文章编号:1000－2367(2018)03－0019－07 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.03.004

单调关联系统休止时间的随机性质

贾彬霞,张正成

(兰州交通大学 数理学院,兰州 730070)

摘 要:Signature 是研究单调关联系统时要用到一个有用的工具.基于元件寿命的顺序统计量的条件休止时间,建立了由 n 个独立同分布元件构成的单调关联系统的条件休止时间的混合表达式.建立在该混合表达式上,对具有不同元件或结构的两个系统的条件休止时间进行了随机比较.

关键词:signature;单调关联系统;休止时间;次序统计量;随机序

中图分类号:O213.2 **文献标志码**:A

近年来,许多学者致力于研究单调关联系统的随机比较和可靠性.所谓单调关联系统是指系统中的每个元件与系统都是相关的,并且其结构函数关于每个分量是递增的.为研究单调关联系统的结构以及对两个不同结构的单调关联系统进行比较,常常用到一个重要的工具:signature.文献[1]引入了 signature 的概念,考虑一个由 n 个独立同分布元件构成的单调关联系统,系统的寿命为 $T=\tau(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,其中 τ 为单调关联系统的结构函数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为元件的寿命.若 $X_{1:n},X_{2:n},\cdots,X_{n:n}$ 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的顺序统计量,元件的共同寿命分布函数为 F,则系统的 signature 向量就定义为一个概率向量 $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$,其中

$$s_i=P(T=X_{i:n}),i=1,2,\cdots,n,$$

满足 $0\leq s_i\leq 1$,且 $\sum_{i=1}^{n}s_i=1$.在实际问题中,s_i 可通过公式 $s_i=\dfrac{A_i}{n!}$,$i=1,2,\cdots,n$ 计算,其中 A_i 表示第 i 个元件失效导致系统失效的所有 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的排列种数.signature 的其他性质,可参考文献 [2－3].

目前,提高产品的可靠性和系统的可靠性,已成为保障系统安全性和产品质量的有效途径,同时系统的可靠性理论已经在电力,信息等领域得到了广泛应用.文献[4] 提出了基于 BP 神经网络的电力系统可靠性关联因素灵敏度计算方法.文献[5] 基于 MATLAB 聚类统计工具,采用了关联分析和系统模糊聚类结合方法对滩涂利用适宜性进行了评价与分类.文献[6]基于元件可靠性参数对系统可靠性指标灵敏度的概念和序贯蒙特卡罗仿真算法提出一种元件可靠性参数校核方法.对于系统可靠性进一步的研究,出现了一些建立在 signature 性质上对两个不同的单调关联系统的剩余寿命和休止时间可靠性的研究,可参考文献 [7－13].受此启发,本文主要研究了由独立同分布元件构成的单调关联系统的条件休止时间 $(t-X_{i:n}\mid T\leq t<X_{k:n})$ 的可靠性.

1 预备知识

定义 1 设 X 和 Y 是两个非负随机变量,且分别有绝对连续的分布函数 $F(x)$ 和 $G(x)$,则其可靠度函数分别为 $\bar{F}(x)=1-F(X)$,$\bar{G}(x)=1-G(X)$,概率密度函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$.

(1)如果对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $\bar{F}(x)\leq\bar{G}(x)$,则称 X 在普通随机序意义下小于等于 Y,记作 $X\leq_{st}Y$;

收稿日期:2017-03-26;**修回日期**:2017-11-20.

基金项目:国家自然科学基金(11161028;71361020)

作者简介:贾彬霞(1991－),女,甘肃武山人,兰州交通大学硕士研究生,研究方向为可靠性理论,E-mail:1517368901@qq.com.

通信作者:张正成,E-mail:zhzhcheng004@163.com.

(2)如果 $\bar{F}(x)/\bar{G}(x)$ 关于 x 是递减的,则称 X 在失效率序意义下小于等于 Y,记作 $X \leq_{hr} Y$;

(3) 如果 $F(x)/G(x)$ 关于 x 是递减的,则称 X 在反失效率序意义下小于等于 Y,记作 $X \leq_{rh} Y$;

(4) 如果 $f(x)/g(x)$ 关于 x 是递减的,则称 X 在似然比序意义下小于等于 Y,记作 $X \leq_{lr} Y$.

定义 2 设 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 和 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是两个离散型随机变量.

