文章编号:1000-2367(2023)03-0105-06　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.03.013

一类非线性中立型广义弹性杆方程的振动判据

罗李平

(衡阳师范学院 数学与统计学院,湖南 衡阳 421002)

摘　要:研究一类具分布时滞的偶数阶非线性中立型广义弹性杆方程的 Dirichlet 边值问题,建立了该类边值问题所有解振动的几个新的充分性条件.所得结果由实例加以阐述.

关键词:广义弹性杆方程;振动性;分布时滞;非线性;中立型

中图分类号:O175.4　　**文献标志码:**A

非线性振动问题是近代力学、物理学和工程技术等领域的重要研究课题,如单摆的振动,杠、梁的振动,建筑物和机器的振动,飞行器的结构振动等.在力学上非线性弹性杆(组)结构是工程上最普通的构件之一,广泛应用于交通工具、传动轴系、船舶推进、石油钻探、海底电缆等众多工程场合,而弹性杆(组)在数学上都是通过偏微分方程(组)来描述的,因此,可以通过对偏微分方程(组)的振动性进行准确分析,从而分析出所对应的机械或部件的振动状态,这对工程上的机械减振和降噪等实际应用具有重要的理论指导意义.近年来,关于这一方面的研究取得了一些很好的结果,例如文献[1-2]研究了两类具泛函变元的二阶非线性中立型广义弹性杆方程的振动性问题;文献[3-5]研究了几类具分布时滞的二阶中立型广义弹性杆方程的振动性问题;文献[6]研究了一类具混合非线性项的二阶广义弹性杆方程的强迫振动性问题;文献[7-9]研究了几类具分布时滞的偶数阶非线性中立型广义弹性杆方程(组)的振动性问题.本文拟考虑如下的一类具分布时滞的偶数阶非线性中立型广义弹性杆方程

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[r(t)u+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)u(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]+q(x,t)u+\int_c^d f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma=$$
$$a_1(t)h_1(u)\Delta u+a_2(t)h_2(u(x,\rho(t)))\Delta u(x,\rho(t)),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+\equiv G \tag{1}$$

解的振动性,其中 $u=u(x,t)$,$n\geq 2$ 是偶数,$\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 是有界域,$\partial\Omega$ 逐片光滑,$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$,且 Δ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的 m 维 Laplacian 算子.

同时考虑 Dirichlet 边值条件:

$$u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+. \tag{2}$$

本文总假定下列条件成立:

(H_1) $r(t)\in C^n(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$0<\alpha<\beta$,$0<c<d$;

(H_2) $p(t,\tau)\in C^n(\mathbf{R}_+\times[\alpha,\beta],\mathbf{R}_+)$,$q(x,t)\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$Q(t)=\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}\{q(x,t)\}$;

(H_3) $f\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R},\mathbf{R})$,当 $u\neq 0$ 时,$\dfrac{f(x,t,u)}{u}\geq h(x,t)$,其中 $h\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$H(t)=\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}\{h(x,t)\}$;

(H_4) $a_1(t),a_2(t)\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$,$\rho(t)\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$,$\rho(t)\leq t$,$\rho(t)$ 非减且 $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)=\infty$;

收稿日期:2022-05-02;**修回日期:**2022-12-26.

基金项目:湖南省自然科学基金(2022JJ90021;2022JJ50137);湖南省教育厅科研重点项目(21A0440);衡阳师范学院学科专项项目(XKZX21002).

作者简介(通信作者):罗李平(1964-),男,湖南耒阳人,衡阳师范学院教授,研究方向为偏微分方程振动性理论,E-mail:stxyluolp@163.com.

(H_5) $h_1(u),h_2(u)\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $uh_1'(u)\geq 0$, $uh_2'(u)\geq 0$, $h_1(0)=0$, $h_2(0)=0$.

