. 设

$$B_{ij}=b_i\delta_{ij},D^\lambda_{ij}=d_i\delta_{ij}. \tag{27}$$

对某固定的 i,令

$$(i)=\{k\mid d_k=d_i\}.$$

则当 $(i)=(j)$ 或 $(i)=(k)$ 时有

$$D^\lambda_{ij,k}=0. \tag{28}$$

当 $(i)\neq(j)$ 时,有

$$w_{ij}=\sum_k\frac{D^\lambda_{ij,k}}{d_i-d_j}w_k, \tag{29}$$

$$R_{ijij}=\sum_{k\notin(i),(j)}\frac{2(D^\lambda_{ij,k})^2}{(d_k-d_i)(d_k-d_j)}. \tag{30}$$

对 Laguerre 第二基本形式 B,有

$$(b_i-b_j)w_{ij}=\sum_k B_{ij,k}w_k.$$

再利用(29)得

$$(b_i-b_j)\frac{D^\lambda_{ij,k}}{d_i-d_j}=B_{ij,k},(i)\neq(j). \tag{31}$$

在(31)中令 $k=i$ 并利用 $D^\lambda_{ij,i}=0$ 得

$$e_j(b_i)=B_{ii,j}=B_{ij,i}=0,\ (i)\neq(j). \tag{32}$$

为了证明 b_i 是常数,只需证明 $e_j(b_i)=0$, $(i)=(j)$. 对每一个固定的 i,考虑下面两种情况.

情形 1 存在 j,k 使得

$$D_{ij,k}^{\lambda} \neq 0, (j) \neq (i), (k) \neq (i), (j) \neq (k).$$

情形 2　对任意的 j,k，有 $D_{j_0 j,k}^{\lambda} = 0$.

对情形 1，因为对某 j,k

$$D_{ij,k}^{\lambda} \neq 0, (j) \neq (i), (k) \neq (i), (j) \neq (k),$$

所以由(31)得

$$\frac{b_i - b_j}{d_i - d_j} = \frac{B_{ij,k}}{D_{ij,k}^{\lambda}} = \frac{B_{jk,i}}{D_{jk,i}^{\lambda}} = \frac{b_k - b_j}{d_k - d_j}.$$

进而有

$$b_i = (b_k - b_j)\frac{d_i - d_j}{d_k - d_j} + b_j. \tag{33}$$

由(32)可得 $e_l(b_k) = e_l(b_j) = 0, l \in (i)$. 再利用(33)得

$$e_l(b_i) = 0, (i) = (l). \tag{34}$$

对情形 2　因为对任意的 j,k，有 $D_{ij,k}^{\lambda} = 0$. 由(30)得

$$R_{ijij} = 0, j \notin (i). \tag{35}$$

由(13)得

$$0 = R_{ijij} = -\mu_i - \mu_j, j \notin (i).$$

因为 $\mu_i = d_i - \lambda b_i$，所以

$$\lambda(b_i + b_j) = d_i + d_j. \tag{36}$$

注意到 $e_l(b_j) = 0, l \in (i), j \notin (i)$. 因而当 $\lambda \neq 0$ 时，$e_l(b_i) = 0, l \in (i)$. 由(32)、(34)及(36)得

$$e_i(b_j) = 0, 1 \leq i, j \leq n-1.$$

因此 $b_j, 1 \leq j \leq n-1$ 是常数. 证毕.

由命题 1 及命题 2 得证主要定理. 证毕.

参考文献

[1] Blasche W. Vorlesungen Über Differentialgeometrie [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1929.

[2] Li Tongzhu, Wang Changping. Laguerre geometry of hypersurfacs in $\mathbf{R}^n$[J]. Manuscripta Math, 2007, 122: 73-95.

[3] Li Tongzhu, Sun Huafei. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in $\mathbf{R}^4$[J]. Acta Mathematatica Sinica, English Series, 2011, 28: 1179-1186.

[4] Ji Xiu, Hu Chuanfeng. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in $\mathbf{R}^5$[J]. Adances in Mathematics (China) Jan, 2015, 44(1): 117-127.

[5] Ji Xiu, Hu Chuanfeng. On Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in $\mathbf{R}^7$[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2014, 29(4): 486-500.

[6] 姬　秀，胡传峰. $\mathbf{R}^6$ 中 Laguerre 等参超曲面的分类[J]. 数学年刊，2015，36A(2)：1-16.

[7] 胡传峰，姬　秀. $\mathbf{R}^n$ 中仿 Laguerre 张量平行的超曲面[J]. 中北大学学报(自然科学版)，2014，35(5)：509-514.

[8] 姬　秀，胡传峰. $\mathbf{R}^n$ 中具有三个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2015，43(3)：21-27.

[9] Li Tongzhu, Li Haizhong, Wang Changping. Classification of hypersurfacs with constant Laguerre eigenvalues in $\mathbf{R}^n$[J]. Science China Mathematics, 2011, 54: 1129-1144.

Para-Laguerre Eigenvalues and Laguerre Isoparametric Hypersurfaces

HU Chuanfeng, JI Xiu

(College of Arts and Science, Yangtze University, Jingzhou 434000, China)

Abstract: Let $x: M \to \mathbf{R}^n$ be an umbilical free hypersurface with non-zero principal curvature, then x is called Laguerre isoparametric hypersurface if it satisfies two conditions that Laguerre form vanishes and all Laguerre principal curvatures are constant. In this paper, under the condition of having vanishing Laguerre form, we show that if the hypersurface is of constant Laguerre principal curvatures, then its para-Laguerre eigenvalues are constant; and if the para-Laguerre eigenvalues are constant and λ is not zero, then its Laguerre principal curvatures are constant.

Keywords: Laguerre metric; Laguerre form; Para-Laguerre tensor; Laguerre second fundamental form; Laguerre isoparametric hypersurface