(1)如果对所有的 $i=1,2,\cdots,n$,都有 $\sum_{j=i}^{n} p_i \leq \sum_{j=i}^{n} q_i$ 则称 p 在普通随机序意义下小于等于 q,记作 $p \leq_{st} q$;

(2)如果 $\sum_{j=i}^{n} p_i / \sum_{j=i}^{n} q_i$ 关于 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是递减的,则称 p 在失效率意义下小于等于 q,记作 $p \leq_{hr} q$;

(3)如果 $\sum_{j=1}^{i} p_i / \sum_{j=1}^{i} q_i$ 关于 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是递减的,则称 p 在反失效率意义下小于等于 q,记作 $p \leq_{rh} q$;

(4)如果 p_i/q_i 关于 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是递减的,则称 p 在似然比意义下小于等于 q,记作 $p \leq_{lr} q$.

这几个随机序的关系为 $X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{hr} (\leq_{rh}) Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$.

引理 1 假设 α 和 β 是两个实值函数,且满足 β 是非负的,α/β 和 β 是递增的,假设 X_i 具有分布函数 F_i,$i=1,2$,如果 $X_1 \leq_{hr} X_2$,那么 $\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) \mathrm{d} F_1(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) \mathrm{d} F_1(x)} \leq \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) \mathrm{d} F_2(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) \mathrm{d} F_2(x)}$.

有关定理和引理更详细的介绍可参考文献 [14].

2 条件休止时间的随机比较及其单调性

设由 n 个独立同分布元件 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 且元件的共同寿命分布函数为 F 构成的寿命为 T 单调关联系统.本小节主要研究的是,当系统在 t 时刻失效,但至少有 k 个元件存活时的条件休止时间,也就是考虑随机变量 $(t-X_{i:n} \mid T \leq t < X_{k:n})$. 首先建立它的混合表达式.

定理 1 设 $P(T \leq t < X_{k:n}) > 0$,$j=i, i+1, \cdots, k-1$,那么对所有的 $x \geq 0$,

$$P(t-X_{i:n} > x \mid T \leq t < X_{k:n}) = \sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}(t) P(t-X_{i:n} > x \mid X_{j:n} \leq t < X_{k:n}), \tag{1}$$

其中 $s_{j,k}(t)=\dfrac{s_j P(X_{j:n} \leq t < X_{k:n})}{P(T \leq t < X_{k:n})}$,且满足 $\sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}(t)=1$.

记 $s_k(t)=(0,\cdots,0,s_{i,k}(t),s_{i+1,k}(t),\cdots,s_{k-1,k}(t),0,\cdots,0)$.

证明 对 $j=i,\cdots,k-1$,及所有的 $t \geq 0, x \geq 0$, 由全概率公式可得

$$\begin{aligned} P(t-X_{i:n} \leq x \mid T \leq t < X_{k:n}) &= \frac{1}{P(T \leq t < X_{k:n})} \sum_{j=i}^{k-1} P(X_{i:n} \geq t-x, T \leq t < X_{k:n}, T=X_{j:n}) = \\ & \sum_{j=i}^{k-1} \frac{s_j P(X_{j:n} \leq t < X_{k:n})}{P(T \leq t < X_{k:n})} P(t-X_{i:n} \leq x \mid X_{j:n} \leq t < X_{k:n}) = \\ & \sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}(t) P(t-X_{i:n} \leq x \mid X_{j:n} \leq t < X_{k:n}), \end{aligned}$$

那么 $P(t-X_{i:n} > x \mid T \leq t < X_{k:n}) = \sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}(t) P(t-X_{i:n} > x \mid X_{j:n} \leq t < X_{k:n})$.其中,对 $j=i,\cdots,k-1$,$s_{j,k}(t)=\dfrac{s_j P(X_{j:n} \leq t < X_{k:n})}{\sum_{m=i}^{k-1} s_m P(X_{m:n} \leq t < X_{k:n})}$. 显然

$$\sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}(t) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{s_j P(X_{j:n} \leq t < X_{k:n})}{\sum_{m=i}^{k-1} s_m P(X_{m:n} \leq t < X_{k:n})} = 1.$$

定理 1 得证.