定义 1 边值问题(1)、(2)的解 $u(x,t)\in C^n(G)\cap C^1(\bar{G})$ 在 G 内称为振动的,若它具有任意大的零点,即 $\forall T>0$, $\exists(x_0,t_0)\in\Omega\times[T,\infty)$,使得等式 $u(x_0,t_0)=0$ 成立.否则称 $u(x,t)$ 在 G 内是非振动的.

引理 1[10] 设 $y(t)\in C^n([t_0,\infty),\mathbf{R})$ 为常号,在$[t_0,\infty)$ 上 $y^{(n)}(t)\neq 0$ 且满足 $y^{(n)}(t)y(t)\leq 0$,则

(i)存在 $t_1\geq t_0$,使得 $y^{(i)}(t)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 在$[t_1,\infty)$ 上常号;

(ii)存在 $l\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$, $n+l$ 为奇数,使得 $y^{(i)}(t)>0$, $t\geq t_1$, $i=0,1,2,\cdots,l$; $(-1)^{i+l}y^{(i)}(t)>0$, $t\geq t_1$, $i=l+1,\cdots,n$.

在下文中,总假设边值问题(1)、(2)的解是整体存在的.

1 主要结果及其证明

定理 1 设如下条件成立:

(H_6) $r(t)>1$ 是一个单调递减函数;

(H_7) $\int_\alpha^\beta p(t,\tau)\mathrm{d}\tau<1$.

若

$$\int_{t_0}^\infty\{H(t)\int_c^d[1-\int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}t=\infty,t_0>0,\tag{3}$$

则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动.

证明 假设边值问题(1)、(2)有一个非振动解 $u(x,t)$,不失一般性,不妨设 $u(x,t)>0$, $t\geq t_0$, t_0 为某一正常数(对于 $u(x,t)<0$ 的情形,令 $\bar{u}(x,t)=-u(x,t)$,可类似证明),则由(H_4) 知,存在 $t_1\geq t_0$,使得对任意的$(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty)$,有 $u(x,t)>0$, $u(x,t-\tau)>0$, $u(x,t-\sigma)>0$, $u(x,\rho(t))>0$.

方程(1)两边关于 x 在 Ω 上积分,有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[r(t)\int_\Omega u\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)\int_\Omega u(x,t-\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau]+\int_\Omega q(x,t)u\mathrm{d}x+\int_\Omega(\int_c^d f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma)\mathrm{d}x=$$

$$a_1(t)\int_\Omega h_1(u)\Delta u\mathrm{d}x+a_2(t)\int_\Omega h_2(x,\rho(t))\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x,t\geq t_1.\tag{4}$$

由 Green 公式,边值条件(2)及(H_5)有

$$\int_\Omega h_1(u)\Delta u\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}h_1(u)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{N}}\mathrm{d}S-\int_\Omega h_1'(u)\mid\mathrm{grad}\ u\mid^2\mathrm{d}x=$$

$$-\int_\Omega h_1'(u)\mid\mathrm{grad}\ u\mid^2\mathrm{d}x\leq 0,t\geq t_1,\tag{5}$$

$$\int_\Omega h_2(u(x,\rho(t)))\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x\leq 0,t\geq t_1,\tag{6}$$

其中 $\mathbf{N}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,$\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素.

又由(H_2)、(H_3)有

$$\int_\Omega q(x,t)u\mathrm{d}x\geq Q(t)\int_\Omega u\mathrm{d}x,t\geq t_1,\tag{7}$$

$$\int_\Omega(\int_c^d f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma)\mathrm{d}x\geq\int_\Omega(\int_c^d h(x,t)u(x,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma)\mathrm{d}x\geq$$

$$H(t)\int_c^d(\int_\Omega u(x,t-\sigma)\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma,t\geq t_1.\tag{8}$$

令 $U(t)=\int_\Omega u\mathrm{d}x$,显然,$U(t)>0$, $t\geq t_1$. 于是由式(4)~(8)可得:

$$[r(t)U(t)+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau]^{(n)}+Q(t)U(t)+H(t)\int_c^d U(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\leq 0,t\geq t_1.\tag{9}$$

令 $Z(t)=r(t)U(t)+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,则易知 $Z(t)>0$,并且由式(9) 有 $Z^{(n)}(t)\leq 0$, $t\geq t_1$.于

是由引理 1 知，存在 $t_2 \geq t_1$，使得 $Z'(t) > 0$ 和 $Z^{(n-1)}(t) > 0, t \geq t_2$.