注 1　向量 $s_k(t)=(0,\cdots,0,s_{i,k}(t),s_{i+1,k}(t),\cdots,s_{k-1,k}(t),0,\cdots,0)$ 可称为系统的动态 signature.对系统的动态 signature,更详细的介绍可参阅文献 [6,9,11,15].下面是对 $s_{j,k}(t)$ 的概率解释.

注 2　假设 u 是分布函数 F 的中间变量，则 $s_{j,k}(u)=\dfrac{s_j\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{l}}{\sum_{m=i}^{k-1}s_m\sum_{l=m}^{k-1}\binom{n}{l}}$，该式表明 $s_{j,k}(u)$ 的值不取决于中间变量 u，也就是分布函数 F.

注 3　(1)式表明由 n 个独立同分布元件构成的单调关联系统的条件休止时间可以表示成 n 中取 k 系统的条件休止时间的混合.基于此，可通过 n 中取 k 系统的性质来刻画单调关联系统的性质.为了得到本文的主要结论，应考虑随机变量 $(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\le t<X_{k:n})$.

对任意的 $1\le i\le j<k\le n$，由全概率公式可得

$$P(t-X_{i:n}>x\mid X_{j:n}\le t<X_{k:n})=\frac{P(t-X_{i:n}>x,X_{j:n}\le t<X_{k:n})}{P(X_{j:n}\le t<X_{k:n})}=$$

$$\sum_{l=j}^{k-1}K_l^n(t)P(t-X_{i:n}>x\mid X_{l:n}\le t<X_{l+1:n}),$$

其中 $K_l^n(t)=\dfrac{P(X_{l:n}\le t<X_{l+1:n})}{P(X_{j:n}\le t<X_{k:n})}=\dfrac{\binom{n}{l}(F(t))^l(1-F(t))^{n-l}}{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{m}(F(t))^m(1-F(t))^{n-m}}$. 或 $K_l^n(t)=\dfrac{\binom{n}{l}(\varphi(t))^l}{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{m}(\varphi(t))^m}$，$\varphi(t)=\dfrac{F(t)}{\bar F(t)}$.

引理 2[16]　对任意的 $1\le i<j\le l$，$(t-X_{i:n}\mid X_j\le t<X_{j+1})\le_{lr}(t-X_{i:n}\mid X_l\le t<X_{l+1})$.

定理 2　如果分布函数 F 是绝对连续的，那么对 $1\le i\le j\le m\le n$，

$$(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\le t<X_{k:n})\le_{lr}(t-X_{i:n}\mid X_{j+1:n}\le t<X_{k:n}).$$

证明　设随机变量 $(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\le t<X_{k:n})$ 和 $(t-X_{i:n}\mid X_{j+1:n}\le t<X_{k:n})$ 的概率密度函数分别为 $h_{i,j,k}^n(x\mid t)$ 和 $h_{i,j+1,k}^n(x\mid t)$，那么由备注 3 可知

$$h_{i,j,k}^n(x\mid t)=\frac{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{l}\varphi^l(t)h_{i,l,l+1}^n(x\mid t)}{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{m}\varphi^m(t)},\quad h_{i,j+1,k}^n(x\mid t)=\frac{\sum_{l=j+1}^{k-1}\binom{n}{l}\varphi^l(t)h_{i,l,l+1}^n(x\mid t)}{\sum_{l=j+1}^{k-1}\binom{n}{m}\varphi^m(t)},$$

那么

$$\frac{h_{i,j,k}^n(x\mid t)}{h_{i,j+1,k}^n(x\mid t)}=\frac{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{l}\varphi^l(t)h_{i,l,l+1}^n(x\mid t)}{\sum_{l=j+1}^{k-1}\binom{n}{l}\varphi^l(t)h_{i,l,l+1}^n(x\mid t)}\cdot\frac{\sum_{l=j+1}^{k-1}\binom{n}{m}\varphi^m(t)}{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{m}\varphi^m(t)}=$$

$$\left(1+\frac{\binom{n}{j}\varphi^j(t)}{\sum_{l=j+1}^{k-1}\binom{n}{l}\varphi^l(t)\dfrac{h_{i,l,l+1}^n(x\mid t)}{h_{i,j,j+1}^n(x\mid t)}}\right)\cdot\frac{\sum_{l=j+1}^{k-1}\binom{n}{m}\varphi^m(t)}{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{m}\varphi^m(t)},$$

由引理 2 可得，$\dfrac{h_{i,l,l+1}^n(x\mid t)}{h_{i,j,j+1}^n(x\mid t)}$ 关于 x 单调递增，从而 $\dfrac{h_{i,j,k}^n(x\mid t)}{h_{i,j+1,k}^n(x\mid t)}$ 关于 x 单调递减，也就是

$$(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\le t<X_{k:n})\le_{lr}(t-X_{i:n}\mid X_{j+1:n}\le t<X_{k:n}).$$

定理 2 得证.

其次，对两个不同的单调关联系统的条件休止时间进行随机比较.

定理 3 假设 $T_1=\tau_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $T_2=\tau_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是由一组具有寿命 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的元件构成的两个单调关联系统的寿命,其对应(1)式的混合表达式系数向量分别为 $s_{j,k}^{(1)}(t)$ 和 $s_{j,k}^{(2)}(t)$,对所有的 $t\geq 0$,

(1)如果 $s_{j,k}^{(1)}(t)\leq_{st}s_{j,k}^{(2)}(t)$,那么 $(t-X_{i:n}\mid T_1\leq t<X_{k:n})\leq_{st}(t-X_{i:n}\mid T_2\leq t<X_{k:n})$;

(2)如果 $s_{j,k}^{(1)}(t)\leq_{hr}s_{j,k}^{(2)}(t)$,那么 $(t-X_{i:n}\mid T_1\leq t<X_{k:n})\leq_{hr}(t-X_{i:n}\mid T_2\leq t<X_{k:n})$;

(3)如果 $s_{j,k}^{(1)}(t)\leq_{lr}s_{j,k}^{(2)}(t)$,那么 $(t-X_{i:n}\mid T_1\leq t<X_{k:n})\leq_{lr}(t-X_{i:n}\mid T_2\leq t<X_{k:n})$.

证明 (1)对任意的 $x\in[0,t]$,由(1)式可得

$$P(t-X_{i:n}>x\mid T_1\leq t<X_{k:n})=\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)P(t-X_{i:n}>x\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n}),$$

$$P(t-X_{i:n}>x\mid T_2\leq t<X_{k:n})=\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(2)}(t)P(t-X_{i:n}>x\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n}),$$

由定理 2 可知,$P(t-X_{i:n}>x\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})$ 关于 j 单调递增,再加上条件 $s_{j,k}^{(1)}(t)\leq_{st}s_{j,k}^{(2)}(t)$,则由文献[14](1.A.7)可知定理 3 得证.

(2)假设

$$\overline{H}_{i,k}^{(1)}(x\mid t)=P(t-X_{i:n}>x\mid T_1\leq t<X_{k:n}),\overline{H}_{i,k}^{(2)}(x\mid t)=P(t-X_{i:n}>x\mid T_2\leq t<X_{k:n}),$$

要证明所需结论,只需证 $\dfrac{\overline{H}_{i,k}^{(1)}(x\mid t)}{\overline{H}_{i,k}^{(2)}(x\mid t)}$ 关于 x 单调递减,也就是对任意的 $0<x_1\leq x_2$,

$$\frac{\overline{H}_{i,k}^{(1)}(x_2\mid t)}{\overline{H}_{i,k}^{(2)}(x_2\mid t)}\leq\frac{\overline{H}_{i,k}^{(1)}(x_1\mid t)}{\overline{H}_{i,k}^{(2)}(x_1\mid t)},$$

也就是

$$\frac{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)P(t-X_{i:n}>x_2\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})}{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)P(t-X_{i:n}>x_1\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})}\leq\frac{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(2)}(t)P(t-X_{i:n}>x_2\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})}{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(2)}(t)P(t-X_{i:n}>x_1\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})},$$

令 $\alpha(j)=P(t-X_{i:n}>x_2\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})$,$\beta(j)=P(t-X_{i:n}>x_1\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})$,由定理 2,可知 $\beta(j)$ 关于 j 单调递增,而 $\dfrac{\alpha(j)}{\beta(j)}=\dfrac{P(t-X_{i:n}>x_2\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})}{P(t-X_{i:n}>x_1\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})}$ 关于 j 也单调递增,则由引理 1 可得结论成立.