由式(9)有

$$Z^{(n)}(t) + H(t)\int_c^d U(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma \leq 0, t \geq t_2. \tag{10}$$

从而有

$$Z^{(n)}(t) + H(t)\int_c^d [Z(t-\sigma) - \int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)U(t-\sigma-\tau)\mathrm{d}\tau](r(t-\sigma))^{-1}\mathrm{d}\sigma \leq 0, t \geq t_2. \tag{11}$$

注意到 $Z(t) \geq r(t)U(t) \geq U(t), Z'(t) > 0, t \geq t_2$，由式(11)有

$$Z^{(n)}(t) + H(t)\int_c^d [1 - \int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]\frac{Z(t-\sigma)}{r(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma \leq 0, t \geq t_2. \tag{12}$$

注意到 $Z'(t) > 0, r(t)$ 单调递减，$t \geq t_2$，从 t_2 到 $t(t > t_2)$ 积分(12) 可得：

$$Z^{(n-1)}(t) - Z^{(n-1)}(t_2) + \frac{Z(t_2-\sigma)}{r(t_2-\sigma)}\int_{t_2}^t \{H(s)\int_c^d [1 - \int_\alpha^\beta p(s-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}s \leq 0.$$

进而有

$$\int_{t_2}^t \{H(s)\int_c^d [1 - \int_\alpha^\beta p(s-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}s \leq \frac{r(t_2-\sigma)}{Z(t_2-\sigma)}(Z^{(n-1)}(t_2) - Z^{n-1}(t)) \leq \frac{r(t_2-\sigma)Z^{(n-1)}(t_2)}{Z(t_2-\sigma)}.$$

但这与式(3)矛盾，故定理 1 得证.

由微分不等式(9)，有 $[r(t)U(t) + \int_\alpha^\beta p(t,\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau]^{(n)} + Q(t)U(t) \leq 0, t \geq t_1$. 类似于定理 1 的证明，可得如下定理.

定理 2　设(H_6)、(H_7)成立.若 $\int_{t_0}^\infty Q(t)[1 - \int_\alpha^\beta p(t,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t = \infty, t_0 > 0$，则边值问题(1)、(2) 的所有解在 G 内振动.

由定理 1，有如下推论.

推论 1　若微分不等式(9)无最终正解，则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动.

定理 3　设如下条件成立：

(H_8)存在一个正常数 γ，使得 $0 < \gamma \leq r(t) < 1$ 且$\int_\alpha^\beta p(t,\tau)\mathrm{d}\tau < \gamma$.

若

$$\int_{t_0}^\infty \{H(t)\int_c^d [1 - \gamma^{-1}\int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}t = \infty, t_0 > 0, \tag{13}$$

则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动.

证明　如同定理 1 的证明，可得式(11).注意到 $r(t)<1$，由式(11)有

$$Z^{(n)}(t) + H(t)\int_c^d [Z(t-\sigma) - \int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)U(t-\sigma-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma \leq 0, t \geq t_2. \tag{14}$$

注意到 $Z(t) \geq r(t)U(t) \geq \gamma U(t), Z'(t) > 0, t \geq t_2$，由式(14)有

$$Z^{(n)}(t) + H(t)\int_c^d [1 - \gamma^{-1}\int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]Z(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma \leq 0, t \geq t_2. \tag{15}$$