(3)假设随机变量 $(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})$ 的概率密度函数为 $h_{i,j,k}^{n}(x\mid t)$,则为了证明所需结论只需证明 $\dfrac{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)h_{i,j,k}^{n}(x\mid t)}{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(2)}(t)h_{i,j,k}^{n}(x\mid t)}$ 关于 x 单调递减,也就是对任意的 $0<x_1\leq x_2$,

$$\frac{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)}{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(2)}(t)h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)}\geq\frac{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)}{\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}^{(2)}(t)h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)},$$

等价于

$$\eta(x_1,x_2)=\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=i}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)s_{m,k}^{(2)}(t)[h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_2\mid t)-h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_1\mid t)]\geq 0,$$

通过一定的代数计算

$$\eta(x_1,x_2)=\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=i}^{j}s_{j,k}^{(1)}(t)s_{m,k}^{(2)}(t)[h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_2\mid t)-h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_1\mid t)]+$$
$$\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=j}^{k-1}s_{j,k}^{(1)}(t)s_{m,k}^{(2)}(t)[h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_2\mid t)-h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_1\mid t)]=$$

$$\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=i}^{j}s_{j,k}^{(1)}(t)s_{m,k}^{(2)}(t)[h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_2\mid t)-h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_1\mid t)]+$$
$$\sum_{m=i}^{k-1}\sum_{j=i}^{m}s_{j,k}^{(1)}(t)s_{m,k}^{(2)}(t)[h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_2\mid t)-h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_1\mid t)]=$$
$$\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=i}^{j}[s_{j,k}^{(1)}(t)s_{m,k}^{(2)}(t)-s_{m,k}^{(1)}(t)s_{j,k}^{(2)}(t)][h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_2\mid t)-$$
$$h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_1\mid t)]\geq 0,$$

不等式成立的条件是因为由定理 2 可知对任意的 $m\leq j$ ，

$$(t-X_{i:n}\mid X_{m:n}\leq t<X_{k:n})\leq_{lr}(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})\,.$$

也就是 $h_{i,j,k}^{n}(x_1\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_2\mid t)-h_{i,j,k}^{n}(x_2\mid t)h_{i,m,k}^{n}(x_1\mid t)\leq 0$ 成立，且由条件 $s_{j,k}^{(1)}(t)\leq_{lr}s_{j,k}^{(2)}(t)$，可得 $s_{j,k}^{(1)}(t)s_{m,k}^{(2)}(t)-s_{m,k}^{(1)}(t)s_{j,k}^{(2)}(t)\leq 0$.

定理 3 得证.

其次，对随机变量 $(t-X_{i:n}\mid T\leq t<X_{k:n})$ 关于 t 的单调性的进行证明.

如果 X 的反失效率 $r(t)=f(t)/F(t)$ 关于 $t>0$ 单调递减，那么就称 X 为单调递减失效率 (DRHR)，可参考文献[17].

定理 4　如果 X_i 是 DRHR，那么对任意的 $x\in[0,t]$，$P(t-X_{i:n}>x\mid T\leq t<X_{k:n})$ 关于 $t(\geq 0)$ 单调递增.

证明　对 $1\leq i\leq j<k\leq n$，设随机变量 $(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n})$ 和 $(t-X_{i:n}\mid T\leq t<X_{k:n})$ 的可靠度函数分别为 $\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)$ 和 $\overline{H}_{i,k}(x\mid t)$.那么，表达式 (1) 可表示为

$$\overline{H}_{i,k}(x\mid t)=\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}(t)\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t).$$

关于 t 求偏导，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{H}_{i,k}(x\mid t)=\sum_{j=i}^{k-1}s_{j,k}(t)\frac{\partial}{\partial t}\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)+\sum_{j=i}^{k-1}\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)\frac{\partial}{\partial t}s_{j,k}(t).\tag{2}$$

由文献[18]可知，对任意的 $x\in[0,t]$，$\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)$ 关于 t 单调递增，则 (2) 式右边的第 1 个式子非负，因此，只需证明第 2 个式子也非负即可.

通过一定的代数计算

$$\sum_{j=i}^{k-1}\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)\frac{\partial}{\partial t}s_{j,k}(t)=\sum_{j=i}^{k-1}s_j\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sum_{l=j}^{k-1}\binom{n}{l}\varphi^{l}(t)}{\sum_{m=i}^{k-1}s_m\sum_{l=m}^{k-1}\binom{n}{l}\varphi^{l}(t)}\overset{sgn}{=\!=}$$
$$\varphi'(t)\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=i}^{k-1}s_js_m\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)\sum_{l_1=j}^{k-1}\sum_{l_2=m}^{k-1}\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\varphi^{l_1+l_2-1}(t)(l_1-l_2)=$$
$$\varphi'(t)\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=i}^{j}s_js_m\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)\sum_{l_1=j}^{k-1}\sum_{l_2=m}^{k-1}\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\varphi^{l_1+l_2-1}(t)(l_1-l_2)+$$
$$\varphi'(t)\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=j}^{k-1}s_js_m\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)\sum_{l_1=j}^{k-1}\sum_{l_2=m}^{k-1}\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\varphi^{l_1+l_2-1}(t)(l_1-l_2)=$$
$$\varphi'(t)\sum_{j=i}^{k-1}\sum_{m=i}^{j}s_js_m[\overline{H}_{i,j,k}(x\mid t)-\overline{H}_{i,m,k}(x\mid t)]\times$$
$$\sum_{l_1=j}^{k-1}\sum_{l_2=m}^{j-1}\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\varphi^{l_1+l_2-1}(t)(l_1-l_2)\geq 0,$$

其中 $\overset{sgn}{=\!=}$ 表示有相同的性质，不等式成立是因为由定理 2 可知，对任意的 $1\leq i\leq m\leq j<k\leq n-1$，

$$(t-X_{i:n}\mid X_{m:n}\leq t<X_{k:n})\leq_{st}(t-X_{i:n}\mid X_{j:n}\leq t<X_{k:n}),$$

则对 $l_1\geq l_2$，(2) 式的第 2 个式子也非负.

定理 4 得证.

最后考虑两个由 n 个独立同分布元件 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 构成的单调关联系统，其对应的分布函数分别为 F 和 G，且系统的寿命分别为 T_X 和 T_Y.

定理 5 如果 $X_1 \leq_{rh} Y_1$，那么 $(t - X_{i:n} \mid T_X \leq t < X_{k:n}) \geq_{st} (t - Y_{i:n} \mid T_Y \leq t < Y_{k:n})$.

证明 注意到 $X_1 \leq_{rh} Y_1$，那么由文献[18]可知

$$(t - X_{i:n} \mid X_{j:n} \leq t < X_{k:n}) \geq_{st} (t - Y_{i:n} \mid Y_{j:n} \leq t < Y_{k:n}).$$

另一方面，由注 2 可知 Signature 向量与分布函数无关，因此 $s_{j,k}^X(t) = s_{j,k}^Y(t)$，其中 $s_k^X(t) = (0, \cdots, 0, s_{i,k}^X(t), s_{i+1,k}^X(t), \cdots, s_{k-1,k}^X(t), 0, \cdots, 0)$ 和 $s_k^Y(t) = (0, \cdots, 0, s_{i,k}^Y(t), s_{i+1,k}^Y(t), \cdots, s_{k-1,k}^Y(t), 0, \cdots, 0)$ 分别为 T_X 和 T_Y 的 Signature 向量.因此，

$$\begin{aligned}
P(t - X_{i:n} > x \mid T_X \leq t < X_{k:n}) = \sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}^X(t) P(t - X_{i:n} > x \mid X_{j:n} \leq t < X_{k:n}) \geq \\
\sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}^X(t) P(t - Y_{i:n} > x \mid Y_{j:n} \leq t < Y_{k:n}) = \\
\sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}^Y(t) P(t - Y_{i:n} > x \mid Y_{j:n} \leq t < Y_{k:n}) = \\
P(t - Y_{i:n} > x \mid T_Y \leq t < Y_{k:n}).
\end{aligned}$$

定理 5 证.

注 4 设随机变量 $(t - X_{i:n} \mid T \leq t < X_{k:n})$ 的平均休止时间 $M_{i,k}^T$，那么

$$M_{i,k}^T = E(t - X_{i:n} \mid T \leq t < X_{k:n}) = \sum_{j=i}^{k-1} s_{j,k}(t) E(t - X_{i:n} \mid X_{j:n} \leq t < X_{k:n}).$$

由定理 4 可知，如果 X_i 是 DRHR，那么 $M_{i,k}^T$ 关于 t 也单调递增.进一步，当满足定理 5 的条件时，$M_{i,k}^{T_X} \geq M_{i,k}^{T_Y}$ 成立.