注意到 $Z'(t) > 0, t \geq t_2$，从 t_2 到 $t(t > t_2)$ 积分式(15) 可得：

$$Z^{(n-1)}(t) - Z^{(n-1)}(t_2) + Z(t_2-\sigma)\int_{t_2}^t \{H(s)\int_c^d [1 - \gamma^{-1}\int_\alpha^\beta p(s-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}s \leq 0.$$

进而有

$$\int_{t_2}^t \{H(s)\int_c^d [1 - \gamma^{-1}\int_\alpha^\beta p(s-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}s \leq \frac{1}{Z(t_2-\sigma)}(Z^{(n-1)}(t_2) - Z^{(n-1)}(t)) \leq \frac{Z^{(n-1)}(t_2)}{Z(t_2-\sigma)}.$$

但这与式(13)矛盾，故定理 3 得证.

类似地，可得如下定理.

定理 4　设(H_8)成立.若

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(t)[1-\gamma^{-1}\int_{\alpha}^{\beta} p(t,\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t=\infty, t_0>0,$$

则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动.

借助如下的特征值引理,可得到许多关于边值问题(1)、(2)的类似结果.下面,假设 $h_1(u),h_2(u)$ 都是常数(不妨假设都是 1).

引理 2[11] 设 λ_0 是如下 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases}\Delta\phi(x)+\lambda\phi(x)=0, & x\in\Omega, \lambda \text{ 是常数}, \\ \phi(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{16}$$

的最小特征值,$\phi(x)$ 是与 λ_0 对应的特征函数,则 $\lambda_0>0,\phi(x)>0,x\in\Omega$.

定理 5 设定理 1 中的条件均满足,则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动.

证明 假设边值问题(1)、(2)有一个非振动解 $u(x,t)$,不失一般性,不妨设 $u(x,t)>0,t\geq t_0,t_0$ 为某一正常数(对于 $u(x,t)<0$ 的情形,令 $\bar{u}(x,t)=-u(x,t)$,可类似证明),则由(H_4)知,存在 $t_1\geq t_0$,使得对任意的 $(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty)$,有 $u(x,t)>0,u(x,t-\tau)>0,u(x,t-\sigma)>0,u(x,\rho(t))>0$.

将方程(1)两边同乘以 Dirichlet 问题(16)的最小特征值 λ_0 所对应的特征函数 $\phi(x)$,并在区域 Ω 上关于 x 积分,得

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[r(t)\int_{\Omega}u\phi(x)\mathrm{d}x+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)\int_{\Omega}u(x,t-\tau)\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau]+\int_{\Omega}q(x,t)u\phi(x)\mathrm{d}x+\int_{\Omega}(\int_{c}^{d}f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma)\phi(x)\mathrm{d}x=a_1(t)\int_{\Omega}\phi(x)\Delta u\mathrm{d}x+a_2(t)\int_{\Omega}\phi(x)\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x, t\geq t_1. \tag{17}$$

由 Green 公式及边值条件(2),并结合引理 2,有

$$\int_{\Omega}\phi(x)\Delta u\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\phi(x)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{N}}\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\phi(x)}{\partial\mathbf{N}}\mathrm{d}S+\int_{\Omega}u\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_{\Omega}u\phi(x)\mathrm{d}x, t\geq t_1, \tag{18}$$

$$\int_{\Omega}\phi(x)\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_{\Omega}u(x,\rho(t))\phi(x)\mathrm{d}x, t\geq t_1. \tag{19}$$

又由(H_2),(H_3)有

$$\int_{\Omega}q(x,t)u\phi(x)\mathrm{d}x\geq Q(t)\int_{\Omega}u\phi(x)\mathrm{d}x, t\geq t_1, \tag{20}$$

$$\int_{\Omega}(\int_{c}^{d}f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma)\phi(x)\mathrm{d}x\geq\int_{\Omega}(\int_{c}^{d}h(x,t)u(x,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma)\phi(x)\mathrm{d}x\geq H(t)\int_{c}^{d}(\int_{\Omega}u(x,t-\sigma)\phi(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}\sigma, t\geq t_1. \tag{21}$$