3 结 论

借助于系统的 signature 概念，研究了由一组独立同分布元件构成的单调关联系统.当两个不同结构系统的 signature 之间具有一定序关系时，得到了两个单调关联系统的休止时间之间也分别存在一定的序关系.也就是借助于相应的 n 中取 k 系统条件休止时间的可靠度函数，给出了系统条件休止时间可靠度函数的一个混合表达式，并基于该混合表达式，对具有不同元件或结构的两个系统的条件休止时间进行了随机比较.进一步研究了系统休止时间关于流逝时间的随机单调性，为通过流逝时间推断系统的失效时间提供了一定的理论依据.

参 考 文 献

[1] Samaniego F J, Balakrishnan N, Navarro J. Dynamic signatures and their use in comparing the reliability of new and used systems [J]. Naval Research Logistics, 2009, 56(6): 577-591.

[2] Navarro J, Shaked M. Hazard rate ordering of order statistics and systems [J]. Journal of Applied Probability, 2006, 43(2): 391-408.

[3] Mahmoudi M, Asadi M. The dynamic Signature of coherent systems [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2011, 60(4): 817-822.

[4] 田洪迅，王宏刚，万涛，等.基于 BP 神经网络的配电网可靠性关联因素灵敏度计算方法 [J].电力系统保护与控制，2017，45(19)：71-77.

[5] 赵国峰，宋希杰，成立.基于关联分析和系统聚类的滩涂围垦适宜性评价 [J].灌溉排水学报，2016，35(6)：93-97.

[6] Dasilva A M L, Guimaraes A C R, Nascimento L C. Distribution reliability: Data calibration based on Monte Carlo simulation and evolutionary optimization [C]//International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAMS). [出版地不详]: [出版者不详], 2014: 1-6.

[7] Goliforushani S, Asadi M. Stochastic ordering among inactivity times of coherent systems [J]. Sankhya B, 2011, 73(2): 241-262.

[8] Goliforushani S, Balakrishnan N. On the residual and inactivity times of the components of used coherent systems [J]. Journal of Applied Probability, 2012, 49(2): 385-404.

[9] Navarro J, Balakrishnan N, Samaniego F J. Mixture representations of residual lifetimes of used systems [J]. Journal of Applied Probability, 2008, 45(4): 1097-1112.

[10] Zhang Z.Mixture representations of inactivity times of conditional coherent systems and their applications [J].Journal of Applied Probability,2010,47(3):876-885.

[11] Zhang Z.Ordering conditional general coherent system with exchangeable components [J].Journal of Statistical Planning and Inference,2010,140(2):454-460.

[12] Zhang Z,Li X.Some new results on stochastic orders and aging properties of coherent systems [J].IEEE Transactions on Reliability,2010,59(4):718-724.

[13] Zhang Z,Meeker Q.Mixture representations of reliability in coherent systems and preservation results under double monitoring [J].Communications in Statistics - Theory and Methods,2013,42(3):385-397.

[14] Shaked M,Shanthikumar J G.Stochastic orders [M].New York:Springer-Verlag,2007.

[15] Zhang Z,Yang Y.Ordered properties of the residual lifetime and inactivity time of $n-k+1$-out-of-n systems under double monitoring [J].Statistics and Probability Letters,2010,80(7):711-717.

[16] Goliforushani S,Asadi M.On the residual and inactivity times of the components of used coherent system [J].Journal of Applied Probability,2012,49(2):385-404.

[17] Block H,Savits T,Sigh H.The reversed hazard rate function [J].Probability in the Engineering and Informational Sciences,1998,12(1):69-90.

[18] Tavangar M.Conditional inactivity time of components in a coherent operating system [J].IEEE Transactions on Reliability,2016,65(1):359-369.

On the conditional inactivity time of coherent system

Jia Binxia, Zhang Zhengcheng

(School of Mathematics and Physics,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou 730070,China)

Abstract: The concept of "signature" is a useful tool to study the reliability properties of a coherent system. A mixture representation of the reliability function of conditional inactivity time of coherent system with n independent and identically distributed components was built in terms of the reliability functions of conditional inactivity times of order statistics. Based on the mixture representations, and then we carry out stochastic comparisons between the conditional inactivity time of two coherent systems with different structures or different component lifetimes.

Keywords: signature; coherent system; inactivity time; order statistics; stochastic order

［责任编校　陈留院］