令 $V(t)=\int_{\Omega}u\phi(x)\mathrm{d}x$,显然,$V(t)>0,t\geq t_1$. 于是由式(17)~(21)可得:

$$[r(t)V(t)+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau]^{(n)}+\lambda_0a_2(t)V(\rho(t))+(\lambda_0a_1(t)+Q(t))V(t)+H(t)\int_{c}^{d}V(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\leq 0, t\geq t_1. \tag{22}$$

令 $Y(t)=r(t)V(t)+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,则易知 $Y(t)>0$,并且由式(22)有 $Y^{(n)}(t)\leq 0,t\geq t_1$.于是由引理 1 知,存在 $t_2\geq t_1$,使得 $Y'(t)>0$ 和 $Y^{(n-1)}(t)>0,t\geq t_2$.

由式(22)有

$$Y^{(n)}(t)+H(t)\int_{c}^{d}V(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\leq 0, t\geq t_2.$$

余下证明同定理 1 的后半部分的证明.故略.定理 5 证毕.

由微分不等式(22),有

$$[r(t)V(t)+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau]^{(n)}+\lambda_0a_2(t)V(\rho(t))\leq 0, t\geq t_1.$$

类似于定理 5 的证明,可得如下定理.

定理 6　设(H_6)、(H_7)成立.若

$$\int_{t_0}^{\infty}\{\lambda_0 a_2(t)[1-\int_{\alpha}^{\beta}p(\rho(t),\tau)\mathrm{d}\tau]\}\mathrm{d}t=\infty,t_0>0,$$

则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(16)确定.

由微分不等式(22),有

$$[r(t)V(t)+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau]^{(n)}+(\lambda_0 a_1(t)+Q(t))V(t)\le 0,t\ge t_1.$$

类似于定理 5 的证明,可得如下定理.

定理 7　设(H_6)、(H_7)成立.若

$$\int_{t_0}^{\infty}\{(\lambda_0 a_1(t)+Q(t))[1-\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)\mathrm{d}\tau]\}\mathrm{d}t=\infty,t_0>0,$$

则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(16)确定.

由定理 5,有如下推论.

推论 2　若微分不等式(22)无最终正解,则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动.

类似地,可得如下定理.

定理 8　设定理 3 中的条件均满足,则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动.

定理 9　设(H_8)成立.若

$$\int_{t_0}^{\infty}\{\lambda_0 a_2(t)[1-\gamma^{-1}\int_{\alpha}^{\beta}p(\rho(t),\tau)\mathrm{d}\tau]\}\mathrm{d}t=\infty,t_0>0,$$

则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(16)确定.

定理 10　设(H_8)成立.若

$$\int_{t_0}^{\infty}\{(\lambda_0 a_1(t)+Q(t))[1-\gamma^{-1}\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)\mathrm{d}\tau]\}\mathrm{d}t=\infty,t_0>0,$$

则边值问题(1)、(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(16)确定.

注 1　定理 6、定理 9 中的判据仅依赖于扩散系数 $a_2(t)$.

注 2　利用本文的思想,还可以考虑其他边值条件.譬如,考虑如下的 Robin 边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}+\mu(x)u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+,\tag{23}$$

其中 $\mu(x)\in C(\partial\Omega,(0,\infty))$. 只要将文中的假设条件($H_5$)改为:

(H_5)′ $h_1(u),h_2(u)\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}_+),uh'_1(u)\ge 0,uh'_2(u)\ge 0$.

不难得到边值问题(1)、(23)的若干振动判据.限于篇幅,在此省略之.

2　应用举例

下面给出一个例子来阐述本文主要结果的有效性.

例 1　考虑具分布时滞的四阶非线性中立型广义弹性杆方程

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}[(1+\mathrm{e}^{-t})u+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}u(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau]+(\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{-t})u+(1+\mathrm{e}^t)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}u(x,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma=$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\frac{3}{2}+\mathrm{e}^t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t-\frac{3\pi}{2}),(x,t)\in(0,\pi)\times[0,\infty)\tag{24}$$

及边值条件

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,t\ge 0.\tag{25}$$

这里 $r(t)=1+\mathrm{e}^{-t},p(t,\tau)=\frac{1}{2},q(x,t)=\mathrm{e}^t+4\mathrm{e}^{-t},f(x,t,u)=(1+\mathrm{e}^t)u,a_1(t)=\frac{1}{2},a_2(t)=\frac{3}{2}+\mathrm{e}^t,\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\pi,c=\frac{\pi}{2},d=\pi,\rho(t)=t-\frac{3\pi}{2}$.显然 $\lambda_0=1,\phi(x)=\sin x,x\in\Omega$.不难验证例 1 满足定理 5 的全部条

件,所以问题(24)、(25)的所有解在$(0,\pi)\times[0,\infty)$上振动.事实上$u(x,t)=\sin x\cos t$就是这样的一个解.

参 考 文 献

[1] SHOUKAKU Y,STAVROULAKIS I P,YOSHIDA N.Oscillation criteria for nonlinear neutral hyperbolic equations with functional arguments[J].Nonlinear Oscillations,2011,14(1):134-148.

[2] SHOUKAKU Y.Oscillation of solutions for forced nonlinear neutral hyperbolic equations with functional arguments[J].Electronic Journal of Differential Equations,2011(59):1-16.

[3] SHOUKAKU Y.Forced oscillatory results of hyperbolic equations with continuous distributed deviating arguments[J].Applied Mathematics Letters,2011,24(4):407-411.

[4] YU B,SHI A.Oscillation criteria for a class of neutral hyperbolic partial differential equations[J].Communications in Computer and Information Science,2011,152:309-315.

[5] LIN W X.Oscillation of certain nonlinear neutral hyperbolic partial functional differential equations with continuous deviating arguments [C]//Control & Decision Conference.New York:IEEE,2016:6462-6467.

[6] SHOUKAKU Y,YOSHIDA N.Forced oscillation of hyperbolic equations with mixed nonlinearities[J].Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2012(33):1-13.

[7] LIU Y J,ZHANG J W,YAN J R.Oscillation properties for systems of higher-order partial differential equations with distributed deviating arguments[J].Discrete Dynamics in Nature and Society,2015,2015:1-9.

[8] 赵环环,刘有军,燕居让.带分布时滞偶数阶微分方程组的振动性[J].应用数学学报,2017,40(4):612-622.
ZHAO H H,LIU Y J,YAN J R.Oscillation properties for systems of even order partial differential equations with distributed deviating arguments[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2017,40(4):612-622.

[9] LUO Z G,LUO L P,ZENG Y H.Oscillation results for BVPs of even order nonlinear neutral partial differential equations[J].Journal of Nonlinear Modeling and Analysis,2019,1(2):261-270.

[10] KIGURADZE I T.On the oscillation of solutions of the equation $\mathrm{d}^m u/\mathrm{d}t^m+a(t)|u|^m \operatorname{sign} u=0$[J].Mat Sb,1964,65(107):172-187.

[11] GILBARG D,TRUDINGER N S.Elliptic partial equations of second order[M].Berlin:Springer-Verlag,1977.

Oscillatory criteria of certain nonlinear neutral generalized elastic-rod equations

Luo Liping

(College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, China)

Abstract: A class of Dirichlet's boundary value problems of even order nonlinear neutral generalized elastic-rod equations with distributed delays are investigated. Some new sufficient conditions are established for oscillation of all solutions to such boundary value problems, which are illustrated by an example.

Keywords: generalized elastic-rod equation; oscillation; distributed delay; nonlinear; neutral type

[责任编校 陈留院 赵晓华]